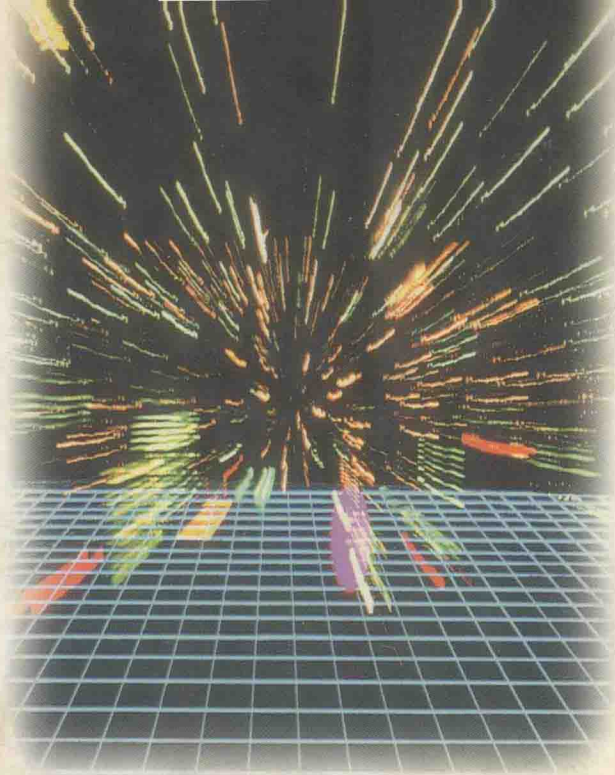




# 数学的源与流

张顺燕 编著

高等教育出版社

# 数学的源与流

张顺燕

编著



高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学的源与流 / 张顺燕编著. —北京: 高等教育出版社, 2000 (2001重印)  
ISBN 7-04-009104-6

I. 数... II. 张... III. 数学问题 - 研究  
IV. 01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第47676号

数学的源与流  
张顺燕 编著

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 北京市鑫鑫印刷厂

开 本 850×1168 1/32

版 次 2000年9月第1版

印 张 17.875

印 次 2001年6月第2次印刷

字 数 450 000

定 价 22.30元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

## 内容介绍

本书是北京大学数学素质教育课的主要教材.

内容包括著名的数学问题、具有重要实用价值的应用问题,还包括数学的一些近代应用.

本书立意新颖、内容丰富、涵盖面广、观点高、起点低,只要具备中等数学的基础就能读懂大部分内容;最后几章要用到初等微积分.本书可作为大专院校数学素质教育的参考书,对广大中学数学教师提高数学素养也极有参考价值<sup>①</sup>.

|      |     |
|------|-----|
| 责任编辑 | 胡乃同 |
| 封面设计 | 张楠  |
| 责任绘图 | 尹文军 |
| 版式设计 | 李洁  |
| 责任校对 | 李洁  |
| 责任印制 | 张小强 |

# 前 言

1998,1999 两年,笔者在中央教育电视台录制了“今日数学”讲座.对象是广大的中学数学教师.目的有二:

1. 介绍数学思想的演变和发展,加深对数学思想的理解;
2. 了解重大数学成果,及数学对人类文明的贡献,以达到开拓视野,启发灵性的效果.

现在的书名是高等教育出版社的张小萍等先生拟定的,比原名更好.但是,单靠书名来概括全书,这是难以做到的.还是要请读者看具体内容.

目前素质教育正在全国兴起,今年秋季北京大学将向全校(不分文、理,不分年级)开设数学素质教育课.数学学院领导建议由笔者来开这门课.笔者欣然接受,愿为素质教育效一份力.此书就成为这个课的最主要的教材,课程的大部分内容将从中选取.

本书也可供兄弟院校作为数学素质教育的教材,并根据本校的具体情况选取所需内容.

高教出版社的胡乃同先生对此给予以大力支持.作为急件,加速排版,力争在开学初出书,表现了出版界对素质教育之重视.

在讲座拍摄过程中,姜伯驹院士、武际可教授、李忠教授、潘承彪教授都曾给予鼓励与支持.姜伯驹院士建议讲《一笔画与邮递路线问题》,并慨然将他的名著提供给笔者.他的著作简单、精要,笔者基本上按他的著作讲授,只是后面作了一些引申.

全国人大副委员长丁石孙教授对讲座甚为关怀,尤为使笔者感动的是,他的藏书供笔者自由选用.1999 年春节一次就从他家借书 10 本,用了一年之久,使笔者收益甚大.他主编的《数学、我们、数学》丛书即在其中.这套丛书论述了数学与社会各个领域的联系,价值很

高,开了素质教育之先河.

本书需要的预备知识不多,大部分内容只要有高中数学的知识就可读懂.最后几章需要初等微积分的知识.

限于笔者的水平,错误是一定有的,欢迎读者批评指正.

张顺燕 于北京大学燕北园

2000年8月18日

# 目 录

|                    |      |
|--------------------|------|
| 前言                 | (1)  |
| 第一章 数学与人类文明        | (1)  |
| 1.1.1 数学的内容        | (1)  |
| 1.1.2 数学的特点        | (2)  |
| 1.1.3 数学对人类文明的贡献   | (3)  |
| 1.1.4 数学发展简史       | (4)  |
| 1.1.5 现代数学发展的新趋向   | (12) |
| 1.1.6 计算机的影响       | (13) |
| 1.1.7 关于中等教育       | (13) |
| 第二章 数系             | (15) |
| § 2.1 无理数的诞生       | (16) |
| 2.1.1 自然数          | (16) |
| 2.1.2 代数结构的出现      | (20) |
| 2.1.3 逆运算的作用       | (21) |
| 2.1.4 有理数的稠密性      | (22) |
| 2.1.5 有理数域         | (23) |
| 2.1.6 第一次数学危机      | (25) |
| 2.1.7 历史意义         | (27) |
| 2.1.8 第一次数学危机的消除   | (28) |
| 2.1.9 层次           | (28) |
| 2.1.10 反证法         | (29) |
| 习题                 | (30) |
| § 2.2 无限的比较        | (31) |
| 2.2.1 一段富有启发性的历史对话 | (31) |

|       |                                   |      |
|-------|-----------------------------------|------|
| 2.2.2 | 对谈话的分析和解答·····                    | (33) |
| 2.2.3 | 有理数集是可数的·····                     | (36) |
| 2.2.4 | 实数集是不可数的·····                     | (39) |
| 2.2.5 | 代数数·····                          | (40) |
| 2.2.6 | 无限的算术·····                        | (43) |
| 2.2.7 | 结语·····                           | (44) |
|       | 习题·····                           | (45) |
| § 2.3 | 复数·····                           | (46) |
| 2.3.1 | 复数的引进·····                        | (46) |
| 2.3.2 | 复数的几何表示·····                      | (46) |
| 2.3.3 | 复数的三角表示和指数表示·····                 | (48) |
| 2.3.4 | 复数域·····                          | (48) |
| 2.3.5 | 乘方与开方·····                        | (50) |
| 2.3.6 | 单位根·····                          | (52) |
| 2.3.7 | 复数的确认·····                        | (56) |
|       | 习题·····                           | (57) |
| 第三章   | 连分数及其在天文学上的应用·····                | (58) |
| § 3.1 | 从祖冲之的圆周率谈起·····                   | (58) |
| 3.1.1 | 辗转相除法·····                        | (58) |
| 3.1.2 | 祖冲之的约率 $22/7$ 和密率 $355/113$ ····· | (60) |
| 3.1.3 | 连分数·····                          | (60) |
| 3.1.4 | 约率和密率的内在意义·····                   | (67) |
|       | 习题·····                           | (69) |
| § 3.2 | 连分数在天文学上的应用·····                  | (69) |
| 3.2.1 | 为什么四年一闰,而百年又少一闰·····              | (69) |
| 3.2.2 | 公历的改革·····                        | (71) |
| 3.2.3 | 农历的月大月小、闰年闰月·····                 | (74) |
| 3.2.4 | 二十四节气·····                        | (75) |

|        |                            |       |
|--------|----------------------------|-------|
| 3.2.5  | 闰月放在哪儿·····                | (76)  |
| 3.2.6  | 日月食·····                   | (77)  |
| 3.2.7  | 日月合璧,五星联珠,七曜同宫·····        | (79)  |
| 3.2.8  | 干支记年·····                  | (80)  |
| § 3.3  | 连分数的性质·····                | (83)  |
| 3.3.1  | 渐近分数的性质·····               | (83)  |
| 3.3.2  | 渐近分数的表达式·····              | (84)  |
| 3.3.3  | 渐近分数的极限·····               | (87)  |
| 3.3.4  | 连分数的几何解释·····              | (89)  |
| 3.3.5  | 最佳逼近·····                  | (90)  |
| 3.3.6  | 方程 $x^2 = ax + 1$ 的解 ····· | (94)  |
| 3.3.7  | 斐波那契级数·····                | (94)  |
| 第四章    | 素数定理与哥德巴赫猜想 ·····          | (98)  |
| § 4.1  | 初等数论初步·····                | (98)  |
| 4.1.1  | 数论是什么·····                 | (98)  |
| 4.1.2  | 数论的一个特点:表面简单,实际难·····      | (99)  |
| 4.1.3  | 素数与合数·····                 | (99)  |
| 4.1.4  | 素数表 ·····                  | (100) |
| 4.1.5  | 算术基本定理 ·····               | (102) |
| 4.1.6  | 另一种“算术” ·····              | (104) |
| 4.1.7  | 最大公因数 ·····                | (105) |
| 4.1.8  | 函数 $[x], \{x\}$ ·····      | (105) |
| 4.1.9  | 费马素数 ·····                 | (108) |
| 4.1.10 | 完全数与梅森数·····               | (110) |
| 4.1.11 | 高斯的功绩·····                 | (116) |
|        | 习题·····                    | (117) |
| § 4.2  | 素数定理与哥德巴赫猜想 ·····          | (118) |
| 4.2.1  | 素数定理 ·····                 | (118) |

|                              |                      |              |
|------------------------------|----------------------|--------------|
| 4.2.2                        | 哥德巴赫猜想 .....         | (121)        |
| 4.2.3                        | 有关素数的 12 个问题 .....   | (125)        |
| <b>第五章 从勾股定理到费马大定理 .....</b> |                      | <b>(126)</b> |
| 引言 .....                     |                      | (126)        |
| § 5.1                        | 一次不定方程 .....         | (128)        |
| 5.1.1                        | 通解公式 .....           | (128)        |
| 5.1.2                        | 整数的模 .....           | (130)        |
| 5.1.3                        | 可解的充要条件 .....        | (132)        |
| 5.1.4                        | 如何求二元一次方程的解 .....    | (133)        |
| 5.1.5                        | 二元一次方程的非负解 .....     | (135)        |
| 5.1.6                        | 多元一次不定方程 .....       | (138)        |
| 习题 .....                     |                      | (140)        |
| § 5.2                        | 勾股定理 .....           | (140)        |
| 5.2.1                        | 问题 .....             | (140)        |
| 5.2.2                        | 第一个重要定理——勾股定理 .....  | (140)        |
| 5.2.3                        | 勾股定理的几何方面 .....      | (144)        |
| 5.2.4                        | 勾股定理的数论方面 .....      | (145)        |
| 5.2.5                        | 初等方法 .....           | (147)        |
| 5.2.6                        | 几何方法 .....           | (149)        |
| 5.2.7                        | 高斯的复整数 .....         | (151)        |
| 5.2.8                        | 类数问题 .....           | (154)        |
| 5.2.9                        | 高斯复整数法 .....         | (155)        |
| § 5.3                        | 与勾股定理有关的问题 .....     | (156)        |
| 5.3.1                        | 已知 $x$ 边求本原三角形 ..... | (156)        |
| 5.3.2                        | 已知 $y$ 边求本原三角形 ..... | (157)        |
| 5.3.3                        | 已知 $z$ 边求本原三角形 ..... | (158)        |
| 习题 .....                     |                      | (162)        |
| § 5.4                        | 费马大定理 .....          | (163)        |

---

|       |                        |       |
|-------|------------------------|-------|
| 5.4.1 | 费马和费马大定理 .....         | (163) |
| 5.4.2 | 无穷递降法 .....            | (165) |
| 5.4.3 | $n=4$ 的费马定理 .....      | (166) |
| 5.4.4 | $n=3$ 的情形 .....        | (168) |
| 5.4.5 | 初等方法的结束 .....          | (169) |
| 5.4.6 | 热尔曼的贡献 .....           | (169) |
| 5.4.7 | 库默尔的工作和理想数 .....       | (172) |
| 5.4.8 | 从丢番图到维尔斯 .....         | (173) |
| 5.4.9 | 费马大定理的推广 .....         | (176) |
| 第六章   | 欧氏几何回顾 .....           | (178) |
| § 6.1 | 欧几里得几何 .....           | (178) |
| 6.1.1 | 欧氏几何的诞生 .....          | (178) |
| 6.1.2 | 《几何原本》的历史背景 .....      | (180) |
| 6.1.3 | 欧氏几何的内容 .....          | (180) |
| 6.1.4 | 欧氏几何的优缺点 .....         | (182) |
| 6.1.5 | 欧氏几何的历史地位 .....        | (184) |
| 6.1.6 | 几何学在中学数学教育中的地位 .....   | (184) |
| § 6.2 | 尺规作图问题 .....           | (185) |
| 6.2.1 | 几何三大难题 .....           | (185) |
| 6.2.2 | 用尺规可作什么图 .....         | (186) |
| 6.2.3 | 有理数域的扩张 .....          | (187) |
| 6.2.4 | 一般讨论 .....             | (189) |
| 6.2.5 | 代数知识 .....             | (191) |
| 6.2.6 | 三大难题的解 .....           | (195) |
|       | 习题 .....               | (198) |
| § 6.3 | 正多边形作图 .....           | (198) |
| § 6.4 | 平行公设引起的思考 .....        | (200) |
| 6.4.1 | 从《几何原本》诞生到 18 世纪 ..... | (201) |

---

|       |                        |       |
|-------|------------------------|-------|
| 6.4.2 | 非欧几何的孕育时期 .....        | (202) |
| 6.4.3 | 非欧几里得几何的诞生 .....       | (205) |
| 6.4.4 | 罗巴切夫斯基的解答 .....        | (206) |
| 6.4.5 | 非欧几何的相容性 .....         | (207) |
| 6.4.6 | 黎曼的非欧几何 .....          | (208) |
| 6.4.7 | 欧氏几何与非欧几何 .....        | (209) |
| 6.4.8 | 爱尔兰根纲领 .....           | (211) |
| 6.4.9 | 各种几何与物理空间 .....        | (212) |
| 第七章   | 同余理论及其应用 .....         | (215) |
| § 7.1 | 同余式的性质 .....           | (215) |
| 7.1.1 | 同余的定义 .....            | (215) |
| 7.1.2 | 同余式的基本性质 .....         | (216) |
| 7.1.3 | 同余式的四则运算 .....         | (218) |
| 7.1.4 | 同余式的方幂 .....           | (220) |
| 7.1.5 | 检查因数的方法 .....          | (222) |
| 7.1.6 | 弃九法(验算整数计算结果的方法) ..... | (224) |
| 7.1.7 | 剩余类与完全剩余系 .....        | (226) |
|       | 习题 .....               | (228) |
| § 7.2 | 中国剩余定理 .....           | (229) |
| 7.2.1 | 同余式 .....              | (229) |
| 7.2.2 | 中国剩余定理 .....           | (232) |
| 7.2.3 | 程大位的口诀 .....           | (235) |
|       | 习题 .....               | (238) |
| § 7.3 | 费马小定理和欧拉定理 .....       | (238) |
| 7.3.1 | 费马小定理 .....            | (238) |
| 7.3.2 | 简化剩余系与欧拉函数 .....       | (241) |
| 7.3.3 | 欧拉定理 .....             | (244) |
| 7.3.4 | 对循环小数的应用 .....         | (245) |

---

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 习题              | (248) |
| § 7.4 同余式的应用    | (249) |
| 7.4.1 在密码学上的应用  | (249) |
| 7.4.2 素数鉴别      | (258) |
| 7.4.3 星期数       | (261) |
| 7.4.4 公式的证明     | (263) |
| 7.4.5 循环程序排列    | (265) |
| 习题              | (266) |
| 第八章 分形与混沌       | (267) |
| § 8.1 漫游分形      | (267) |
| 8.1.1 引言        | (267) |
| 8.1.2 海岸线的长度    | (269) |
| 8.1.3 科克曲线      | (270) |
| 8.1.4 皮亚诺曲线     | (271) |
| 8.1.5 分数维       | (273) |
| 8.1.6 几种基本的规则分形 | (275) |
| 8.1.7 自然界中的分形   | (278) |
| § 8.2 奇妙的混沌     | (282) |
| 8.2.1 混沌的定义     | (282) |
| 8.2.2 混沌的发现     | (283) |
| 8.2.3 蝴蝶效应      | (283) |
| 8.2.4 线性与非线性    | (284) |
| 8.2.5 函数的迭代     | (285) |
| 8.2.6 人口模型      | (287) |
| 8.2.7 逻辑斯蒂映射    | (288) |
| 8.2.8 茹利亚集      | (293) |
| 8.2.9 芒德布罗集     | (295) |

---

|                  |       |
|------------------|-------|
| 第九章 一笔画和邮递路线问题   | (300) |
| 9.1.1 问题的提出      | (300) |
| 9.1.2 一笔画问题      | (302) |
| 9.1.3 哥尼斯堡七桥问题   | (303) |
| 9.1.4 网络         | (305) |
| 9.1.5 一笔画定理      | (307) |
| 9.1.6 多笔画        | (312) |
| 9.1.7 偶网络        | (313) |
| 9.1.8 再论邮递路线问题   | (314) |
| 9.1.9 奇偶点网上作业法   | (315) |
| 9.1.10 什么是拓扑学    | (321) |
| 9.1.11 欧拉公式      | (324) |
| 9.1.12 四色问题      | (326) |
| 9.1.13 争论与困惑     | (328) |
| 习题               | (329) |
| 第十章 代数方程式        | (331) |
| § 10.1 三次方程与四次方程 | (332) |
| 10.1.1 什么是代数     | (332) |
| 10.1.2 二次方程      | (333) |
| 10.1.3 韦达公式      | (334) |
| 10.1.4 三次方程      | (336) |
| 10.1.5 实系数的三次方程  | (339) |
| 10.1.6 卡尔达诺公式小史  | (341) |
| 10.1.7 三次方程解法总结  | (341) |
| 10.1.8 四次方程      | (342) |
| 10.1.9 五次以上的代数方程 | (345) |
| 习题               | (347) |
| § 10.2 代数基本定理    | (347) |

---

|        |               |       |
|--------|---------------|-------|
| 10.2.1 | 引言            | (347) |
| 10.2.2 | 代数基本定理的证明     | (348) |
| § 10.3 | 多项式的根的分布问题    | (353) |
| 10.3.1 | 多项式的单根和重根     | (354) |
| 10.3.2 | 罗尔定理和它的推论     | (355) |
| 10.3.3 | 笛卡儿符号定则       | (356) |
| 10.3.4 | 辐角原理          | (359) |
| § 10.4 | 实根的近似算法       | (362) |
| 10.4.1 | 二分法           | (363) |
| 10.4.2 | 插值法           | (364) |
| 10.4.3 | 牛顿法           | (366) |
|        | 习题            | (368) |
| 第十一章   | 双曲几何的庞加莱模型    | (369) |
| § 11.1 | 球极平面投影        | (370) |
| 11.1.1 | 直线与圆的复数形式     | (370) |
| 11.1.2 | 复数的球面表示       | (372) |
| 11.1.3 | 球极投影的公式       | (372) |
| 11.1.4 | 球极投影的基本性质     | (374) |
| § 11.2 | 分式线性变换        | (375) |
| 11.2.1 | 线性变换          | (375) |
| 11.2.2 | 反演变换          | (377) |
| 11.2.3 | 倒数变换          | (379) |
| 11.2.4 | 分式线性变换        | (381) |
| 11.2.5 | 保角性           | (381) |
| 11.2.6 | 单位圆到自身的分式线性变换 | (383) |
|        | 习题            | (384) |
| § 11.3 | 非欧几何的庞加莱模型    | (384) |
| 11.3.1 | 非欧平面          | (385) |

|             |                      |              |
|-------------|----------------------|--------------|
| 11.3.2      | 非欧刚体运动               | (387)        |
| 11.3.3      | 罗巴切夫斯基公理系统           | (389)        |
| 11.3.4      | 三角形内角和小于 $180^\circ$ | (391)        |
| 11.3.5      | 真理性讨论                | (391)        |
| <b>第十二章</b> | <b>微积分前期史</b>        | <b>(395)</b> |
| § 12.1      | 积分学的早期史              | (397)        |
| 12.1.1      | 欧多克索斯的穷竭法            | (397)        |
| 12.1.2      | 阿基米德的平衡法             | (399)        |
| 12.1.3      | 不可分素方法               | (402)        |
| 12.1.4      | 不可分素方法的进一步发展         | (404)        |
| 12.1.5      | 刘徽的贡献                | (404)        |
| 12.1.6      | 祖暅原理                 | (406)        |
| § 12.2      | 微分学的早期史              | (407)        |
| 12.2.1      | 费马以前的工作              | (408)        |
| 12.2.2      | 费马求极大、极小值的方法         | (408)        |
| 12.2.3      | 费马求切线的方法             | (410)        |
| 12.2.4      | 费马在积分学方面的贡献          | (411)        |
| 12.2.5      | 巴罗的贡献                | (413)        |
| 12.2.6      | 前期史小结                | (415)        |
| § 12.3      | 牛顿和莱布尼兹              | (416)        |
| § 12.4      | 光辉的诞生                | (420)        |
| <b>第十三章</b> | <b>实数理论</b>          | <b>(422)</b> |
| § 13.1      | 第二次数学危机              | (422)        |
| 13.1.1      | 英雄世纪                 | (422)        |
| 13.1.2      | 第二次数学危机              | (423)        |
| 13.1.3      | 柯西的功绩                | (425)        |
| 13.1.4      | 魏尔斯特拉斯的规划            | (426)        |
| § 13.2      | 实数集合的基本性质            | (428)        |