普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

线性代数学习指南

刘吉定　李小刚　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

线性代数学习指南

刘吉定　李小刚　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与《线性代数及其应用》（第三版）（科学出版社）配套的辅助教材，也可与其他线性代数教材配套使用. 全书内容包括线性方程组的消元法、矩阵、行列式、矩阵的秩与向量空间，线性方程组、特征值与特征向量、线性空间与线性变换、线性代数的应用. 各章分为内容提要、题型归类与解题方法、自测题及解答三大部分. 书中所选习题具有代表性、题型多样、覆盖面广、解答详细.

本书适合线性代数课程的学习者和考研者阅读参考，也可作为讲授线性代数课程的高校教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指南/刘吉定，李小刚主编. —北京：科学出版社，2015.6

（工科数学精品丛书）

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-045110-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①刘…②李… Ⅲ.线性代数－高等学校－教学参考资料

Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 132941 号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉

责任印制：高 嵘/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2015 年 7 月第 一 版 印张：13 1/2

2015 年 7 月第一次印刷 字数：262 000

定价：31.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《工科数学精品丛书》序

工科学生毕业多年后时常感言，数学知识很多似乎没有派上用处，但数学训练、数学思想和精神，却无时无刻不在发挥着积极的作用，成为取得成功的最重要因素之一.

数学是一门高度抽象的学科，但是它非人类精神纯粹自由创造和想象，而是源于自然和工程问题. 系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任，同时，掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力. 工科数学创新教学，增强数学应用背景的讲授，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，能培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的.

工科数学精品教材的编写与成熟，在开放的视野与背景下，得到认同，自然成为纸质教材与数字出版的精品，从而得到广泛认可和使用.

在学会、领导和专家的关怀和指导下，本区域若干所全军重点、一本和省重点高校，其工科数学教材，在科学出版社出版和再版. 10 余年以来，教学和教材理念从素质教育，到分类分层教学改革，到数学思想、方法与创新教育，历经各校几届班子和责任教授的共同努力，逐渐成熟，成为具有较高质量的核心精品.

教材转型与数字出版呼之欲出，大趋势赫然在前，教材又重新经历新的考验. 《工科数学精品丛书》正是按此理念和要求，直面开放的视野与背景，将改革与创新的成果汇集起来，重新审视和操作，精益求精，以赢得内容先机，修订版和新编教材均是如此.

修订和新编的核心理念，一是体现数学思维，将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用；二是深化改革与创新，面向开放和数字出版的大平台，赢得内容先机，营造精品.

《工科数学精品丛书》为工科数学课程教材：高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等. 上述各课程大多为全军级、海军级优质课程和省部级精品课程，对应教材为相应的一、二级获奖教材.

丛书注重质量，讲究适用和教学实践性，体系相对完整与系统，加强应用性，按

照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容.

丛书具有明确的指导思想：

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂.

(2) 注重教学创新,加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 增强数学应用背景的介绍,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Sps 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样. 书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

《工科数学精品丛书》编委会

2015 年 1 月

前　言

线性代数是高等学校理工科和经管类学生的必修课程，是全国硕士研究生入学考试数学科目的必考内容之一. 线性代数不仅是学习后续数学课程和专业课程的必备基础知识，也是自然科学和工程技术领域中的一种重要数学工具，它在培养学生的计算能力、逻辑推理能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用. 然而，线性代数具有内容丰富、习题类型多、技巧性强等特点，而教学时数有限，很多内容和方法不能在课堂教学内完成. 这就要求学生不仅要在课堂内系统学习基本概念和理论，还需要在课外进行大量的自学与练习以熟练掌握解题方法与技巧.

为了使正在学习线性代数的理工科和经管类本科生能较深刻地掌握线性代数的基本概念、基本理论和解题方法与技巧，同时，为了给考研复习的本科生提供参考资料，给讲授线性代数课程的高校教师提供教学参考书，我们根据长期的线性代数课程教学实践，参考了多种线性代数教材和复习资料，按李小刚、刘吉定、罗进主编的《线性代数及其应用》(第三版)(科学出版社)的章节顺序，编写了本书. 该书信息量大，收集并解答了通行教材和辅导书上的习题. 除第一章外，各章具体内容如下：

(1) 内容提要. 简要介绍每一章的基本概念、基本理论和基本方法.

(2) 题型归类与解题方法. 精选了一批典型习题进行归类分析与解答，并对解题方法给予评注.

(3) 自测题及解答. 每章给出了一套自测题及详细解答，供读者自测.

本书由刘吉定、李小刚主编，参加编写工作的还有杨向辉、罗进、杨建华，全书由刘吉定统稿、定稿. 本书的编写过程，得到了相关教学管理部门的大力支持，在此表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指教.

编　者

2015 年 5 月

目　　录

第一章　线性方程组的消元法

第一节　内容提要

一、二元和三元线性方程组的求解

对于二元和三元线性方程组的求解,通常用消元法求解.

二、n 元线性方程组简介

1. n 元线性方程组的高斯消元法的矩阵描述

利用高斯消元法将 n 元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 同解地

化为三角形方程组 $\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots \\ a'_{nn}x_n=b'_n. \end{cases}$ 这样一个求解过程,可以用

如下矩阵的初等行变换来描述

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix}$$

2. 方程组的三种同解变形

(1) 第 i 个方程与第 j 个方程交换位置.

(2) 第 i 个方程乘上一个非零常数 k.

(3) 第 i 个方程加上第 j 个方程的 k 倍.

3. 矩阵的三种初等行变换

(1) 第 i 行与第 j 行对换,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$.

(2) 第 i 行的每一个元都乘以 k，记为 kr_i $(k \neq 0)$.

(3) 第 i 行的所有元加上相应的第 j 行元的 k 倍，记为 $r_i + kr_j$.

4. 线性方程组解的三种情形

(1) 方程组有唯一解：适定.

(2) 方程组无解：超定.

(3) 方程组有无穷多解：欠定.

第二节　典型例题

例 1　用高斯(Gauss)消元法求解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=5 & (1) \\ x+y+w=3 & (2) \\ x+z+w=7 & (3) \\ y+z+w=9 & (4) \end{cases}$$

解　由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(1)$，得 $w=3$；

由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(2)$，得 $z=5$；

由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(3)$，得 $y=1$；

由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(4)$，得 $x=-1$.

所以方程组的解为 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=5, \\ w=3. \end{cases}$

例 2　用高斯消元法求解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-4, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=16, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=-16. \end{cases}$

解　方程组对应的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & 16 \\ 3 & 1 & 2 & 11 & -16 \end{pmatrix}$$

而

$$B \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -7 & 26 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 8 & 31 \\ 0 & 0 & -5 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4+5r_3 \\ r_4\div(-71)}]{\substack{r_3-3r_4 \\ r_3\div 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2-r_3-r_4]{\substack{r_3+17r_4 \\ r_2+2r_3-3r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

故方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -3, \\ x_4 = -1. \end{cases}$

第二章 矩 阵

第一节 内容提要

一、矩阵的概念

1. 矩阵的定义

称由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $m \times n$ 矩阵，$m \times n$ 矩阵 A 简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$ 或 $A_{m\times n}$. a_{ij} 称为 A 的第 i 行第 j 列元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵.

2. 方阵

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. n 阶矩阵 A 也记为 A_n.

3. 行矩阵和列矩阵

只有一行的矩阵称为行矩阵(或行向量). 记为

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

只有一列的矩阵称为列矩阵(或列向量). 记为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

4. 零矩阵

元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记为 O.

5. 对角矩阵

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6. *n* 阶数量矩阵

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

7. *n* 阶单位矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

8. 上三角形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

9. 下三角形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

二、矩阵及其运算

1. 矩阵相等

两个矩阵的行数相等、列数也相等，就称它们是同型矩阵. 若 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，

$B=(b_{ij})_{m\times n}$，且 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

2. 矩阵的加法

定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A+B\triangleq(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

运算规律：

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

设 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称 $-A$ 为 A 的负矩阵. 显然

$$A+(-A)=O$$

规定　$A-B=A+(-B)$

3. 数与矩阵相乘

定义　数 λ 与矩阵 $A=(a_{ij})$ 的乘积，记为 λA 或 $A\lambda$，规定为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

运算规律：

(1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$，$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

4. 矩阵与矩阵相乘

定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则规定 A 与 B 的乘积为 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

记为 $C=AB$.

运算规律：

(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（$\lambda$ 为数）

(3) $(A+B)C=AC+BC$，$C(A+B)=CA+CB$

易见　$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$，简写成 $EA=AE=A$.

定义　设 A 是 n 阶方阵，A 的幂规定如下

$$A^1=A,A^2=A^1A^1,\cdots,A^{k+1}=A^kA^1$$

运算规律：$A^{k+l}=A^kA^l$，$(A^k)^l=A^{kl}$（k、l 为正整数）. 但，一般地，$(AB)^k\neq A^kB^k$.

5. 矩阵的转置

定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $A^{\mathrm{T}}\triangleq(b_{ij})_{n\times m}$，其中 $b_{ij}=a_{ji}$.

运算规律：

(1) $(A^{T})^{T}=A$

(2) $(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$

(3) $(\lambda A)^{T}=\lambda A^{T}$ (λ 为常数)

(4) $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$

对称矩阵　设 A 为 n 阶方阵，若 $A^{T}=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为对称矩阵，简称对称阵.

反称矩阵　设 A 为 n 阶方阵，若 $A^{T}=-A$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为反称矩阵，简称反称阵.

6. 共轭矩阵

定义　设 $A=(a_{ij})$，记 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$，称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵.

运算规律：

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$

三、矩阵的逆

定义　对于 n 阶方阵 A，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 A 是可逆的，并称 B 为 A 的逆矩阵，简称逆阵.

唯一性　若 A 可逆，则 A 的逆阵唯一.

逆的运算性质：

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$

(2) $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

对角阵的逆　设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，若 $\lambda_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$$

当 A 可逆时,还可定义

$$A^0 = E, A^{-k} = (A^{-1})^k$$

其中 k 为正整数. 这样,当 A 可逆,λ,μ 为整数时,有

$$A^{\lambda}A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^{\lambda})^{\mu} = A^{\lambda\mu}$$

四、分块矩阵

所谓矩阵分块,就是将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵,每个小矩阵称为 A 的子块,以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的运算(与普通矩阵的运算相类似).

(1) 设 A 与 B 有相同的行数和列数,且采用相同的分块法,即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中,$\forall i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,r$. A_{ij} 与 B_{ij} 的行数与列数分别相同,则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}$$

(2) 设 λ 为任一数,$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$,则 $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$.

(3) 设 A 是 $m \times l$ 矩阵,B 是 $l \times n$ 矩阵,分块成

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,r$. $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数,则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,r)$$

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$,则 $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

(5) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，其中 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，则称 A 为分块对角阵. 若 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 都是可逆阵，则 A 也可逆，且有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

两种常见的分块法：

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

(1) 记 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$；

(2) 记 $\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，则

$$AB=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$，则