[张宇带你学系列丛书]

张宇带你学
概率论与数理统计

浙大四版

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇带你学
概率论与数理统计

浙大四版

张宇 ◎主编 | 朱杰 高昆轮 ◎副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇带你学概率论与数理统计：浙大4版 / 张宇主编. — 北京 ：北京理工大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5682-0950-2

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第170795号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京长阳汇文印刷厂
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 13.25
字　　数 / 330千字
版　　次 / 2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
定　　价 / 29.80元

责任编辑/ 王玲玲
文案编辑/ 王玲玲
责任校对/ 孟祥敬
责任印制/ 边心超

前言

PREFACE

刚开始准备考研数学复习的同学通常都会面对两个重要问题,基础复习阶段看什么教材?怎么看?

先说第一个问题——看什么教材?虽然考研数学没有指定教材,全国各高校的大学教材又是五花八门,百家争鸣,但特别值得关注的一套教材是:同济大学数学系编写的《高等数学(第七版)》《线性代数(第六版)》、浙江大学编写的《概率论与数理统计(第四版)》.这套教材是全国首批示范性教材,是众多高校教学专家集体智慧的结晶,我建议同学们把这套教材作为考研基础复习阶段的资料.

再说第二个问题——怎么看这套教材?看什么,一句话就能说清楚;怎么看,才是学问.这里有两个关键.

第一,这套教材是按照教育部的《本科教学大纲》编写的,而考研试题是按照教育部的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制的,这两个大纲不完全一样.比如说高等数学第一章用极限的定义求函数极限可能在本科阶段就是同学们首先遇到的一个难以理解的问题,甚至很多人看到那里就已经在心里深深地埋下了一种可怕的恐惧感,但事实上,这个问题于考研是基本不作要求的;再如斜渐近线的问题在本科阶段基本不作为重点内容考查,但在考研大纲里却是命题人手里的香饽饽,类似问题还有很多;第二,针对考研,这套教材里的例题与习题有重点、非重点,也有难点、非难点;有些知识点配备的例题与习题重复了,有些知识点配备的例题与习题还不够.

这套"张宇带你学系列丛书"就是为了让同学们读好这套教材而编写的.细致说来,本书有如下四个特点:

第一,章节同步导学.本书在每一章开篇给同学们列出了此章每一节的教材内容与相应的考研要求,用以体现本科教学要求与考研要求的差异,同时精要地指出每一节及章末必做的例题和习题,可针对性地增强重点内容的复习.

第二,知识结构网图.本部分列出了本章学习的知识体系,宏观上把握各知识点的内容与联系,同时简明扼要地指出了本章学习的重点与难点等.

第三,课后习题全解.这一部分主要是为同学们做习题提供一个参照与提示,本部分给出了课后习题的全面解析,其中有的解答方法是我们众多老师在辅导过程中自己总结归纳的灵活与新颖性解法.但我还是建议同学们先自己认真独立思考习题再去翻看解答以作对比或提示之用.

第四,经典例题选讲.每一章最后部分都配有不同数量的经典例题,这部分例题较之书后习题不

论综合性还是灵活性都有所提高，目的也正如上面所谈让同学们慢慢接触考研类试题的特点与深度，逐步走向考研的要求，本部分例题及部分理论的说明等内容希望同学们认真体会并化为己有.

需要指出的是，考研大纲和本科教学大纲均不作要求的章节，本书也未收录.

总之，本书作为“张宇考研数学系列丛书”的基础篇，既可作为大学本科学习的一个重要参考，也是架起教材与《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》及后续书籍的一座重要桥梁. 我深信，认真研读学习本书的同学在基础阶段的复习必会事半功倍.

张宇

2015年8月于北京

目录
CONTENTS

第六章　样本及抽样分布

第七章　参数估计

第八章　假设检验(仅数学一要求)

第十五章　选做习题

第一章　概率论的基本概念

章节同步导学

章节	教材内容	考纲要求	必做例题	必做习题(P24－P29)
§1.1 随机试验	随机试验的概念和特点	考研不作要求		
§1.2 样本空间、随机事件	样本空间、样本点的概念和表示	了解		习题 2
	随机事件的概念	理解	例 1	
	事件间的关系与事件的运算	掌握(能结合文氏图分析)	例 2	
§1.3 频率与概率	频率的定义和性质，频率的稳定性	考研不作要求		
	概率的定义(三个条件)	理解		
	概率的性质:性质ⅰ～ⅵ	掌握(会证明)		习题 3,4
§1.4 等可能概型(古典概型)	等可能概型的两个特点及计算公式	会(简单问题穷举，复杂问题排列组合)	例 1	习题 6，7
	放回抽样和不放回抽样的概率计算	掌握摸球问题、分房问题	例 2～8	习题 10，11，13
	实际推断原理	了解		
§1.5 条件概率	条件概率的定义和性质	理解【重点】	例 1	习题 14，15，27
	乘法定理	掌握	例 4	习题 17
	全概率公式和贝叶斯公式	掌握【难点】	例 5～8	习题 22,39
§1.6 独立性	两个事件相互独立的定义和定理一与二;三个事件相互独立的定义	理解【重点 难点】	例 1	习题 30(3)(4),31
	利用独立性计算概率	掌握【重点】	例 3,4	习题 28,36,37

知识结构网图

- 基本概念
  - 随机试验 E:重复性、所有结果已知和不确定性
  - 样本空间 S:所有可能结果组成的集合
  - 随机事件 A:样本空间的子集
    - 关系:包含、互斥、对立、独立
    - 表示:和事件、积事件、差事件、逆事件
    - 运算:交换律、结合律、分配律、德摩根律
- 概率概念
  - 统计概念:频率
  - 公理化概念:非负性、规范性和可列可加性
  - 古典概型与几何概型:等可能概型
  - 计算公式
    - 加法公式
      - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$(若事件 A 与 B 互斥)
    - 减法公式
      - $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B})$
      - $P(A-B)=P(A)-P(B)$(若事件 $A\supseteq B$)
    - 求逆公式:$P(\overline{A})=1-P(A)$
- 条件概率概念
  - 定义:当 $P(A)>0$ 时,$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$,且满足概率性质与上述公式(非负性、规范性和可列可加性)
  - 计算:定义法,缩小样本空间方法
  - 应用
    - 乘法公式:当 $P(A)>0$ 时,$P(AB)=P(A)P(B|A)$
    - 全概率公式:$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)$
    - 贝叶斯公式:$P(B_i\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}$
    - (其中 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分,$P(B_i)>0$)
- 独立性
  - 定义
    - 两个事件:$P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})$
    - 多个事件:相互独立$\rightleftharpoons$两两独立(右推左不成立)
  - 性质
    - 相互独立的事件中部分事件间相互独立
    - 相互独立的事件中部分事件的逆事件与其余事件仍相互独立
  - 应用
    - 计算多个事件的和事件概率转化为逆事件概率乘积
    - 伯努利试验:试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$,每次 A 发生的概率 $P(A)=p$,n 次试验相互独立

课后习题全解

1. 写出下列随机试验的样本空间 S:

(1)记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分);

(2)生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数;

(3)对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品",如连续查出了 2 件次品就停止检查,或检查了 4 件产品就停止检查,记录检查的结果;

(4)在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

【解析】(1)记 n 为此班学生的人数，一次数学考试的平均分数为

$$S_1=\left\{\frac{k}{n}\,\middle|\,\text{其中}\,k\,\text{为此班学生一次数学考试的成绩总和},k=0,1,2,\cdots,100n\right\}.$$

(2)生产产品直到有 10 件正品，生产的总件数为

$$S_2=\{10,11,\cdots,n,\cdots\}.$$

(3)记 0 为出厂的产品是“次品”，记 1 为出厂的产品为“正品”，检查了 4 件产品就停止检查，其结果为

{0000,0001,0010,0100,1000,0011,0101,1001,0110,1010,1100,1110,1101,1011,0111,1111}.

连续查出两件次品就停止检查，则上述结果中去除样本点{0000,0001,0010,1000,0011,1001}，换为{00,100}，即样本空间为

$$S_3=\{00,0100,100,0101,0110,1010,1100,1110,1101,1011,0111,1111\}.$$

(4)单位圆内任意取一点，它的坐标集合为

$$S_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}.$$

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1)A 发生，B 与 C 不发生； (2)A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3)A,B,C 中至少有一个发生； (4)A,B,C 都发生；

(5)A,B,C 都不发生； (6)A,B,C 中不多于一个发生；

(7)A,B,C 中不多于两个发生； (8)A,B,C 中至少有两个发生.

【解析】(1)$A\bar{B}\bar{C}$. (2)$AB\bar{C}$. (3)$A\cup B\cup C$.

(4)ABC. (5)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. (6)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(7)$S-ABC$ 或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup AB\bar{C}$.

(8)$AB\cup AC\cup BC$

3. (1)设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(2)已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B$，$\bar{A}\bar{B}$，$A\cup B\cup C$，$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，$\bar{A}\bar{B}C$，$\bar{A}\bar{B}\cup C$ 的概率.

(3)已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，(i)若 A,B 互不相容，求 $P(A\bar{B})$；(ii)若 $P(AB)=\frac{1}{8}$，求 $P(A\bar{B})$.

【解析】(1)因为 $ABC\subseteq AB$，所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，即 $P(ABC)=0$，于是

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$，

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}$，

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20},\end{aligned}$$

$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}$,

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P[(\overline{A\cup B})C]=P(C)-P[(A\cup B)C]$$
$$=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{7}{60},$$

$P(\overline{A}\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}$.

(3)若 A,B 互不相容,$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)=\frac{1}{2}$.

若 $P(AB)=\frac{1}{8}$,则

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

【注】掌握概率的加法公式、减法公式.

加法公式:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,当 A,B 互不相容时,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

减法公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$,当 A,B 互不相容时,$P(A-B)=P(A)$;当$A\supset B$时,$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

4. 设 A,B 是两个事件.

(1)已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$,验证 $A=B$;

(2)验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

【解析】(1)因为 $A\overline{B}=\overline{A}B$,于是 $A\overline{B}\cup AB=\overline{A}B\cup AB$,等式左边 $A\overline{B}\cup AB=A$,等式右边 $\overline{A}B\cup AB=B$,即 $A=B$.

(2)事件 A 和事件 B 恰有一个发生表示为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B$,$A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互不相容,于是,

$$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$$
$$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-2P(AB).$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1)从中任意抽取 5 片,求其中至少有 2 片是安慰剂的概率;

(2)从中每次取一片,作不放回抽样,求前 3 次都取到安慰剂的概率.

【解析】(1)10 片药片任取 5 片的基本事件数为 C_{10}^5,事件 5 片中至少有 2 片是安慰剂的基本事件数为 $C_5^2C_5^3+C_5^3C_5^2+C_5^4C_5^1+C_5^5$ 或 $C_{10}^5-C_5^0C_5^5-C_5^1C_5^4$,即任取 5 片药片其中至少有 2 片安慰剂的概率为

$$\frac{C_5^2C_5^3+C_5^3C_5^2+C_5^4C_5^1+C_5^5}{C_{10}^5}=\frac{113}{126}.$$

(2)依次不放回抽取 3 次药片的基本事件数为 A_{10}^3,前 3 次取得安慰剂的基本事件数为 A_5^3,于是前 3 次取到安慰剂的概率为

$$\frac{A_5^3}{A_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

6. 在房间里有 10 个人,分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1)求最小号码为 5 的概率;

(2)求最大号码为 5 的概率.

【解析】(1)任选 3 人佩戴纪念章的基本事件数为 $C_{10}^{3}=120$,事件最小号码为 5 等价于其中有 1 人佩戴 5 号纪念章,其余 2 人佩戴纪念章号均大于 5,即事件最小号码为 5 的基本事件数为 $C_{5}^{2}=10$,于是最小号码为 5 的概率为

$$\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

(2)事件最大号码为 5 等价于有 1 人佩戴 5 号纪念章,其余 2 人佩戴纪念章的号码小于 5,所含基本事件数为 $C_4^2=6$,于是最大号码为 5 的概率为

$$\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}.$$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶,在搬运中所有标签脱落,交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客,能按所订颜色如数得到订货的概率为多少?

【解析】从 17 桶油漆中任取 9 桶的基本事件数为 C_{17}^{9},其中 9 桶含有 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的基本事件数为 $C_{10}^4C_4^3C_3^2$,于是,商家如数得到订货的概率为

$$\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2\ 431}.$$

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品. 任取 200 件.

(1)求恰有 90 件次品的概率;

(2)求至少有 2 件次品的概率.

【解析】(1)$\dfrac{C_{400}^{90}C_{1\ 100}^{110}}{C_{1\ 500}^{200}}$.

(2)事件至少有 2 件次品的对立事件为 200 件产品中全部为正品或恰有一件次品,于是至少有 2 件次品的概率为

$$1-\frac{C_{1\ 100}^{200}}{C_{1\ 500}^{200}}-\frac{C_{1\ 100}^{199}C_{400}^{1}}{C_{1\ 500}^{200}}.$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

【解析】事件 A 为至少有两只能配成一双,从 5 双不同的鞋中任取 4 只种数为 $n=C_{10}^4=210$,4 只鞋中至少有两只能配成一双,可以理解为 4 只鞋恰能配成 1 双鞋(记为事件 B),4 只鞋恰能配成 2 双鞋(记为事件 C),则有 $A=B\cup C$,事实上

$$n_B=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1=120, n_C=C_5^2=10,$$

于是

$$n_A=n_B+n_C=130,$$

所以

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

另外一种解法,考虑事件 A 的逆事件 $\overline{A}$,即事件 $\overline{A}$ 为 4 只鞋中没有成对的鞋,此时 $n_{\overline{A}}=C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$,于是 $n_A=n-n_{\overline{A}}=130$,即得相同的答案.

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母,从中任意连抽 7 张,求其排列结果为 ability 的概率.

【解析】设事件 A 为抽取字母排列为 ability,11 个字母中任意连续抽取 7 张含有基本事件数为 $n_S=A_{11}^7$,在字母中共有两个 b,两个 i,则 $n_A=4$,所以

$$P(A)=\frac{n_A}{n_S}=\frac{4}{A_{11}^7}=2.4\times10^{-6}.$$

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

【解析】3 只球随机放入 4 个杯中的基本事件数为 $4^3=64$.

事件 A_1：杯中球的最大数为 1，等价于 4 个杯中其中有 3 个杯中各有一个球，事件 A_1 含有基本事件数为 $A_4^3=24$，于是

$$P(A_1)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}.$$

事件 A_2：杯中球的最大数为 2，等价于 4 个杯中其中有 2 个杯中各有 1，2 个球，事件 A_2 含有基本事件数为 $C_4^2A_3^2=36$，即

$$P(A_2)=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}.$$

事件 A_3：杯中球的最大数为 3，等价于 4 个杯中仅有一个杯中含有 3 个球，即 A_3 的基本事件数为 $C_4^1=4$，于是

$$P(A_3)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}.$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

【解析】记事件 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$ 为第 i 个部件强度太弱，由题意可知 $P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3}$，且这里满足 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 互不相容，所以发生一个部件强度太弱的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10})=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{10})=\frac{10}{C_{50}^3}=\frac{1}{1\,960}.$$

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1)在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率；

(2)在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

【解析】(1)任选 4 名学生共有 $C_{12}^4=495$ 种选法，其中一、二、三、四年级的学生各一名共有 $C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1=60$ 种选法，因此所求的概率为

$$\frac{C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{4}{33}.$$

(2)任选 5 名学生共有 $C_{12}^5=792$ 种选法，其中一、二、三、四年级的学生均包含在内，则该事件等价于选自某一年级学生 2 人、其余年级学生各 1 人，所以共有

$$C_5^2C_2^1C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^2C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^2C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^1C_2^2=240$$

种选法，因此所求的概率为$\frac{10}{33}$.

14. (1)已知 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$；

(2)已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

【解析】(1)$P(\overline{A})=0.3$，则 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.7$，又 $P(B)=0.4,P(\overline{B})=1-P(B)=0.6$，由减法公式可得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5$，即 $P(AB)=0.2$，所以

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.8,$$

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{1}{4}.$$

(2)由乘法公式得 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，再由公式得 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}.$$

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

【解析】方法一　记事件 A 为两颗骰子点数之和为 7，事件 B 为其中有一颗为 1 点，

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},P(A)=\frac{1}{6},$$

$$AB=\{(1,6),(6,1)\},P(AB)=\frac{1}{18},$$

则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}.$$

方法二　采用缩小样本空间法，事件 $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，事件 A 中有一颗为 1 点的事件 $\{(1,6),(6,1)\}$，于是已知两颗骰子点数之和为 7，其中有一颗为 1 点的概率为 $\frac{1}{3}$.

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{孩子得病\}=0.6,P\{母亲得病|孩子得病\}=0.5,$$
$$P\{父亲得病|母亲及孩子得病\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

【解析】记 A 为孩子得病，B 为母亲得病，C 为父亲得病，由条件可知

$$P(A)=0.6,P(B|A)=0.5,P(C|AB)=0.4.$$

母亲及孩子得病但父亲未得病的事件为 $AB\overline{C}$，则 $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$，由乘法公式可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.3,$$
$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=0.12,$$

于是
$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0.18.$$

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，从其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样，求下列事件的概率：

(1)两件都是正品；

(2)两件都是次品；

(3)一件是正品，一件是次品；

(4)第二件取出的是次品.

【解析】记 A_i 为第 i 次取出次品($i=1,2$).

(1)两件正品的事件为 $\overline{A}_1\overline{A}_2$，于是 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$.

(2)两件次品的事件为 A_1A_2，于是 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$.

(3)一件是正品和一件是次品的事件为 $\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2$，则

$$P(\overline{A}_1A_2\cup A_1\overline{A}_2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}.$$

(4)第二件取出的是次品的事件为 A_2，则由抽签原理可得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\\&=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他随意地拨号.求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率.若已知最后一个数字是奇数,那么此概率是多少?

【解析】记 A_i 为第 i 次接通所需要的号码($i=1,2,3$),拨号不超过三次而接通的事件表示为 $A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,则

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).\quad(A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\text{ 两两互不相容})\end{aligned}$$

由题意可知

$$P(A_1)=\frac{1}{10},P(\overline{A}_1A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10},$$

则拨号不超过三次而接通的概率为

$$P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{3}{10}.$$

若最后一个数字是奇数,则

$$P(A_1)=\frac{1}{5},P(\overline{A}_1A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5},P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$

则拨号不超过三次而接通的概率为

$$P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{3}{5}.$$

19.(1)设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球;乙袋中装有 N 只白球、M 只红球.今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一只球.问取到白球的概率是多少?

(2)第一只盒子装有 5 只红球,4 只白球;第二只盒子装有 4 只红球,5 只白球.先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去,然后从第二盒中任取一只球.求取到白球的概率.

【解析】(1)记事件 A 为从乙袋中任意取白球,事件 B 为从甲袋中任意取白球,则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=\frac{n}{m+n}\times\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{m+n}\times\frac{N}{N+M+1}=\frac{nN+n+mN}{(m+n)(N+M+1)}.\end{aligned}$$

(2)记事件 A 为从第二盒中任意取一只白球,事件 B_1 为从第一盒中取出两个白球,事件 B_2 为从第一盒中取出一个白球和一个黑球,事件 B_3 为从第一盒中取出两个黑球,由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)\\&=\frac{C_4^2}{C_9^2}\times\frac{C_7^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}\times\frac{C_6^1}{C_{11}^1}+\frac{C_5^2}{C_9^2}\times\frac{C_5^1}{C_{11}^1}=\frac{53}{99}.\end{aligned}$$

20. 某种产品的商标为“MAXAM”,其中有两个字母脱落,有人捡起随意放回,求放回后仍为“MAXAM”的概率.

【解析】记事件 B_1 表示脱落的字母为“AA”,事件 B_2 表示脱落的字母为“MM”,事件 B_3 表示脱落的字母为“AM”,事件 B_4 表示脱落的字母为“AX”,事件 B_5 表示脱落的字母为“MX”,事件 A 为放回后仍为“MAXAM”,即

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},P(B_3)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{4}{10},P(B_4)=P(B_5)=\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10},$$

$$P(A|B_1)=P(A|B_2)=1,P(A|B_3)=P(A|B_4)=P(A|B_5)=\frac{1}{2},$$

由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{3}{5}=0.6.$$

21. 已知男子有 5%是色盲患者,女子有 0.25%是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人,恰好是色盲患者,问此人是男性的概率是多少?

【解析】 记事件 A 为此人是色盲患者,事件 B 为此人是男性,由条件可知

$$P(B)=P(\bar{B})=\frac{1}{2},P(A|B)=0.05,P(A|\bar{B})=0.0025.$$

利用贝叶斯公式可得

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}=\frac{20}{21}.$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p,若第一次及格则第二次及格的概率也为 p;若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$.

(1)若至少有一次及格则他能取得某种资格,求他取得该资格的概率;

(2)若已知他第二次已经及格,求他第一次及格的概率.

【解析】 记事件 $A_i(i=1,2)$ 为学生参加第 i 次考试及格,A 为取得某种资格.

(1)至少有一次及格的事件表示为 $A=A_1\cup(\bar{A}_1A_2)$,此时 $A_1,\bar{A}_1A_2$ 互不相容,于是

$$P(A)=P[A_1\cup(\bar{A}_1A_2)]=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)$$

$$=p+\frac{p}{2}(1-p)=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2.$$

(2)已知他第二次已经及格,则第一次及格的概率为

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)}$$

$$=\frac{p^2}{p^2+\frac{p}{2}(1-p)}=\frac{2p}{p+1}.$$

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去,接收站收到时,A 被误收作 B 的概率为 0.02,而 B 被误收作 A 的概率为 0.01. 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1. 若接收站收到的信息是 A,问原发信息是 A 的概率是多少?

【解析】 记事件 H 为传送信息 A,事件 $\bar{H}$ 为传送信息 B,事件 I 为接收信息 A,事件 $\bar{I}$ 为接收信息 B,由题意可知

$$P(H)=\frac{2}{3},P(\bar{H})=\frac{1}{3},P(\bar{I}|H)=0.02,P(I|\bar{H})=0.01,$$

于是

$$P(H|I)=\frac{P(HI)}{P(I)}=\frac{P(H)P(I|H)}{P(H)P(I|H)+P(\bar{H})P(I|\bar{H})}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=\frac{196}{197}.$$

24. 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样. 求：

(1)第一次取到的零件是一等品的概率；

(2)在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率.

【解析】设事件 $H_i(i=1,2)$ 为零件取自第 i 箱，$A_i(i=1,2)$ 为第 i 次取出一等品，其中

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

(1)$P(A_1)=P(H_1)P(A_1\mid H_1)+P(H_2)P(A_1\mid H_2)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5}.$

(2)$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$，

其中
$$\begin{aligned}P(A_1A_2)&=P(H_1)P(A_1A_2\mid H_1)+P(H_2)P(A_1A_2\mid H_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}.\end{aligned}$$

于是
$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\approx 0.486.$$

25. 某人下午 5:00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5:35～5:39	5:40～5:44	5:45～5:49	5:50～5:54	迟于 5:54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

【解析】记事件 B 为乘地铁回家，事件 $\bar{B}$ 为乘汽车回家，事件 A 为到家时间在 5:45～5:49 之间，由题意可知 $P(B)=P(\bar{B})=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=0.45$，$P(A|\bar{B})=0.20$，所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{9}{13}.$$

26. 病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.8. 若浇水，则树死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居记得浇水.

(1)求主人回来树还活着的概率；

(2)若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

【解析】记事件 B 为邻居记得浇水，事件 A 为树还活着，由题意可知

$$P(B)=0.9,P(\bar{B})=0.1,P(A|B)=0.85,P(A|\bar{B})=0.20.$$

(1)$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.85\times 0.9+0.20\times 0.1=0.785.$

(2)$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})}{1-P(A)}=\frac{0.1\times 0.8}{1-0.785}\approx 0.372.$

27. 设本题涉及的事件均有意义，设 A,B 都是事件.

(1)已知 $P(A)>0$，证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$；

(2)若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\bar{B}|\bar{A})=1$；