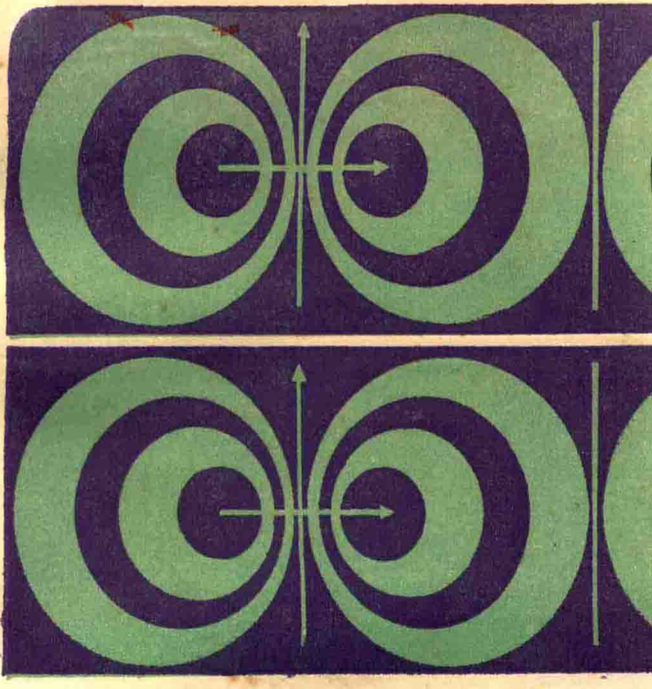
中学课程课外读物

北京市海淀区《中学课程课外读物》编写组

初一代数

自学解难（下）



重庆出版社　华夏出版社

中学课程课外读物

初一代数

自学解难（下）

北京市海淀区《中学课程
课外读物》编写组　编

重庆出版社　华夏出版社
一九八六年·重庆

责任编辑：赵　剑

初一代数自学解难（下）

重庆出版社、华夏出版社出版
新华书店重庆发行所发行　达县新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张　5.25　字数　113千
1986年12月第一版　1987年12月第一版第二次印刷
印数：1—200,000

*

ISBN 7-5366-0460-2

G·200

书号：7114·507　定价：0.77元

前　言

为了帮助具有中等文化水平的青年和广大自学读者更好地掌握中学课程内容和提高他们的文化科学知识水平，由部分教学经验比较丰富的中学教师和教学研究人员组成编写组，编写了这套《中学课程课外读物》，它包括语文、数学、外语、政治、历史、地理、物理、化学、生物各科。

课外读物应该有利于掌握中学课程内容和扩大知识面，编写时我们注意依据教学大纲，体现各学科自身的特点，突出重点，剖析难点，开拓视野，启迪思维，开发智力，培养能力；使这套书成为知识青年和自学中学课程的广大读者具有针对性、启发性、实用性的读物，成为家长督促和检查子女学习的助手，也可供教师备课参考。

本书共四讲，每讲包括四节：系统与结构、理解与思考、方法与能力、回味与引申。

系统与结构，是出于体现较先进的系统观点，有利于读者从整体上把握知识而设置的。

理解与思考，从强调理解出发着重对基础知识，特别是重点难点进行了较详细的讲述。同时，在学习方法方面引导读者重视独立思考。

方法与能力，一方面讲述了各种基本题型及其解题方法，另一方面通过对综合性较强的例题的剖析，加强了能力的培养，这一部分之后，配备了A、B两组练习题，供不同水平的读者选用。此外，还编拟了一份自测题并给出了答案，

以便于自学的读者自我检查。

回味与引申，这一部分将对学有余力的读者，在知识的深度、广度上给以引导，在思考方法上给以指点。

由于编者水平有限，书中定有疏漏和不足之处。欢迎读者批评指正。

本书编写者：

北京市知春里中学　王秋芳

北京市第二十中学　王淑兰

北京市铁道附中　姚印发

北京市海淀区教师进修学校　陈保民

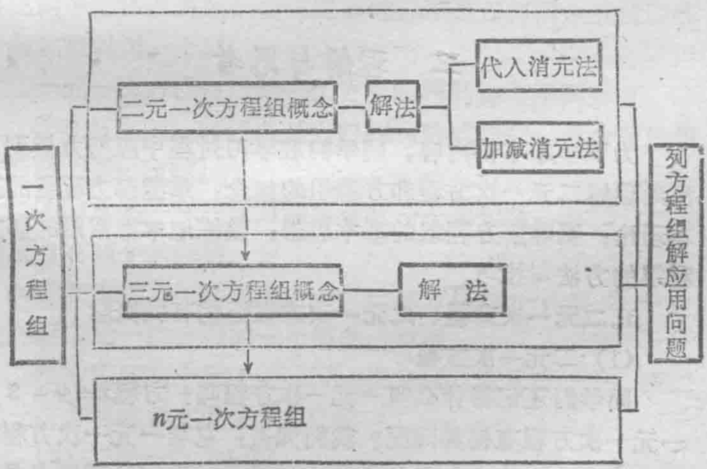
北京市海淀区《中学课程课外读物》编写组

目　录

第五讲　二元一次方程组

同学们在学习了一元一次方程以后，会感到用它解决一些实际问题要比算术解法方便多了。这一讲我们来研究二元一次方程和二元一次方程组。通过这一讲的学习，对我们解决实际问题会带来更大的方便，同时也为今后的学习打下基础。

一　系统与结构



二元一次方程、二元一次方程组的概念和解法是本讲的

重要内容。正确地理解二元一次方程、二元一次方程组的概念是学好二元一次方程组的前提，而灵活地掌握二元一次方程组的解法才是学习本讲知识的目的。

同学们在深刻理解和掌握二元一次方程组的概念与解法的基础上，对于三元一次方程组的概念与解法也就不难理解和掌握了。进而，对于多元一次方程组的概念和解法也就知道了。从知识结构图可以看出一次方程组的概念形成过程：

一元一次方程→二元一次方程组→三元一次方程组→……→n元一次方程组

通过后面的学习还能体会到一次方程组的解题过程是：

$$\underbrace{n\text{元一次方程组}\to\cdots\cdots\to\text{二元一次方程组}\to\text{一元一次方程}}_{\text{消元}}\underbrace{\to\text{二元一次方程组}\to\cdots\to n\text{元一次方程组}}_{\text{求解}}$$

二　理解与思考

为了学好本讲内容，同学们在学习过程中应努力做到：深刻理解二元一次方程和方程组的概念；掌握解方程组的基本理论；明确解方程组的基本思想，熟练地掌握常用的解方程组的方法与技巧。

1.二元一次方程、二元一次方程组的有关概念

(1) 二元一次方程

同学们还记得什么叫一元一次方程吗？方程$x+y=3$与一元一次方程有何异同呢？我们知道：它与一元一次方程的相同点是：含有未知数的项的次数都是一次的；不同点是：这个方程有两个未知数，而一元一次方程只有一个未知数。

我们把方程里含有两个未知数，并且含有未知数的项都是一次的方程叫做二元一次方程。例如$x+4y+5=0$是二元一次方程；而$xy+5x-y=0$，$\frac{2}{x}-y+1=0$均不是二元一次方程。

能够适合于一个二元一次方程的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解。这里所说的"一个解"是指"一对未知数的值，且满足于方程"。如$x=1$，$y=\frac{1}{2}$就是$3x+2y=4$的一个解。通常记作$\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$的形式。此外，还有无数对$x$，$y$的值能满足$3x+2y=4$，所以它有无数个解。

一般地：一个二元一次方程有无数个解。那么，是否任意两个数值凑在一起就是一个解呢？二元一次方程的一个解是由两个互相有关系的数值组成的，不是任何两个数值凑在一起就可以叫一个解。

一元一次方程与二元一次方程的相同点与不同点有：

①在概念上：相同点是它们均为整式方程，且含有未知数的项都是一次的。

不同点是一元一次方程只含有一个未知数；而二元一次方程含有两个未知数。

②在方程解的形式上：一元一次方程的一个解是一个数；而二元一次方程的一个解是一对数。

在方程解的个数上：一元一次方程的解只有一个；而二元一次方程的解有无数个。

(2) 二元一次方程组

把若干个一次方程并列在一起，我们就说这些方程组成

一个一次方程组。方程组中有几个未知数，就叫几元一次方程组。

由几个一次方程组成并含有两个未知数的方程组，叫做二元一次方程组。

定义中要求两条：①由几个（至少两个）一次方程组成；②在这个方程组中含有两个未知数，每个方程所含未知数可能是两个，也可能是一个。

如方程$4x-5y-1=0$ ① 与$2x+3y+5=0$ ② 所组成的方程组就是一个二元一次方程组．记作$\begin{cases}4x-5y-1=0,\\2x+3y+5=0.\end{cases}$这里“{”叫做联立符号，通过这个符号把方程①，②联系起来。再如$\begin{cases}x=3,\\y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=-6,\\y=-7\end{cases}$都是二元一次方程组，而$\begin{cases}x+y=3,\\x+z=4\end{cases}$就不是。因为方程组中含有三个未知数，它是一个三元一次方程组。

（3）二元一次方程组的解

方程组里各个方程的公共解，叫做这个方程组的解。例如$\begin{cases}x+y=5, & ①\\x-y=1. & ②\end{cases}$

满足方程$x+y=5$的解有$\begin{cases}x=1,\\y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}$……而$x-y=1$的解有$\begin{cases}x=1,\\y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}$……；它们都有无数个解，而同时满足方程①，②的公共解只有$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$此即是方程组的解。

求方程组的解的过程，叫做解方程组。

我们知道：一般地讲任何一个二元一次方程都有无数个解。方程组的解集是方程组里各个方程的解集的公共部分。这就产生一个问题：它们的解集有没有公共部分。对这个问题我们将在后面专门讨论。

思考题

1．“由两个二元一次方程所组成的方程组叫做二元一次方程组”．它可以作为定义吗？它与定义有什么差别？它与定义有什么关系？

2．根据方程组解的意义，二元一次方程组都有解吗？会有哪几种情况？

2．二元一次方程组的解法

（1）用代入消元法解二元一次方程组

〔例1〕 解方程组 $\begin{cases} x+3y=8, & ① \\ x=5y. & ② \end{cases}$

分析：因为方程组中相同的未知数代表相同的数，所以在解方程组时可以用与一个未知数相等的代数式去代替另一个方程中的这一个未知数。这样就可以转化为一元一次方程求解了。既然方程②里$x=5y$，就可以把方程①里的未知数x用$5y$来代替。通俗地讲是：挖去方程①里的x，换上与x相等的式子$5y$，这就是代入消元法的解题思路。我们可以简单地记住“挖了换”的口诀，也就把代入消元法的运算过程记住了。

本题的解题格式是：

解：把②代入①，得$5y+3y=8$，即$8y=8$，

$\therefore y=1$。

把$y=1$代入②，得$x=5$。

$\therefore \begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$

检验：把$x=5$，$y=1$代入方程①，得左$=8=$右，再

代入方程②，得左＝5＝右。

$\therefore \begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ 是原方程组的解。

（检验可用口算，不必写出）

［例2］ 解方程组 $\begin{cases} x+3y=3, & ① \\ 3x+5y=1. & ② \end{cases}$

由①，用含有y的代数式表示x，得$x=3-3y$， ③

以③代②中的x，$3(3-3y)+5y=1$ ④

解④，得$y=2$。 ⑤

在③中，以2代y，得$x=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-3, \\ y=2 \end{cases}$ 是方程组的解。

应该看到：代入消元法的目的是消元，把方程组转化成一元一次方程；解题时，选取系数较简单的未知数为消元对象，一般较简便。

（2）用加减消元法解二元一次方程组

［例3］ 解方程组 $\begin{cases} x+y=8, & ① \\ x-y=2. & ② \end{cases}$

分析：这个方程组可以用代入法解。但根据方程组的特点，x的系数都是1，且y的系数互为相反数。如果把方程①，②相加，就能消去y；如果把方程①，②相减，就能消去x。

将两个方程经过变形整理，使要消去的未知数的系数绝对值相等，然后把方程组的两个方程经过加减运算，达到消元的目的，这就是加减消元法的基本思想。 （解略）

［例4］ 解方程组 $\begin{cases} x+5y=6, & ① \\ 3x-6y=4. & ② \end{cases}$

分析：在方程①，②里，同一个未知数的系数的绝对值

都不相等，如果直接采用加减消元法，不能消去任何一个未知数。为了创造使用加减消元法的条件，把方程①两边乘以3，使方程组里x的系数相等，然后再把所得方程③减去方程②，未知数x就被消掉了。

解：①×3，得$3x+15y=18$，③

③－②，得$21y=14$

$\therefore y=\frac{2}{3}$

把$y=\frac{2}{3}$代入①，得$x+\frac{10}{3}=6$。

$\therefore x=\frac{8}{3}$。

$$\therefore \begin{cases} x=\frac{8}{3}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

应该看到：加减消元法的目的仍是消元，转化为一元一次方程求解。用加减消元法解题的前提是创造条件使方程组里同一未知数系数的绝对值相等。

（3）三元一次方程组及其解法

由几个一次方程组成并含有三个未知数的方程组，我们称作三元一次方程组。

三元一次方程组的解法，同样是采用消元，将三元一次方程组转化为二元一次方程组求解：

〔例5〕 解方程组$\begin{cases} x+y+z=6, & ① \\ 3x+2y+z=10, & ② \\ 2x+3y-z=5. & ③ \end{cases}$

解：①＋③，得$3x+4y=11$　　④

②+③，得$5x+5y=15$，即$x+y=3$。 ⑤

解由方程④，⑤组成的二元一次方程组$\begin{cases}3x+4y=11, \\ x+y=3\end{cases}$。

得$\begin{cases}x=1, \\ y=2.\end{cases}$ 把$x=1$，$y=2$代入①，得$z=3$。

$$\therefore \begin{cases}x=1, \\ y=2, \\ z=3.\end{cases}$$

说明：解三元一次方程组同解二元一次方程组类似，消元时选择系数较简单的未知数为好。

（4）解一次方程组的基本思想是消元

解方程组的关键在于消元，通过消去未知数，把多元的方程组转变成一元的方程求解。因此，我们在牢固掌握前面两种基本方法的基础上，还要不断提高消元的技巧。

我们看下面这个八元一次方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6, & ① \\ x_2+x_3+x_4=9, & ② \\ x_3+x_4+x_5=3, & ③ \\ x_4+x_5+x_6=-3, & ④ \\ x_5+x_6+x_7=-9, & ⑤ \\ x_6+x_7+x_8=-6, & ⑥ \\ x_7+x_8+x_1=-2, & ⑦ \\ x_8+x_1+x_2=2. & ⑧\end{cases}$$

乍一看，这个含有八个未知数的方程组消元无从下手。仔细分析，竖着看每一列都由x_1到x_8组成。把方程从①到⑧加起来，得：

$3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)=0$，

即：$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=0$，$(a)$

再将方程①，④，⑦相加，得：

$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)+x_1=1$。$(b)$

$(b)-(a)$得，$x_1=1$。

再将方程②，⑤，⑧相加，得，

$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)+x_2=2$。

$\therefore x_2=2$。

把$x_1=1$，$x_2=2$代入①，得$x_3=3$。

用类似的办法，很快就可求得x_4，……，x_8的值。

通过这个例子，同学们会体会到：熟练掌握常用的消元方法和技巧是非常必要的。

思考题

1.通过解题，你能用等量代换、等量加等量和等量减等量解释代入法与加减消元法吗？

2.下列各方程组，采用哪种方法比较简便，并总结其特征：

(1) $\begin{cases}x+y=5,\\x=4\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x-2y=4,\\x=6y\end{cases}$；　(3) $\begin{cases}x-y=2,\\x+y=6;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=4y,\\y=\dfrac{1}{2}x-3;\end{cases}$　(5) $\begin{cases}x+5y=17,\\4x-3y=1;\end{cases}$　(6) $\begin{cases}5x+3y=18\\2x-3y=13\end{cases}$

3.列方程组解应用题

在我国古代算术中，有一个保留至今的鸡兔同笼问题：一个笼中装有若干只鸡，若干只兔子。它们共有8个头，22只脚。问鸡和兔子各有几只？

同学们先用算术方法看怎样解。

我们若用一元一次方程来解，可设兔子有x只，则鸡有$(8-x)$只，可列出方程：$4x+2(8-x)=22$。

再用列方程组来解，设有x只兔子，y只鸡，依题意有

$$\begin{cases}x+y=8,\\4x+2y=22.\end{cases}$$

通过三种解法的比较，同学们会感到：用一元一次方程