连续介质力学：基础和应用

康国政　蒋　晗　阚前华　编著

Continuum Mechanics: Fundamentals and Applications

科学出版社

连续介质力学：基础与应用

康国政　蒋　晗　阚前华　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书主要针对变形体在外加载荷作用下产生的运动及变形过程中涉及到的几何状态、运动状态和内部响应等问题，采用严密的、精确的和普适性的描述方法来进行系统的理论阐述，着重讨论变形体运动和变形所需要遵守的基本定理和基本原则，以及不同变形体介质的初始边界值问题应该满足的基本方程及其建立过程，为涉及具体的固体介质和流体介质的力学行为研究提供了基本的理论体系和分析方法。

本书可供土木、机械、材料、航空航天以及工程力学等工科专业学生使用，也可作为相关力学工作者基础理论学习的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学：基础和应用 / 康国政，蒋晗，阚前华编著.—北京：科学出版社，2014.12

ISBN 978-7-03-042873-8

Ⅰ.①连… Ⅱ.①康… ②蒋… ③阚… Ⅲ.①连续介质力学 Ⅳ.①O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 308425 号

责任编辑：杨 岭 华宗琪 / 责任校对：崔慧娴 刘子明

责任印制：余少力 / 封面设计：墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2015 年 6 月第一次印刷 印张：15 1/4

字数：350 千字

定价：49.00 元

前　言

连续介质力学是力学学科中一个重要的基础研究方向，同时也是力学学科一门重要的基础课程。“连续介质力学”课程的学习在力学学科的研究生培养过程中起着重要的作用。连续介质力学的基础理论是力学各个分支学科和研究方向的理论基础。连续介质力学对于变形体在外加载荷作用下产生的运动和变形过程中涉及的几何状态、运动状态和内部响应等问题，采用严密的、精确的和普适性的描述方法来进行系统的理论阐述，着重讨论变形体运动和变形所需要遵守的基本定理和基本原则，以及不同变形体介质的初始边界值问题应该满足的基本方程及其建立过程，为涉及具体的固体介质和流体介质的力学行为研究提供了基本的理论体系和分析方法。

一直以来，在力学和相关学科的研究生课程体系中都开设了“连续介质力学”这门重要的专业基础课。为了配合该课程教学，国内外学者编著了多种教材，极大地促进了该门课程的蓬勃发展，也培养了一大批高水平的力学工作者。同样，西南交通大学面对硕士研究生开设了“张量分析及连续介质力学”这门专业核心课程。编者在多年来的教学实践中感受和了解到：已有的连续介质力学教材，不管是国内学者编著的《连续介质力学》(或《非线性连续介质力学》)，还是国外学者编著的相关教材，要么过于偏重理论体系的严密性和完美感，采用了大量的数学语言来阐述连续介质力学中的基本定义和基本原理，使得对数学分析方面的知识了解相对较少的工科学生不容易理解这些数学语言背后包含的物理含义，进而不能理解相关内容，产生畏难情绪，不利于学生对连续介质力学基本理论和基本关系的理解与掌握；要么太注重与实际问题的结合，讲解基本方程的一些具体求解细节，忽视了连续介质力学的普适性，不易让学生从一般性、普遍性原理的高度来认识连续介质力学中涉及的一些基本原理和基本关系，相当于一门高等材料力学或是高等弹性力学的课程内容和学习效果。因此，有必要结合土木、机械、材料、航空航天以及工程力学等工科专业学生的知识结构和能力体系的特点，对已有的连续介质力学教材进行改进，编著适合于这些工科类研究生的连续介质力学教材。

2010 年，美国 Carnegie Mellon 大学的 M. E. Gurtin 教授、加拿大 McGill 大学的 E. Fried 教授和美国麻省理工学院(MIT)的 A. Anand 教授在 M. E. Gurtin 教授 1981 年编写的 *An Introduction to Continuum Mechanics* 一书的基础上，结合最新的研究成果，撰写了 *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*。该书基于平衡态热力学基本原理，采用简单的直角坐标系，对连续介质力学的基本理论和基本关系进行阐述，并突出这些基本原理和基本关系在不同介质的力学理论方面的应用。尽管该书中仍有不少数学描述，但是，由于其理论框架较为简单，没有涉及复杂的非平衡态热力学理论和曲线坐标系下的协变和逆变运算，相对来说，理论推导过程中涉及的物理概念较为清晰，学生更容易掌握。本书编者在这几年的实际教学过程中都采用了这本教材，教学效果有比较大的改

善，更能让学生突破繁琐的数学公式及其推导过程，理解各个数学公式及其相互间包含的物理原理和物理过程，掌握连续介质力学的基本原理和基本关系的物理本质及其应用范围。然而，在这几年的教学过程中，编者也体会到了学生们阅读英文原版书的困难，有很多学生对该教材的学习大都停留在对英文单词和语句的字面意思的理解上，如果想理解字里行间内含的对物理现象、物理规律和物理定律的描述，则需要花费大量的时间和精力。尽管这样的一种经历对于培养学生的英文阅读和理解能力来说是非常有利的，但是，从“连续介质力学”课程本身的学习和理解来说，这是一种浪费(因为研究生学习阶段所需学习的课程多，时间短，还有繁重的研究工作)，因此，非常有必要参考 *The Mechanics and Thermodynamics of Continua* 一书的框架和体系编写相应的中文教材。本书正是在这样一种需求下应运而生的。需指出的是，尽管本教材采用了 *The Mechanics and Thermodynamics of Continua* 一书中的平衡态热力学体系和直角坐标系描述，但考虑到连续介质力学课程规定学时的限制，本教材根据需要对原参考书中的内容进行了删减(包括物质扩散、间断条件、晶体塑性和梯度塑性理论等内容)；为了更便于工科学生掌握连续介质力学的基本原理和基本关系及其应用，本教材对原参考书中的许多章节进行了修改和补充，删除了一些难以理解的数学描述，采用工程的语言对数学公式中包含的物理概念和物理原理进行阐述；同时，补充了一些原参考书中没有的内容，如矩阵运算和黏弹性理论等方面的知识；另外，为了便于学生学习，本教材还专门补充了一定量的、必要的例题和习题。

综上所述，本教材既传承了 *The Mechanics and Thermodynamics of Continua* 一书的优点，又结合我国工科研究生的实际特点，对内容进行了重新的整合和完善，克服了原书在数学描述和语言等方面造成的学习障碍，有利于我国力学和相关学科研究生的培养。

本教材共分两篇 6 章。第一篇为基础理论篇，包括第 1～3 章：第 1 章为张量分析基础，简要介绍连续介质力学基本理论和基本关系讨论过程中涉及的关于矢量和张量的定义、代数运算以及矢量和张量分析的基础知识；第 2 章为运动学基础，从最基本的物体运动出发，讨论物体运动和变形过程中遵循的运动学关系，包括矢量、张量场的材料和空间积分以及 Reynold 输运定理等；第 3 章为连续介质力学的基本原理，对物体运动和变形过程中必须遵循的一些基本原理和基本关系进行详细的阐述，包括质量守恒定律、动量平衡定律、热力学第一和热力学第二定律以及客观性原理(即构架无差异性原理)等。第二篇为应用篇，包括第 4～6 章：第 4 章为弹性固体的力学理论，详细讨论在运动学基本关系和连续介质力学基本原理的框架下建立各类弹性固体介质力学问题基本方程的过程，包括一般弹性理论、各向同性线弹性理论、热弹性理论和黏弹性理论等；第 5 章为弹塑性固体的力学理论，在弹性固体理论的基础上，通过引入塑性流动对应力张量的限制，讨论小变形弹塑性理论和大变形弹塑性理论以及热弹塑性理论的建立过程；第 6 章为可压缩和不可压缩流体力学理论，对一些简单的流体介质运动和变形过程中遵循的动力学基本方程的建立过程进行阐述，讨论描述各类流体介质力学过程的 Navier-Stokes 方程的建立过程，包括弹性流体、黏性流体和不可压缩流体等。

如前所述，在本教材的编写过程中主要参考了 M. E. Gurtin 教授等 2010 年编写的

The Mechanics and Thermodynamics of Continua 一书中的平衡态热力学框架和直线坐标系描述以及一些基本原理和基本关系的推导过程，在此，编者对该书作者表示衷心的感谢，并在本教材正文中对此进行了必要的引用标注。另外，本教材的出版得到了西南交通大学研究生核心课程建设基金(2013)和国家自然科学基金项目(项目编号 11025210)的资助，编者对此深表感谢！

另外，编者对本教材中引用的所有研究成果的作者表示感谢，同时，也感谢本教材编写小组所有成员在各个方面做出的不懈努力。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

康国政

2015 年元旦于四川成都

目　　录

第一篇　基础理论篇

第二篇 应用篇

第一篇　基础理论篇

第 1 章　张量分析基础

连续介质力学是研究连续体在外部作用下产生的变形及其运动规律的一门学科，而描述连续体变形、运动以及外部作用的物理量，在参考坐标系发生变化时都应该满足一定的变换规律。这些基本变换规律的描述需要涉及矢量和张量及其运算等数学工具，因此，在讲解连续介质力学基本原理之前有必要对将要使用到的矢量和张量分析基础知识进行简单的介绍。由于本书仅在三维欧几里得空间内讨论连续介质力学的基本原理，本章仅涉及三维笛卡儿坐标系下的矢量和张量分析基本内容，不讨论任何曲线坐标系下的张量分析方法，对张量分析的详细讨论和相关知识感兴趣的读者可参考《张量分析》（第二版）(黄克智等，2003)和《张量分析及应用》（余天庆、毛为民，2006）等书籍。另外，已经具备张量分析基础知识的读者可以直接进入第 2 章的学习。

1.1　矢量代数和矩阵运算基础

1.1.1　矢量代数基础

1. 点

构成三维欧几里得空间的最基本元素即为点，它反映一定的空间位置，由 $\boldsymbol{x}$ 表示[①]。不同的 $\boldsymbol{x}$ 表示不同点所处的位置。在三维笛卡儿坐标系(即三维直角坐标系)下，一个点的位置可以用该点的三个坐标值表示。也就是说，$\boldsymbol{x}$ 实际上可以由三个坐标值，即 x_1、x_2和 x_3表示。

2. 矢量

在三维欧几里得空间(欧氏空间)中，具有大小和方向且满足一定变换规则的空间实体即为矢量(vector)，可用 $\boldsymbol{v}$ 来表示。例如，空间中两个点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的相对位置就可用一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 表示(图 1-1 所示)，即

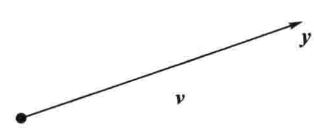

图 1-1　矢量 $\boldsymbol{v}$ 的几何意义

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \tag{1-1}$$

由式(1-1)可得

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{1-2}$$

这表明，点 $\boldsymbol{x}$ 和矢量 $\boldsymbol{v}$ 之和是另一个点 $\boldsymbol{y}$。实际上，空间中任意一点的位置都可以用该点

① 本书中的矢量和张量均用粗体字母表示，标量用斜体字母表示。

和坐标原点 $\boldsymbol{o}$ 之间形成的一个矢量表示，也就是说，点的位置 $\boldsymbol{x}$ 也可以由该点与坐标原点 $\boldsymbol{o}$ 构成的一个位置矢量来表示。

3. 矢量的点积和叉积

矢量之间可以进行如下运算。

1)点积(dot product)

两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的点积运算可表示如下

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta \tag{1-3}$$

其中，$|\boldsymbol{u}|$表示矢量的大小，是一个标量；θ 为两个矢量间的夹角，分别有

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} \tag{1-4}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|} \tag{1-5}$$

由式(1-3)所示结果可见，两个矢量间的点积运算得到的结果是一个标量值。

2)叉积(cross product)

两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的叉积运算可表示为

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \tag{1-6}$$

其运算结果为一个新的矢量 $\boldsymbol{w}$，其大小为

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin\theta \tag{1-7}$$

方向为 $\boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{v}$，可通过右手螺旋法则来确定，如图 1-2 所示。

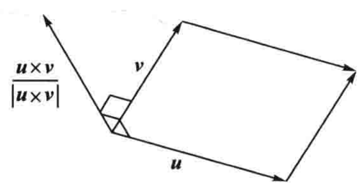

图 1-2　叉积运算的几何图示

由图 1-2 可知，两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间叉积的大小$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$表示由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 构成的平行四边形的面积，该面积当且仅当两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间线性无关时才不为零。关于两个矢量间线性相关或线性无关的含义可以简述如下：对两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，如果有两个不全为零的标量 α 和 β，使得 $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ 成立，则称矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 线性相关；否则，矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 线性无关。关于矢量间线性相关或线性无关的更多知识可参见相关文献，本节不作详细介绍。

3)混合积

三个矢量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 之间的混合积运算可表示为

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \tag{1-8}$$

通过前面讨论的矢量间的点积和叉积运算法则可知，三个矢量的混合积，即式(1-8)的最终结果是一个标量。该混合积的大小$|\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})|$实际上为由 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 三个矢量围成的平行六面体的体积，如图 1-3 所示。

如果该平行六面体的体积不为零，则表示 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 线性无关。与前类似，对三个矢量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，如果有不全为零的三个标量 a、b 和 c，使得 $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$

和 $\boldsymbol{w}$ 线性相关；不满足线性相关特性的矢量之间则是线性无关的。

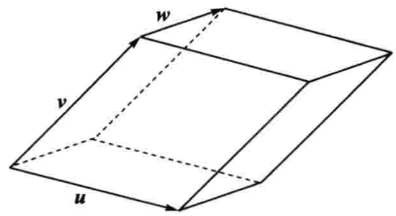

图 1-3　矢量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 混合积的几何意义

4. 矢量的性质

矢量相等的定义：

(1)若对于所有的矢量 $\boldsymbol{v}$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(2)若对于所有的矢量 $\boldsymbol{v}$，有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

矢量运算的基本定律：

(1)矢量的和满足交换律

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{1-9}$$

和结合律

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \tag{1-10}$$

(2)矢量的数乘满足分配律

$$(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}\quad(a,b\text{ 为实数}) \tag{1-11}$$

$$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v} \tag{1-12}$$

和结合律

$$a(b\boldsymbol{u})=ab\boldsymbol{u} \tag{1-13}$$

(3)矢量的点积满足交换律

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \tag{1-14}$$

和分配律

$$\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1-15}$$

由矢量点积的运算法则还可以引出正定性的定义，即如果 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0$，并且当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$，则称非零向量 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ 是正定的。另外，对于任意两个矢量，还满足如下所示的 **Schwarz 不等式**，即

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \tag{1-16}$$

(4)矢量的叉积满足分配律

$$\boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{v} \tag{1-17}$$

并且可定义三个矢量间的二重叉积为

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \tag{1-18}$$

(5)矢量的混合积满足 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$，并将其记为 $[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]$，则有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]&=[\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}\ \boldsymbol{u}]=[\boldsymbol{w}\ \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]=-[\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{w}]\\&=-[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{w}\ \boldsymbol{v}]=-[\boldsymbol{w}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u}]\end{aligned} \tag{1-19}$$

5. 求和约定及矢量的分量表示

1)笛卡儿坐标系(直角坐标系)

笛卡儿坐标系由一个原点和一组正向的正交基矢量$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$构成，基矢量之间满足

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}; \quad \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = \varepsilon_{ijk} \quad (i,j,k = 1,2,3)$$

其中，δ_{ij}为 Kronecker 函数，有

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1-20}$$

ε_{ijk}为置换符号(alternating symbol)函数，定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \{i,j,k\} = \{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{3,1,2\} \\ -1, & \{i,j,k\} = \{2,1,3\} = \{1,3,2\} = \{3,2,1\} \\ 0, & \text{(如果指标重复)} \end{cases} \tag{1-21}$$

注意：如果三个基矢量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$之间的混合积$\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) > 0$，则称基矢量$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是正向的。

2)Einstein 求和约定

在前面讨论的笛卡儿坐标系的三个正交基矢量以及与此相关的 Kronecker 函数和置换符号函数中都引入了取值为(1，2，3)的指标(i，j，k)。

Einstein 求和约定规定：在任意量中的两个相同指标都表示对该指标要进行(1，2，3)遍历求和。

例如，

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$$S_{ij} u_j = S_{i1} u_1 + S_{i2} u_2 + S_{i3} u_3$$
$$S_{ik} T_{kj} = S_{i1} T_{1j} + S_{i2} T_{2j} + S_{i3} T_{3j}$$

上述例子中两个相同的指标称为哑标(dummy index)，可以用任意两个相同的指标符号表示。例如，

$$S_{ij} u_j = S_{ik} u_k = S_{im} u_m$$

而式中的指标i则称为自由指标(free index)。

当然，在一些特定情形下，需要使用重复的指标来表示特定的含义，而不是表示遍历求和。在这种情形下，必须对此进行专门说明。例如，$u_i v_i$(对i不求和)这就表示即使两个指标相同，也不表示要对它们遍历求和。

3)矢量的分量表示

在笛卡儿坐标系下，基于正交基矢量$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，每一个矢量都可用它的分量形式来表示。例如，

$$\boldsymbol{u} = u_j \boldsymbol{e}_j \quad (j = 1,2,3) \tag{1-22}$$

其中，u_j称为$\boldsymbol{u}$关于笛卡儿坐标系基矢量$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$的分量。式(1-22)也可以写成

$$u_i = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3) \tag{1-23}$$

以此类推，也可将点$\boldsymbol{x}$的坐标写成

$$x_i = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}) \cdot \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3) \tag{1-24}$$

其中，点 $\boldsymbol{o}$ 表示坐标原点。利用矢量的分量表示，矢量运算可直接地表示为

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_i \boldsymbol{e}_i) \cdot v_j \boldsymbol{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \tag{1-25}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_j \boldsymbol{e}_j) \times v_k \boldsymbol{e}_k = u_j v_k \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \boldsymbol{e}_i \tag{1-26}$$

4)$\varepsilon - \delta$ 恒等式

关于 Kronecker 函数 δ 和置换符号函数 ε，可以证明具有如下恒等式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \tag{1-27a}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \tag{1-27b}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{1-27c}$$

1.1.2　矩阵运算

1. 矩阵的定义

如下表示的一组有序数组

$$[\boldsymbol{A}] = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1-28}$$

被称为矩阵(matrix)，用$[\boldsymbol{A}]$或$[A_{ij}]$表示，有时为了突出矩阵的行数和列数，也用$[\boldsymbol{A}]_{m\times n}$表示。其中，$i$ 表示矩阵的行，可取 $i=1, 2, \cdots, m$；j 表示矩阵的列，可取 $j=1, 2, \cdots, n$。如果 m 和 n 相等，则表示该矩阵为方阵，可称为 m(或 n)阶矩阵。

A_{ii}(对 i 不求和)表示矩阵的对角元素。如果一个矩阵$[\boldsymbol{A}]$只有对角元素 A_{ii} 不为零，则矩阵$[\boldsymbol{A}]$为对角阵。对角元素为 1 的对角阵称为单位矩阵$[\boldsymbol{I}]$。如果是 3 阶单位矩阵，则可写为

$$[\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-29}$$

对角阵$[\boldsymbol{A}]$是如下所示的一类矩阵，即

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的迹(trace of a matrix)：一个矩阵的对角元素之和，可称为矩阵的迹。

如果一个矩阵只有一列或者一行元素，则其元素可用一个下标表示，例如，

$$[\boldsymbol{X}] = [X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{Y}] = [Y_j] = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3]$$

其被称为是列阵或行阵，可用来表示矢量及其分量。