丛书主编／王后雄

考点

同步解读

高中数学 选修 2-3

本册主编／马春华

考点分类精讲 方法视窗导引

Kaodian
Tongbu Jiedu

误区盲点预警 题型优化测训

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步考点”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

新课标
Xinkebiao
華中師範大學出版社
Huazhong Normal University Press

Kao dian
Tongbu Jiedu

丛书主编/王后雄

考点

同步解读

高中数学 选修 2－3

本册主编/马春华

随书赠送 5 套试卷

新课标 Xinkebiao

华中师范大学出版社
Huazhong Normal University Press

新出图证(鄂)字 10 号
图书在版编目(CIP)数据
考点同步解读　高中数学　选修 2-3 / 丛书主编:王后雄　本册主编:马春华
—武汉:华中师范大学出版社,2011.6
ISBN 978-7-5622-4931-3
Ⅰ.①考…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.①G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 079766 号

考点同步解读　高中数学　选修 2-3

丛书主编:王后雄　本册主编:马春华
责任编辑:胡小雪　涂　庆　责任校对:万春春　封面设计:甘　英
选题设计:华大鸿图编辑室(027－67867361)
出版发行:华中师范大学出版社©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
销售电话:027－67867371　027－67865356　027－67867076
传真:027－67865347　邮购:027－67861321
网址:http://www.ccnupress.com　电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北省鄂南新华印刷包装有限公司　督印:章光琼
字数:265 千字
开本:889mm×1194mm　1/16　印张:10
版次:2011 年 6 月第 1 版　印次:2011 年 6 月第 1 次印刷
定价:21.80 元

欢迎上网查询、购书

《考点同步解读》使用图解

考点解读

呈现新课标内容要素，锁定不同版本教材要求，指明学习和考试的具体考点及目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法的指导，揭示学习的重点和难点，探讨考试命题的规律。

考点精讲

考点分类，核心总结，重点难点各个击破，典例创新导引，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析，深入变式训练。

超级链接

最佳导学模式，学案式名师点津。难点突破、防错档案、规律清单革新传统学习模式。

第一章　计数原理

1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

考点解读

1.(★★★)掌握分类加法计数原理并能用它分析和解决一些简单的应用问题.(2006,全国高考题)

2.(★★★)掌握分步乘法计数原理,并能用它分析和解决一些简单的应用问题.(2010,湖北高考题)

学法导引

学习本讲内容时,应通过具体实例,并根据问题特征,正确选择用分类加法计数原理还是分步乘法计数原理.因此,准确理解两个原理的实质是关键:"分类"表现为其中任何一类均可独立完成所给事情;"分步"必须

考点分类精讲

考点1　分类加法计数原理及应用

核心总结

1.分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案,在第1类方案中有m种不同的方法,在第2类方案中有n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.

2.分类加法计数原理的推广

◎考题1　如图1-1-1,小圆圈表示网络的结点,结点之间的连线表示它们的网线相联,连线标注的数字,表示该网线单位时间内可以通过的最大信息量.现从结点A向结点B传递信息,信息可以分开沿不同的路线同时传递,则单位时间内传递的最大信息量为多少?

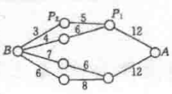


图1-1-1

【解析】由图知从A到B的传递路线有4条.欲求传递的最大信息量之和,即求每条线路的最大信息量之和,也就是求每条线路的最大负荷量.在线路AP_1P_3B中,最大负荷量为3,不是5也不是12,否则在通过P_3B时超载,因此每条线路的容量为各线路中每段最大信息量的最小值,则各线路传递最大信息量依次为3,4,6,6.由分类加法计数原理可知单位时间内传递的最大信息量为$3+4+6+6=19$.

【变式1-1】f是集合$M=\{a,b,c,d\}$到$N=\{0,1,2\}$的映射,且$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=4$,则不同的映射有多少个?

注解·参考

对于分类计数原理,要注意以下三点:

(1)清楚怎样才是完成"一件事"的含义,即知道做"一件事",或完成一个"事件"

梳理·归纳

1.明确"完成一件事"的含义,如书架上、中、下三层各放语、数、外课本a,b,c本,某人从中取出一本有多少种取法的问题,"完成一件事"是指"从书架中取出一本书".

题型·方法

分类计数原理的实际应用,首先要考虑题目中未知量的条件和取值范围.如考题2中,x,y的取值均为正整数,且$3\leqslant x\leqslant 6$.除

误区·盲点

易错点

在考题11(3)中,容易出现的错误是:不会分类或者分类情况遗漏.

防错良方

增强分类意识,在解题过程中,应做到

题型优化测训

学业水平测试

1.[考点1]一个学生从3本不同的科技书、4本不同的文艺书、5本不同的外语书中任选一本阅读,不同的选法有(　　).

A.60种　B.17种　C.12种　D.5种

2.[考点2]一个乒乓球队里有男队员5人,女队员4人,从中选出男、女队员各一人组成混合双打,共有不同的选法种数为(　　).

高考水平测试

一、选择题

1.[考点4]将5封信投入3个邮筒,不同的投法共有(　　).

A.5^3种　B.3^5种　C.3种　D.15种

2.[考点1]若集合A_1,A_2满足$A_1\cup A_2=A$,则记$[A_1,A_2]$是A的一组双子集拆分.规定:$[A_1,A_2]$和$[A_2,A_1]$是A的同一组双子集拆分.已知集合$A=\{1,2,3\}$,那么A的不同双子集

优化测训

立足教材，夯实基础，习题层级清晰，与同步考试接轨，查漏补缺。

高考真题赏析

1.(2009,全国高考题)甲、乙两人从4门课程中各选修2门,则甲、乙所选的课程中恰有1门相同的选法有(　　).

A.6种　B.12种　C.24种　D.30种

【解析】分步完成.首先甲、乙两人从4门课程中同选1门,有4种方法;其次由甲从剩下的3门课程中任选1门,有3种方法;最后乙从剩下的2门课程中任选1门,有2种方法.于是,甲、乙所选的课程中恰有1门相同的选法共有$4\times3\times2=24$种.故选C.

【答案】C

2.(2006,福建高考题)从6人中选4人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览,要求每个城市有一人游览,每人只游览一个城市,且这6人中甲、乙2人不去巴黎游览,则不同的选择方案共有(　　).

A.300种　B.240种　C.144种　D.96种

【解析】能去巴黎的有4个人,依次去伦敦、悉尼、莫斯科的有5个人,4个人,3个人,故不同的选择方案有$4\times5\times4\times3=240$种.故选B.

【答案】B

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

真题赏析

精选高考名题，再现考点真题，讲解精准干炼，体验真题魅力，感悟高考真谛。

参考答案与提示

第一章　计数原理

1.1　分类计数原理与分步计数原理

【变式训练】

[变式1-1]　根据a,b,c,d对应的象中2的个数来分类,可分为三类:

第一类,没有元素的象为2,因为$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=4$,所以象都是1,这样的映射只有一个.

第二类,一个元素的象为2,其余三个元素的象必为0,1,1,这样的映射有$4\times3\times1=12$(个).

第三类,两个元素的象为2,其余两个元素的象必都为0,这样的映射

【学业水平测试】

1.C　[提示:分类计数原理:$3+4+5=12$.故选C.]

2.B　[提示:分步计数原理:$5\times4=20$.故选B.]

3.B　[提示:甲地到丙地分两类.一类是直接由甲地到丙地,第二类是甲地到丙地分两步,先到乙地,再由乙地到丙地,所以不同走法种数为$3+2\times4=11$.故选B.]

【高考水平测试】

1.B　[提示:第1封信,可以投入第1个邮筒里,可以投入第2个邮筒里,也可以投入第3个邮筒里,共有3种投法;同理,后面的4封信也都各有3种投法.所以,5封信投入3个邮筒,不同的投法共有3^5种.故选B.]

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

考点同步解读　高中数学　选修 2-3

目 录 CONTENTS

第一章　计数原理

1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

考点解读

1.(★★★)掌握分类加法计数原理并能用它分析和解决一些简单的应用问题.(2006,全国高考题)

2.(★★★)掌握分步乘法计数原理,并能用它分析和解决一些简单的应用问题.(2010,湖北高考题)

3.(★★★★)能联合运用两个原理分析和解决一些简单的应用问题.(2009,浙江高考题)

学法导引

学习本讲内容时,应通过具体实例,并根据问题特征,正确选择用分类加法计数原理还是分步乘法计数原理.因此,准确理解两个原理的实质是关键:"分类"表现为其中任何一类均可独立完成所给事情;"分步骤"必须把各步骤均完成才能完成所给事情.

考点分类精讲

考点1　分类加法计数原理及应用

核心总结

1.分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案,在第1类方案中有 m 种不同的方法,在第2类方案中有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

2.分类加法计数原理的推广

完成一件事有 n 类不同方案,在第1类方案中有 m_1 种不同的方法,在第2类方案中有 m_2 种不同的方法,…,在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

3.分类加法计数原理的特点

分类加法计数原理可简称为分类计数原理或加法原理.其特点是各类中的每一个方法都可以完成要做的事情.

考题1　如图1-1-1,小圆圈表示网络的结点,结点之间的连线表示它们的网线相联,连线标注的数字,表示该网线单位时间内可以通过的最大信息量.现从结点 A 向结点 B 传递信息,信息可以分开沿不同的路线同时传递,则单位时间内传递的最大信息量为多少?

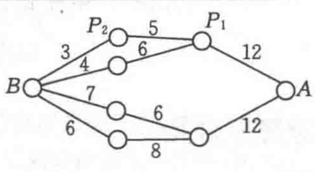


图1-1-1

【解析】　由图知从 A 到 B 的传递路线有4条.欲求传递的最大信息量之和,即求每条线路的最大信息量之和,也就是求每条线路的最大负荷量.在线路 AP_1P_2B 中,最大负荷量为3,不是5也不是12,否则在通过 P_2B 时超载,因此每条线路的容量为各线路中每段最大信息量的最小值,则各线路传递最大信息量依次为3,4,6,6.由分类加法计数原理可知单位时间内传递的最大信息量为 $3+4+6+6=19$.

注解·参考

对于分类计数原理,要注意以下三点:

(1)清楚怎样才是完成"一件事"的含义,即知道做"一件事",或完成一个"事件"在每个问题中具体所指;

(2)解决"分类"问题用分类加法计数原理,需要分类的事件不妨叫做"独立事件",即完成事件通过方法 A,不必再通过方法 B 就可以单独完成,每类方法都可完成这件事.注意各类方法之间的独立性和并列性,否则,不独立会出现重复,不并列会出现遗漏;

(3)在每个问题中,标准不同,分类也不同.分类的基本要求是,每一种方法必属于某一类(不遗漏),任意不同类的两种方法是不同的方法(不重复).

梳理·归纳

1.明确"完成一件事"的含义,如书架上、中、下三层各放语、数、外课本 a,b,c 本,某人从中取出一本有多少种取法的问题,"完成一件事"是指"从书架中取出一本书".这本书既可以从上层取,也可以从中层取,还可以从下层取.因而它是一个分类问题,用分类加法计数原理即可求解.因此,对于

【变式 1-1】 f 是集合 $M=\{a,b,c,d\}$ 到 $N=\{0,1,2\}$ 的映射，且 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=4$，则不同的映射有多少个？

考题 2 某生为自己的电脑购置不超过 500 元的配套费用分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘. 根据需要，软件至少买 3 片，磁盘至少买 2 盒，则不同的选购方式有多少种？

【解析】 设购买单片软件 x 件，盒装磁盘 y 盒，则依题意有

$60x+70y\leqslant 500(x,y\in \mathbf{N}^*$ 且 $x\geqslant 3,y\geqslant 2)$

按购买单片软件的情况分类：

$x=3$，则 $y=2,3,4$，共 3 种方法；

$x=4$，则 $y=2,3$，共 2 种方法；

$x=5$，则 $y=2$，共 1 种方法；

$x=6$，则 $y=2$，共 1 种方法.

依据分类加法计数原理，不同的选购方式有 $N=3+2+1+1=7$(种).

【变式 1-2】 某赛季足球比赛的计分规则是：胜一场，得 3 分；平一场，得 1 分；负一场，得 0 分. 一球队打完 15 场，积 33 分，若不考虑顺序，该队胜、负、平的情况共有(　　).

A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种

【变式 1-3】 若 $x,y\in \mathbf{N}^*$，且 $x+y\leqslant 6$，试求有序自然数对 (x,y) 的个数.

考点 2　分步乘法计数原理及应用

核心总结

1. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m 种不同的方法，做第 2 步有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理的推广

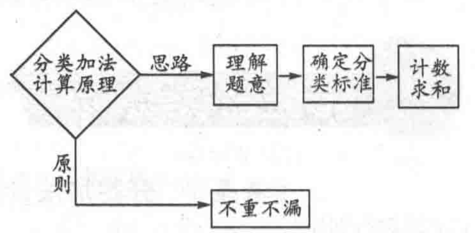
完成一件事需要 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

具体题目，我们应该仔细审题，弄清题目中的“完成一件事”的具体所指，只有这样才能确定该用什么原理来解题.

2. 对于有些问题，如何分类，题目中已经明确告诉我们了，在解题时，我们只要透彻地理解题意即可. 如上例中，书架中有三类不同的书，可根据题意分类.

3. 加深对“完成一件事情，有 n 类不同方案”的理解. 所谓“完成一件事情，有 n 类不同方案”，就是指对完成这件事情的所有方案的一个分类. 首先，分类时要根据问题的特点确定一个适合它的分类标准，然后在这个标准下进行分类；其次，分类时要注意满足一些基本条件：完成这件事情的任何一种方法必须属于某一类，并且属于不同两类的两种方法是不同的方法. 只有满足这些条件，才可以用分类加法计数原理.

4. 利用分类加法计数原理解题的步骤和原则：



题型·方法

分类计数原理的实际应用，首先要考虑题目中未知量的条件和取值范围. 如考题 2 中，x,y 的取值均为正整数，且 $3\leqslant x\leqslant 6$. 除此之外，如变式 1-3 中同时要注意 (x,y) 是有序数对，如 $(1,2)$ 与 $(2,1)$ 是不同的数对，故可按 x 或 y 的取值进行分类解决. 计数的关键是抓住完成一件事是分类还是分步，一个类别内是否又要分成几个步骤，一个步骤是否又会分若干类.

3. 分步乘法计数原理的特点

分步乘法计数原理可简称为分步计数原理或乘法原理. 其特点是每一步中都要使用一个方法才能完成该步要做的事情. 可以用下图表示分步乘法计数原理，图中的"➡"强调要依次完成各步骤才能完成要做的事情.

第一步有 m_1 种方法 ➡ 第二步有 m_2 种方法 ➡……➡ 第 n 步有 m_n 种方法

考题 3 书架的第一层放有 6 本不同的数学书，第二层放有 6 本不同的语文书，第三层放有 5 本不同的英语书.

(1)从这些书中任取一本数学、一本语文和一本英语共三本书的不同取法有多少种？

(2)从这些书中任取三本，并且在书架上按次序排好，有多少种不同的排法？

【解析】 (1)完成这个工作可分三个步骤：

第 1 步，从 6 本不同的数学书中，任取一本，有 6 种取法；

第 2 步，从 6 本不同的语文书中，任取一本，有 6 种取法；

第 3 步，从 5 本不同的英语书中，任取一本，有 5 种取法.

根据分步乘法计数原理，共有 $6\times6\times5=180$ 种不同的取法.

(2)本题实际上是从 17 本书中任取三本放在三个不同位置.

完成这个工作分三个步骤：

第 1 步，从 17 本书中任取一本放在第一个位置上，共有 17 种不同的方法；

第 2 步，从 16 本书中任取一本放在第二个位置上，共有 16 种不同的方法；

第 3 步，从 15 本书中任取一本放在第三个位置上，共有 15 种不同的方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $17\times16\times15=4080$ 种不同的排法.

【变式 2-1】 设某班有男生 30 名，女生 24 名，现要从中选出男、女生各一名代表班级参加比赛，共有多少种不同的选法？

考题 4 在由开关组 A、B 组成的串联电路中，如图 1-1-2 所示，只合上两个开关以接通电路电源，使电灯发光的方法有几种？

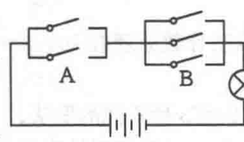


图 1-1-2

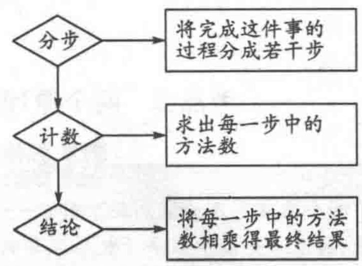
【解析】 只有在合上 A 组两个开关中的任意 1 个之后，再合上 B 组 3 个开关中的任意 1 个，才能使电灯的电源接通，电灯才能发光.

根据分步乘法计数原理，共有 $2\times3=6$ 种不同的方法接通电源，使电灯发光.

【变式 2-2】 若某人由广州到北京出差，但途中必须到武汉办一件事，而由广州到武汉共有 12 条理想路线(包括坐汽车、火车、飞机，以及不同的路线)，由武汉到北京共有 18 条理想路线，则此人由广州到北京共有多少条不同的理想路线？

题型·方法

1. 利用分步乘法计数原理解题的一般思路：



2. 应用分步乘法计数原理解题要注意以下三点：

(1)明确题目中所指的"完成一件事"是什么事，单独用题目中所给的某种方法是不是不能完成这件事，也就是说必须要经过 n 步才能完成这件事；

(2)完成这件事需要分成若干个步骤，只有每个步骤都完成了，才算完成这件事，缺少任何一步，这件事都不可能完成；

(3)根据题意正确分步，要求各步之间必须连续，只有按照这 n 步逐步地去做，才能完成这件事，各步骤之间既不能重复也不能遗漏.

3. 分步就是做完每个步骤中的某种方法，并不能完成整个事件，而只有当它依次完成所有步骤时，才能完成整个事件. 有时在具体问题中就明确地告诉或暗示出完成这个事件的步骤，解答这类问题时，需要认真审题，透彻理解题意.

4. 对于有些分步乘法计数原理的应用问题，需要我们自己确定一个分步的步骤，然后依照步骤进行操作. 如考题 4.

5. 对于变式 2-3，正确理解映射与函数的概念是解决本题的关键. 利用分步计数原理计数的一般思路：首先将完成这件事的过程分步，然后再找出每一步中的方法有多少种，求其积. 注意各步之间相互联系，都完成后，才能完成这件事.

【变式 2-3】 集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$.

(1)从集合 A 到集合 B 可以建立多少个不同的映射？

(2)从集合 A 到集合 B 的映射中，若要求集合 A 中的元素对应的集合 B 中的元素不同，这样的映射有多少个？

考点 3 两个原理的区别及综合应用

核心总结

两个基本原理的区别在于前者——分类加法计数原理每次得到的是最后结果；后者——分步乘法计数原理每次得到的是中间结果. 表解如下：

	加法原理	乘法原理
区别一	完成一件事，共有 n 类方法，关键词是“分类”	完成一件事，共分 n 个步骤，关键词是“分步”
区别二	每类方法都能独立地完成这件事，它是独立的、一次的且每次得到的是最后结果，只需一种方法就可完成这件事	每一步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成这件事，缺少任何一步也不能完成这件事，只有各个步骤都完成了，才能完成这件事
区别三	各类方法之间是互斥的、并列的、独立的	各步之间是关联的、独立的，“关联”确保不遗漏，“独立”确保不重复

考题 5 有 10 本不同的数学书，9 本不同的语文书，8 本不同的英语书，从中任取两本不同类的书，共有______种不同的取法.

【解析】 任取两本不同类的书，有三类：一是取数学、语文各一本，二是取语文、英语各一本，三是取数学、英语各一本. 然后求出每类取法，利用分类加法计数原理即可得解.

取两本书中，一本数学、一本语文，根据分步乘法计数原理有 $10\times9=90$ 种不同的取法；

取两本书中，一本语文、一本英语，同理有 $9\times8=72$ 种不同的取法；

取两本书中，一本数学、一本英语，同理有 $10\times8=80$ 种不同的取法.

综合以上三类，利用分类加法计数原理，共有 $90+72+80=242$ 种不同的取法. 故填 242.

考题 6 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法总数是多少？

【解析】 如图 1-1-3 所示，设五种颜色分别为 1，2，3，4，5. 由题设四棱锥 S-$ABCD$ 的顶点 S,A,B 所染色互不相同，它们共有 $5\times4\times3=60$ 种染色方法. 当 S,A,B 已染色时，不妨设其颜色分别为 1，2，3，则 C 可染颜色 2，4，5. 若 C 染颜色 2，则 D 可染颜色 3，4，5 中任一种，有 3 种染色方法；若 C 染颜色 4，则 D 可染颜色 3 或 5，有 2 种染色方法；若 C 染颜色 5，则 D 可染颜色 3 或 4，也有 2 种染色方法. 可见，当 S,A,B

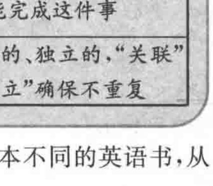


图 1-1-3

题型·方法

1. 用两个计数原理解决计数问题时，最重要的是在开始计算之前要进行仔细分析——需要分类还是需要分步.

2. 分类要做到“不重不漏”. 分类后再分别对每一类进行计数，最后用分类加法计数原理求和，得到总数. 如考题 5.

3. 分步要做到“步骤完整”——完成了所有步骤，恰好完成任务，当然需要步与步之间的连续性和独立性. 分步后再计算每一步的方法数，最后根据分步乘法计数原理，把完成每一步的方法数相乘，得到总数.

4. 对于有些计数问题的解决，对它们既需要进行“分类”，又需要进行“分步”，那么此时就要注意综合运用两个原理来解决问题. 解决这类问题，首先要明确是先“分类”后“分步”，还是先“分步”后“分类”；其次，在“分类”和“分步”的过程中，均要明确分类标准和分步程序.

5. 有些题目对如何分步，并没有具体给出，其分步方法需要我们自己来确定. 解答

已染色时，C 与 D 还有 $3+2+2=7$ 种染色方法. 从而，染色方法总数为 $60\times7=420$.

【变式 3-1】 如图 1-1-4，用 5 种不同的颜料给 4 块区域 A、B、C、D 涂色，要求共边两块颜色互异，求有多少种不同的涂色方法.

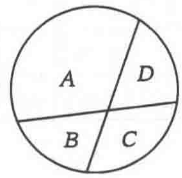


图 1-1-4

◎考题 7 一个袋子里装有 10 张不同的中国移动手机卡，另一个袋子里装有 12 张不同的中国联通手机卡.

(1)某人要从两个袋子中任取一张自己使用的手机卡，共有多少种不同的取法？

(2)某人手机是双卡双待机，想得到一张移动卡和一张联通卡供自己使用，问一共有多少种不同的取法？

【解析】 (1)从两个袋子中任取一张卡有两类情况：

第 1 类，从第一个袋子中取一张移动手机卡，共有 10 种取法；

第 2 类，从第二个袋子中取一张联通手机卡，共有 12 种取法.

根据分类加法计数原理，共有 $10+12=22$ 种不同的取法.

(2)想得到一张移动卡和一张联通卡可分两步进行：

第 1 步，从第一个袋子中任取一张移动手机卡，共有 10 种取法；

第 2 步，从第二个袋子中任取一张联通手机卡，共有 12 种取法.

根据分步乘法计数原理，共有 $10\times12=120$ 种不同的取法.

【变式 3-2】 只用 1，2，3 三个数字组成一个四位数，并规定这三个数必须同时使用，且同一数字不能相邻出现，这样的四位数有多少个？

考点 4 两个原理应用中的典型问题与方法

核 心 总 结

两个原理的应用背景非常复杂，情景有时非常陌生，需要灵活运用两个原理的本质特征，结合一些典型的方法和模型来处理.

◎考题 8 4 个人各写一张贺年卡，放在一起，然后每个人取一张不是自己写的贺年卡，共有多少种不同的取法？

【解析】 显然这个问题难用两个原理列式计算，但可以把各种方法一一列举出来，最后再数出方法种数.

把 4 个人编号为一、二、三、四，他们写出的 4 张贺年卡依次为 1，2，3，4 号，则取不是自己写的贺年卡的各种方法全部列举出来为：

这类问题时，需要在透彻理解题意的基础上来确定分步方法，同时还要善于抓住问题的主要矛盾，并建立相应的模型来解决问题. 如在考题 6 中，由题意知任意三点间的颜色互不相同(这是问题的主要矛盾)，因此我们不妨先给其中三点 S，A，B 染色(作为第一步)，再给 C，D 染色. 在给 C，D 染色时，不妨假设 S，A，B 三点依次染色为 1，2，3，则 C 可供染色的颜色只有 2，4，5，于是 C，D 的染色就能顺理成章地进行.

四个人	各种取贺年卡的方法								
一	2	2	2	3	3	3	4	4	4
二	1	3	4	1	4	4	1	3	3
三	4	4	1	4	1	2	2	1	2
四	3	1	3	2	2	1	3	2	1
方法编号	法1	法2	法3	法4	法5	法6	法7	法8	法9

共有9种不同的取法.

考题9 将3种作物种植在如图1-1-6所示的5块实验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一种作物，不同的种植方法共有______种(以数字作答).

图1-1-6

【解析】 分别用a,b,c代表3种作物，先安排第一块田，有3种方法，不妨设种植a，再安排第二块田，有2种种植方法b或c. 不妨设种植b，第三块田也有2种方法a或c.

(1)若第三块田种植c：$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\square\square$，第四、五块田分别有2种方法，共$2\times2$种方法.

(2)若第三块田种植a：$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{a}\square\square$，第四块田能种植$b$或$c$，共2种方法.

①若第四块田种植c：$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{a}\boxed{c}\square$，第五块田仍有2种种植方法.

②若第四块田种植b：$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{a}\boxed{b}\square$，第五块田只能种植$c$，共1种方法.

综上，共有$3\times2\times(2\times2+3)=42$种方法.

【变式4-1】 由0,1,2,3,4,5,6这七个数字可以组成多少个无重复数字的四位偶数?

考题10 3个人要坐在一排8个空座位上，若每个人左右都有空座位，不同的坐法有多少种?

【解析】 3个人在一排8个空座位上坐下后，只剩下5个空座位，我们可以构造这样的解题过程，依次将3个人连同他的座位逐个地插入5个空座位形成的空座位当中去. 由于每人左右都要有空位子，因此将第一个人连同他的座位插入时，不能插在两边，所以有4种插入方法[如图1-1-7中的(1)到(2)]；然后将第二个人连同他的座位插入时，只有3种插入方法[如图1-1-7中的(2)到(3)]；最后将第三个人连同他的座位插入时，只有2种插入方法[如图1-1-7中的(3)到(4)]. 这时，再根据分步乘法计数原理，可以得到不同的坐法共有$4\times3\times2=24$种.

(1)○○○○○　　(3)○○□○○□○

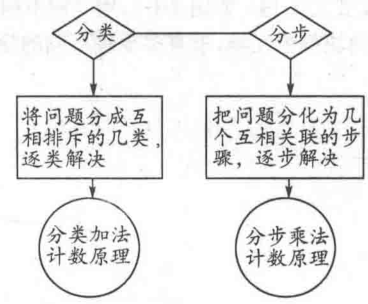
(2)○○□○○○　　(4)○□○□○○□○

○表示没有坐人的空位　□表示已经坐人的位置

图1-1-7

题型·方法

1. 使用两个原理解题的本质



2. 常见的典型问题及处理方法

(1)组数问题的处理

①对于组数问题，一般按特殊位置(通常是末位和首位)由谁占领分类，分类中再按特殊位置(或者特殊元素)优先的方法分步完成；如果正面分类较多，可采用间接法从反面求解.

②解决组数问题，应特别注意其限制条件，有些条件是隐藏的，要善于挖掘. 排数时，要注意特殊元素、特殊位置优先的原则.

(2)涂色问题的处理

涂色问题是考查计数方法的一种常见问题，由于这类问题常常涉及分类与分步，所以在高考题中经常出现. 处理这类问题的关键是找准分类标准，在分步涂色时，要兼顾题目条件.

3. 常用的典型方法

(1)列举数数法：列举数数法就是指完成一件事的方法不是很多，可以一一列举出来，然后再一种一种地数数，进而确定完成这件事共有多少种方法. 有些列式困难、数目较少的问题都可用此法. 如考题8.

尽管列举数数法解决的是方法数不是很多的问题，但是通过列举数数法，能够探求出规律，列出解决问题的式子. 两个原理的推导实质就是用列举数数法得以求解，进而总结出两个原理的计数公式；下一节中排列的计数公式也是用列举数数法推导并总结出来的. 列举数数法是一种解决问题的基本方法，当问题的数目不是很大时，都可用此方法解决.

(2)字典排序法：字典排序法就是把所有的字母分为前后，先排前面的字母，前面的字母排完后再依次排后面的字母，最后的字母排完，则排列结束.

利用字典排序法并结合分步乘法计数原理可以解决与排列顺序有关的计数问题，利用字典排序法还可以把这些排列不重不漏地一一列举出来.

【变式 4-2】 用 1,2,3,4 四个数字排成三位数,并把这些三位数由小到大排成一个数列$\{a_n\}$.

(1)写出这个数列的前 11 项;

(2)这个数列共有多少项?

(3)若 $a_n=341$,求 n.

考题 11 (2010,海淀高二检测)某校学生会由高一年级 5 人,高二年级 6 人,高三年级 4 人组成.

(1)选其中一人为学生会主席,有多少种不同的选法?

(2)若每年级选 1 人为校学生会常委成员,有多少种不同的选法?

(3)若要选出不同年级的两人分别参加市里组织的两项活动,有多少种不同的选法?

【解析】 (1)分三类:第 1 类,从高一年级选一人,有 5 种选择;第 2 类,从高二年级选一人,有 6 种选择;第 3 类,从高三年级选一人,有 4 种选择. 由分类加法计数原理,共有 $5+6+4=15$ 种不同的选法.

(2)分三步完成:第 1 步,从高一年级选一人,有 5 种选择;第 2 步,从高二年级选一人,有 6 种选择;第 3 步,从高三年级选一人,有 4 种选择. 由分步乘法计数原理,共有 $5\times6\times4=120$ 种不同的选法.

(3)分三类:高一、高二各一人,共有 $5\times6=30$ 种选法;高一、高三各一人,共有 $5\times4=20$ 种选法;高二、高三各一人,共有 $6\times4=24$ 种选法. 由分类加法计数原理,共有 $30+20+24=74$ 种不同的选法.

【变式 4-3】 三人传球,由甲开始发球,并作为第 1 次传球,经过 5 次传球后,球仍回到甲手中,则不同的传球方式共有多少种?

(3)模型法:模型法就是通过构造图形,利用形象、直观的图形帮助我们分析、解决问题的方法. 模型法是解决计数问题的重要方法.

(4)间接法:若计数时分类较多,或无法直接计数时,可用间接法先求出总数,再减去不可能的种数,即正难则反.

(5)转换法:转换问题的角度或转换成其他已知的问题. 在实际应用中,应根据具体问题,灵活处理.

误区·盲点

易错点

在考题 11(3)中,容易出现的错误是:不会分类或者分类情况遗漏.

防错良方

增强分类意识,在解题过程中,应做到不重不漏.

◎ **考题 12** 如图 1-1-8,要给地图 A,B,C,D 四个区域分别涂上 3 种不同颜色中的某一种,允许同一种颜色使用多次,但相邻区域必须涂不同的颜色,不同的涂色方案有多少种?

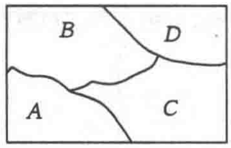


图 1-1-8

【解析】 按地图 A,B,C,D 四个区域依次涂色,分四步完成:

第 1 步,涂 A 区域,有 3 种选择;

第 2 步,涂 B 区域,有 2 种选择;

第 3 步,涂 C 区域,由于它与 A,B 区域不同,有 1 种选择;

第 4 步,涂 D 区域,由于它与 B,C 区域不同,有 1 种选择.

所以根据分步乘法计数原理,得到不同的涂色方案种数为 $3\times2\times1\times1=6$.

【变式 4-4】 (1)5 名学生从 3 项体育项目中选择参赛,若每一名学生只能参加一项,则有多少种不同的参赛方法?

(2)若 5 名学生争夺 3 项比赛冠军(每一名学生参赛项目不限),则冠军获得者有几种不同情况(没有并列冠军)?

题型优化测训

学业水平测试

1.[考点 1]一个学生从 3 本不同的科技书、4 本不同的文艺书、5 本不同的外语书中任选一本阅读,不同的选法有( ).

A. 60 种 B. 17 种 C. 12 种 D. 3 种

2.[考点 2]一个乒乓球队里有男队员 5 人,女队员 4 人,从中选出男、女队员各一人组成混合双打,共有不同的选法种数为( ).

A. 9 B. 20 C. 5^4 D. 4^5

3.[考点 3]从甲地到乙地有 2 种走法,从乙地到丙地有 4 种走法,从甲地不经过乙地到丙地有 3 种走法,则从甲地到丙地的不同走法种数为( ).

A. $2+4+3$ B. $2\times4+3$

C. $2\times3+4$ D. $2\times4\times3$

4.[考点 3]从 0,1,2,…,9 这十个数字中,任取两个不同的数字相加,其和为偶数的不同选取种数为( ).

A. 90 B. 10 C. 20 D. 40

5.[考点 1]已知集合 $M=\{a,b,c\}$,$N=\{-1,0,1\}$,从 M 到 N 的映射 f 满足 $f(a)-f(b)=f(c)$,那么映射 f 的个数为______.

6.[考点 3]从正方体的 6 个面中选取 3 个面,其中有两个面不相邻的选法共有______种.

高考水平测试

一、选择题

1.[考点 4]将 5 封信投入 3 个邮筒,不同的投法共有( ).

A. 5^3 种 B. 3^5 种 C. 3 种 D. 15 种

2.[考点 1]若集合 A_1,A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$,则记$[A_1,A_2]$是 A 的一组双子集拆分.规定:$[A_1,A_2]$和$[A_2,A_1]$是 A 的同一组双子集拆分.已知集合 $A=\{1,2,3\}$,那么 A 的不同双子集拆分共有( ).

A. 15 组 B. 14 组 C. 13 组 D. 12 组

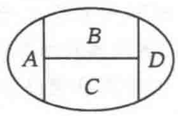
3.[考点 2]设有编号 1,2,3,4,5 的五个球和编号为 1,2,3,4,5 的五个盒子,现将这五个球放入这五个盒子内,要求每个盒内放一个球,并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同,则这样的放入方法的总数为( ).

A. 20 种 B. 30 种 C. 60 种 D. 120 种

4.[考点 1、3]有两个同心圆,在外圆周上有相异 6 个点,内圆周上有相异 3 个点,由这 9 个点确定的直线至少有( ).

A. 36 条 B. 30 条 C. 21 条 D. 18 条

5.[考点 1、2]用 6 种不同的颜色把图中 A,B,C,D 四块区域分开,允许同一色涂不同的区域,但相邻的区域不能涂同一色,则不同的涂法共有( ).



第 5 题图

A. 400 种　　B. 460 种

C. 480 种　　D. 496 种

6. [考点3]从 6 人中选出 4 个参加数、理、化、英语比赛，要求每项比赛有一人参加，每人只能参加其中一项，其中甲、乙两人都不能参加英语比赛，则不同的参赛方案的种数为(　　).

A. 96　B. 180　C. 240　D. 288

7. [考点3](2006，浙江高考题)函数 $f:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2,3\}$满足 $f[f(x)]=f(x)$，则这样的函数的个数共有(　　).

A. 1 个　B. 4 个　C. 8 个　D. 10 个

8. [考点4](2009，湖南高考题)从 10 名大学毕业生中选 3 个人担任村长助理，则甲、乙至少有 1 人入选，而丙没有入选的不同选法的种数为(　　).

A. 85　B. 56　C. 49　D. 28

二、填空题

9. [考点3、4]在由数字 0，1，2，3，4，5 所组成的没有重复数字的四位数中，不能被 5 整除的数共有______个.

10. [考点3](2006，上海高考题)如果一条直线与一个平面垂直，那么，称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是______.

11. [考点4]七名学生争夺五项冠军，获得冠军的可能性的种数为______.

12. [考点3、4](2009，浙江高考题)甲、乙、丙 3 人站到共有 7 级的台阶上，若每级台阶最多站 2 人，同一级台阶上的人不区分站的位置，则不同的站法种数是______种(用数字作答).

三、解答题

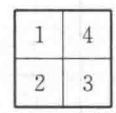
13. [考点3]某座山，若从东侧通往山顶的道路有 3 条，从西侧通往山顶的道路有 2 条，那么游人从上山到下山共有多少种不同的走法？

14. [考点3]在一块并排 10 垄的田地中，选择 2 垄分别种植 A、B 两种作物，每种作物种植 1 垄，为有利于作物生长，要求 A、B 两种作物的间隔不小于 6 垄，则不同的选择方法共有多少种？

15. [考点3]用五种不同颜色给图中四个区域涂色，每个区域涂一种颜色.

(1)共有多少种不同的涂色方法？

(2)若要求相邻(有公共边)的区域不同色，那么共有多少种不同的涂色方法？



第 15 题图

16. [考点3、4]已知集合 $M\in\{1,-2,3\}$，$N\in\{-4,5,6,-7\}$，从两个集合中各取一个元素作为点的坐标，则这样的坐标在直角坐标系中可表示第一、二象限内不同的点的个数是多少？

高考真题赏析

1. (2009，全国高考题)甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门，则甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有(　　).

A. 6 种　B. 12 种　C. 24 种　D. 30 种

【解析】 分步完成. 首先甲、乙两人从 4 门课程中同选 1 门，有 4 种方法；其次由甲从剩下的 3 门课程中任选 1 门，有 3 种方法；最后乙从剩下的 2 门课程中任选 1 门，有 2 种方法. 于是，甲、乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法共有 $4\times3\times2=24$ 种. 故选 C.

【答案】 C

2. (2006，福建高考题)从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览，要求每个城市有一人游览，每人只游览一个城市，且这 6 人中甲、乙 2 人不去巴黎游览，则不同的选择方案共有(　　).

A. 300 种　B. 240 种　C. 144 种　D. 96 种

【解析】 能去巴黎的有 4 个人，依次去伦敦、悉尼、莫斯科的有 5 个人，4 个人，3 个人，故不同的选择方案有 $4\times5\times4\times3$

=240 种. 故选 B.

【答案】 B

3.(2010,湖北高考题)现有 6 名同学去听同时进行的 5 个课外知识讲座,每名同学可自由选择其中的一个讲座,不同选法的种数是(　　).

A. 5^6　　B. 6^5

C. $\frac{5\times6\times5\times4\times3\times2}{2}$　　D. $6\times5\times4\times3\times2$

【解析】 因为每位同学均有 5 种讲座可选择,所以 6 位同学共有 $5\times5\times5\times5\times5\times5=5^6$ 种不同的选法. 故选 A.

【答案】 A

4.(2009,广东高考题)广州 2010 年亚运会火炬传递在 A,B,C,D,E 五个城市之间进行,各城市之间的路线距离(单位:百公里)见下表. 若以 A 为起点,E 为终点,每个城市经过且只经过一次,那么火炬传递的最短路线距离是(　　).

	A	B	C	D	E
A	0	5	4	5	6
B	5	0	7	6	2
C	4	7	0	9	8.6
D	5	6	9	0	5
E	6	2	8.6	5	0

A. 20.6　　B. 21　　C. 22　　D. 23

【解析】 由于"以 A 为起点,E 为终点,每个城市经过且只经过一次",并且求"最短路线的距离",由选项判断,A 中 20.6 在表中只有 C 和 E 之间的距离 8.6 是出现小数部分的,故 CE 必定是经过的路线,又因为 A 为起点,E 为终点,故如果 A 正确,那么线路必然是:1. $A-B-D-C-E$ 或 2. $A-D-B-C-E$,进行验证:线路 1 的距离之和为 5+6+9+8.6=28.6,故线路 1 不符合;线路 2 的距离之和为 5+6+7+8.6=26.6,线路 2 也不符合,故排除 A;再验证选项 B,发现线路 $A-C-D-B-E$ 的距离之和为 4+9+6+2=21 符合,故选 B.

【答案】 B

5.(2007,全国高考题)5 位同学报名参加两个课外活动小组,每位同学限报其中的一个小组,则不同的报名方法共有(　　).

A. 10 种　　B. 20 种　　C. 25 种　　D. 32 种

【解析】 每个同学可报 2 个课外活动小组中的任何一个,因而共有 $2\times2\times2\times2\times2=32$ 种不同的报名方法. 故选 D.

【答案】 D

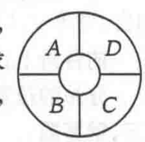
6.(2006,全国高考题)设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$,选择 I 的两个非空子集 A 和 B,要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数,则不同的选择方法共有(　　).

A. 50 种　　B. 49 种　　C. 48 种　　D. 47 种

【解析】 当 $A=\{1\}$ 时,B 为 $\{2,3,4,5\}$ 的非空子集即可,有 15 个;当 A 中最大数为 2(有 2 个)时,则 B 有 7 个;当 A 中最大数为 3(有 4 个)时,则 B 有 3 个;当 A 中最大数为 4(有 8 个)时,$B=\{5\}$,故共有 $15+2\times7+4\times3+8=49$ 种不同的选择方法. 故选 B.

【答案】 B

7.(2008,全国高考题)如图,一环形花坛分成 A,B,C,D 四块,现有 4 种不同的花供选种,要求在每块里种 1 种花,且相邻的 2 块种不同的花,则不同的种法总数为(　　).



第 7 题图

A. 96　　B. 84　　C. 60　　D. 48

【解析】 若 A、C 同色,则有 $4\times3\times3=36$ 种;若 A、C 不同色,则有 $4\times3\times2\times2=48$ 种. 故共有 36+48=84 种. 故选 B.

【答案】 B