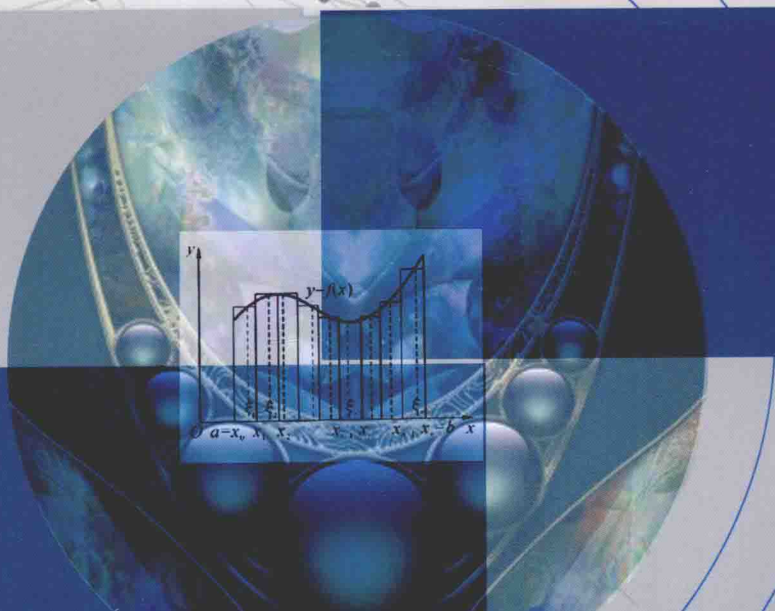
微积分同步学习指导与解题能力训练

WEIJIFENTONGBUXUEXIZHIDAO YUJIETINENGLIXUNLIAN

第3版

◎主　编　相丽驰
副主编　徐园芬　张春丽



中南大學出版社
www.csupress.com.cn

微积分同步学习指导与解题能力训练

（第3版）

主　编　相丽驰
副主编　徐园芬　张春丽

中南大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步学习指导与解题能力训练/相丽驰主编. —3 版
—长沙:中南大学出版社,2015.8

ISBN 978-7-5487-1874-1

Ⅰ.微... Ⅱ.相... Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183810 号

微积分同步学习指导与解题能力训练

(第 3 版)

主编 相丽驰

□**责任编辑** 刘 辉
□**责任印制** 易红卫
□**出版发行** 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路 邮编:410083
发行科电话:0731-88876770 传真:0731-88710482
□**印　　装** 长沙鸿和印务有限公司

□**开　　本** 787×1092 1/16 □**印张** 12 □**字数** 297 千字
□**版　　次** 2015 年 8 月第 3 版 □**印次** 2015 年 8 月第 1 次印刷
□**书　　号** **ISBN 978-7-5487-1874-1**
□**定　　价** **28.00** 元

前　言

微积分是经管类各专业必修的基础课。它不仅是后续学习专业基础课和专业课的必备基础，也是硕士研究生入学考试的必考科目，同时它是培养学生数学思想、数学素养的重要载体。为了帮助同学们更加深刻地理解《微积分》的思想、方法，更加牢固地掌握《微积分》的知识、概念，更加灵活地运用《微积分》知识解决相关问题，我们编写了这本《微积分(经管类)同步学习指导与解题能力训练》。相信本书的使用将弥补课堂教学的不足，并使学生基础扎实，能力提高。

本书在编写中，参考了吴赣昌老师主编的《微积分》，华中科技大学高等数学课题组编写的《微积分》等大量书籍，从中汲取了许多优点。同时编写时也充分注意到，目前许多同类参考书中还存在的针对性不够强，选择题、填空题、应用题偏少等不足。因此，本书注意突出了以下特点：① 列举大量选择题、填空题；② 列举大量的经济应用题；③ 选题难易适度。既有基本题目，又有考研题目；④ 通过学习指导，加强学生对知识的理解和升华。

本书在编写中，徐园芬、张春丽、田增峰、宋新霞、李炎华等老师都投入了大量的精力。由于他们对题目的精心组织、反复推敲，因而才有了这本具有特色的参考书，同时本书也得到了中南大学出版社的大力支持，在此向他们表示感谢。

限于编者的水平，书中错漏不当之处，诚恳同行和读者给予批评指正，编者将不断改进和完善，并深表谢意。

编　者

2015 年 7 月

目　录

第一部分　同步学习指导与解题能力训练

第二部分　解题能力训练习题答案

附录　2013—2015 年硕士研究生入学考试真题及解析

第一部分

同步学习指导与解题能力训练

第1章　函数　极限与连续

知识学习指导

一、基本要求

- 要理解函数概念的实质. 熟练掌握基本初等函数的图形及性质. 理解函数的单调、有界、周期和奇偶等特性的含义.
- 了解反函数、复合函数和隐函数的概念. 会求简单函数的复合，会把复杂函数分解成几个简单函数，会画一些简单的分段函数的图像.
- 会建立简单实际问题中的函数关系，掌握常用的经济学函数.
- 关于极限概念，着重理解数列极限、函数极限的含义，对于极限的 $\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 定义的运用不作过高要求，知道极限的惟一性及有界性定理，知道极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与左右极限的关系.
- 掌握极限的四则运算法则及两个重要极限，能运用它们求一些简单的极限，会求分段函数在分段点的极限.
- 知道判别极限存在的两个准则(单调有界准则及夹挤准则)，知道极限的保号性.
- 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系，知道无穷小的性质，会对无穷小进行比较，会用等价代换法求极限.
- 理解函数在一点连续的概念、了解间断点的概念，会判断间断点的类型，会判断分段函数在分段点的连续性.
- 知道初等函数的连续性，知道闭区间上连续函数的性质(最值定理、介值定理等)，会用介值定理证明简单方程的根的存在性.

二、内容提要

1. 函数的概念

函数　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)\quad x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域. 当 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的集合称为函数的值域.

2. 数列极限

- 概念

单调列　称 $\{x_n\}$ 为单调增，若 $x_n\leqslant x_{n+1}(n\in\mathbf{Z}^+)$；

称$\{x_n\}$为单调减，若$x_n \geqslant x_{n+1}(n \in \mathbf{Z}^+)$.

将以上定义中不等号换作严格不等号即得严格单调数列定义.

有界列 存在$M>0$，使$|x_n| \leqslant M(n \in \mathbf{Z}^+)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 若对任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时$|x_n - A| < \varepsilon$.

- 性质

惟一性与有界性 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则极限惟一确定且$\{x_n\}$有界.

收敛判别准则 (1)单调有界准则：单调有界数列是收敛数列.(2)夹挤准则：若$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n(n \in N)$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

- 计算

四则运算法则 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A \pm B$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n / y_n = A/B(B \neq 0)$.

常用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0(|a|<1)$.

3. 函数的极限

- 概念

函数$f(x)$趋于常数A依x变化方式不同而分为以下6种.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ (3) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ (5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

- 性质

保号性 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$，则存在$\delta>0$，使

$$f(x) > 0,\ x \in N^0(x, \delta).$$

注：这是以(1)为例写的，其余几种可类比写出，下同.

左右极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

夹挤准则 若$a(x) \leqslant f(x) \leqslant b(x)(x \in N^0(x_0))$，且$\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = \lim\limits_{x\to x_0} b(x) = A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

- 计算

四则运算法则 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,\ \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = A/B(B \neq 0).$$

变量代换 若$x \to x_0$时$\varphi(x) \to l$(l为有限或无穷)，则令$y = \varphi(x)$，便有

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y\to l} f(y).$$

重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

4. 无穷小量与无穷大量

- 概念

无穷小量　以零为极限的函数变量或数列；

无穷大量　趋向无穷的函数变量或数列.

$\alpha=o(\beta)$　若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，称 α 是 β 高阶无穷小；

若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to l\neq 0$，称 α 较 β 同阶无穷小；

$\alpha\sim\beta$　若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 1$，称 α 较 β 等阶无穷小.

（其中，α，β 均为同一过程的无穷小量）

● 性质

运算规则　$\alpha\pm\beta\to 0$，$\alpha\cdot\beta\to 0$，$\alpha\cdot B\to 0$.

（其中，α，β 为无穷小量，B 为有界量）

等价代换法则　若 $\alpha\sim\beta$，则当等式一端极限存在时

$$\lim\alpha\gamma=\lim\beta\gamma,\ \lim\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\frac{\gamma}{\beta}.$$

5. 连续函数

● 概念

在一点连续　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 连续；

在 (a, b) 上连续　若 $f(x)$ 在每个 $x_0\in(a, b)$ 处连续；

在 $[a, b]$ 上连续　若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续，且在 a 点右连续，b 点左连续.

间断点　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 不成立，则 x_0 见表 1－1－1：

表 1－1－1

第一类间断点：	$f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 都存在	$f(x_0^+)=f(x_0^-)\neq f(x_0)$（可去）
		$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$（跳跃）
第二类间断点：	$f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在	

● 性质

最值定理　$[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界函数，能达到最大值 $\max f(x)$ 及最小值 $\min f(x)$.

介值定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 间任何实数 A 均有 $x_0\in(a, b)$ 使 $f(x_0)=A$.

零点存在定理　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，若 $f(a)f(b)<0$，则存在 $x_0\in(a, b)$ 使 $f(x_0)=0$.

初等函数的连续性　初等函数在其定义区间上都是连续的.

三、学习指导

● 本章函数部分的一些内容，读者在中学阶段可能已经十分熟悉，如：基本初等函数，求定义域、值域等. 学习中只要留心与过去所学是否一致，以及注意新增内容即可，如：有界

性等，以便加快学习进度.

● 分段函数、复合函数是新接触的函数形式. 要熟悉分段函数的基本特征，注意赋值时应用相应的解析式，以及分段点的函数值，复合函数注意从外向内分解成简单函数.

● 从实际问题中寻求变量的相互依从关系，从而建立函数关系是非常重要的环节，对经济学函数的建立，切勿认为麻烦而一跳而过，要认真完成习题，这对于后面学习微积分在经济方面的应用非常重要.

● 本章介绍的极限理论十分重要，后面将要学习的导数、积分、级数等均是用极限描述的，极限运算是一种基本的计算工具，须熟练掌握，连续函数作为利用极限描述($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x)$在$x_0$连续)的一类特殊函数，其应用亦十分广泛，这从它所满足的最值定理、介值定理、零点存在定理，以及初等函数在定义区间上连续的性质上可以看出.

● 可将数列极限与函数极限的定义、性质、运算法则对比，会找到较多的共性，对不同之处进行比较亦可加深印象. 比如极限的惟一性、四则运算法则、夹挤准则是完全一致的，而有界性则略有不同，数列$\{x_0\}$收敛时可以说它是有界数列，因为N之前的x_n是有限个，从中能找出最大最小者. 但函数$f(x)$收敛时不能说它在定义域上有界，如$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，可以说$f(x)$在某个区间$[X,+\infty)$上有界，但不能说$f(x)$在定义域$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$上有界，因$x\to-1$时，$f(x)\to\infty$.

● 计算极限的方法较多，后面介绍的洛必达法则将是一个十分有效的工具. 目前，初学者主要是应用四则运算规则、等价代换法则以及初等变形、变量代换来进行计算. 计算时可以从以下几点来考虑：

▲ 若a是$f(x)$的连续点(如初等函数的定义点)，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，例如

$$\lim_{x\to\pi}e^{\sin x}/x^2=e^{\sin\pi}/\pi^2=1/\pi^2,\quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

▲ 利用两个重要极限.

▲ 利用夹挤准则.

▲ 利用等价代换.

▲ 利用变量代换.

▲ 利用初等变形(如$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$).

(又如$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-1/n}{1+1/n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n)/\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n^2)=2.$)

● 对于分段函数，常常讨论它在分段点x_0的极限与连续问题(后面还要讨论可导性问题). 这时要注意首先计算单侧极限. 仅当$f(x_0^+)=f(x_0^-)$时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$才存在，而当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$时，函数$f(x)$在$x_0$为连续. 另外，有些分段函数$f(x)$，在$x_0$两侧的表达式完全一样，但两侧的左右极限不相同，因而也须分段考虑，例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在分段点 $x=0$，$f(0^+)=1$，$f(0^-)=-1$，所以，$x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

典型例题

例 1　设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解　由 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，有 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，又 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

令 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，$x\leqslant 0$ 即为 $\varphi(x)$ 的定义域.

例 2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

解
$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

解
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})\sin x\cos x}{x+2-2}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})\right]=4\sqrt{2}.$$

或者利用 $\sin 2x\sim 2x$，$x\to 0$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x}=4\sqrt{2}.$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

解　$原式=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x}=1$　（注意到 $e^x-1\sim x$）

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

解法一
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x+x)}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}(\sin x+x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos\frac{x}{2}\cdot\left[2\cos\frac{x}{2}+\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\right]=4\ .$$

解法二　原式 $=\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\frac{x^2}{4}}$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\sin x+x)}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$

$$=4\lim_{x\to0}\frac{x(x+\sin x)}{x^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2\lim_{x\to0}(1+\frac{\sin x}{x})=4.$$

（其中用到了 $\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{4}$，$\sin x\sim x$，$x\to0$）

由以上两例可以看出，在求极限运算中，将等价无穷小代换与其他求极限方法联合使用，可以大大简化计算过程.

例 6　已知 $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+k}{x-k}\right)^x=9$，求 k 值.

解　因为 $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+k}{x-k}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{k}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{k}{x}\right)^x}=\dfrac{e^k}{e^{-k}}=e^{2k}=9$

所以 $k=\ln3$.

例 7　设 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^3+x^2}$，指出 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

解　由于 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+x)}$，显然 $f(x)$ 在 $x_1=0$，$x_2=-1$ 处无定义，所以 $f(x)$ 的间断点为 $x_1=0$，$x_2=-1$.

又由于　　$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

所以 $x_1=0$ 是第一类可去间断点.

又 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+x)}=\infty$，所以 $x_2=-1$ 是第二类间断点.

例 8　试讨论函数 $f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

解　当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$，
当 $x=1$ 时，$f(x)=1$，
当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$，
当 $x=-1$ 时，$f(x)=0$.

即

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x>1 \text{ 或 } x\leqslant -1\end{cases}$$

易知$f(x)$在$(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$内连续.

在 $x=-1$ 处，有

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 0=0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1+x)=0$$

所以$f(x)$在 $x=-1$ 处连续.

在 $x=1$ 处，有

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1+x)=2$$

所以$f(x)$在 $x=1$ 处不连续.

综上有$f(x)$在$(-\infty, -1]\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$内连续，$f(x)$在 $x=1$ 处间断.

例 9　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\sin x, & x<0\\ k, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+2, & x>0\end{cases}$，试确定常数 k 的值，使$f(x)$在定义域内连续.

解　$f(x)=\dfrac{2}{x}\sin x$ 在$(-\infty, 0)$内为初等函数，在其定义域$(-\infty, 0)$内连续.

$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}+2$ 在$(0, +\infty)$内为初等函数，在定义区间内连续.

由于在 $x=0$ 处

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x}\sin x=2\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+2\right)=0+2=2$$

所以要使$f(x)$在 $x=0$ 处连续，必须要求

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2$$

即当 $k=2$ 时，$f(x)$在其定义域内连续.

例 10　证明方程 $x^3-3x-1=0$ 至少有一个根在 1 与 2 之间.

证明　令 $f(x)=x^3-3x-1$，因为

$$f(1)=1-3-1=-3,\ f(2)=8-6-1=1,$$

即$f(1)$与$f(2)$异号，又$f(x)$为初等函数，在其定义区间$(-\infty, +\infty)$内连续，故在$[1, 2]$上连续，由零点定理知，$f(x)=0$ 必定至少有一个根在 1 与 2 之间.

解题能力训练

一、填空题

1. 设$f(\frac{1}{x})=x+\frac{1}{x^2}$，则$f(x)=$________.

2. 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=$________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\sin x}{x+1}=$________.

4. 设$x\to\infty$时，$f(x)$与$\frac{1}{x}$是等价无穷小，则$\lim\limits_{x\to\infty}2xf(x)=$________.

5. 设$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则$f(x-1)=$________.

6. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+x+1}{2x^2+x-5}=3$，则$a=$________.

7. 设$f(x)=\begin{cases}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & x>1\\ a+x^2, & x<1\end{cases}$，已知$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，则$a=$________.

8. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$________.

9. 函数$y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\ln(5-x)$的定义域为________.

10. 极限$\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\cos\frac{1}{x-\pi}=$________.

11. 已知当$x\to0$时，$\sqrt{1+ax^2}-1$与x^2是等价无穷小，则$a=$________.

12. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+k}{x-2k}\right)^x=8$，则常数$k=$________.

13. 函数$y=\frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$的定义域为________.

14. 若$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+kx-2}{x-1}$为有限值，则$k=$________.

15. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}(2+3\arctan x)=$________.

16. 若$\alpha=$________，则当$x\to0$时，有$\sin(x^2)\sim x^\alpha$.

17. 设$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，则$f(2x-3)$的定义域为________.

18. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(n^2-1)}{n^4+2n^2+3}=$________.

19. 极限$\lim\limits_{x\to0}(x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin x)=$________.

20. 已知 $\lim\limits_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=2$，则 $a=$________.

21. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin3x}{x}, & 当\ x\neq0\\ 2, & 当\ x=0\end{cases}$，$x=0$ 为________间断点.

22. 函数 $f(x)=\begin{cases}3e^{x}, & x<0\\ 2x+a, & x\geqslant0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\tan3x}=$________.

24. 设 $f(x+1)=x^2$，则 $f(x)=$________.

25. 已知 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-9x+a}{2-x}=5$，则 $a=$________.

26. 函数 $f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}+1, & x<0\\ x^2+a, & x\geqslant0\end{cases}$，在 $x=0$ 连续，则 $a=$________.

27. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=$________.

28. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin[(x-1)x]}{x(x^2+3x+2)}$，$x=0$ 为________间断点.

29. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}, & 当\ x\neq2\\ A, & 当\ x=2\end{cases}$，则当 $A=$________函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续.

30. 函数 $e^{x+\frac{1}{x}}$ 的间断点为________，是第________类间断点.

31. 设 $f(x)=e^{-2x}$，$f[\varphi(x)]=x-1$，则 $\varphi(x)=$________.

32. 设函数 $f(x)=\dfrac{kx}{2x+3}$，而且 $f[f(x)]=x$，则 $k=$________.

33. 已知 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b$ 为无穷小量，则 $a=$________，$b=$________.

34. 当 k 取________值时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)=0$.

35. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-1)\sin3x}{\tan^2x}=$________.

36. 设 m，n 为自然数，$f(x)=\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}$，则：当 $n=m$ 时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$____________，当 $n>m$ 时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________，当 $n<m$ 时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

37. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{\sin x}-1)^2\cos x}{\tan^2x}=$________.

38. 设 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin2x$，则 $f\left[\varphi\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]=$________.

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1}=$________.