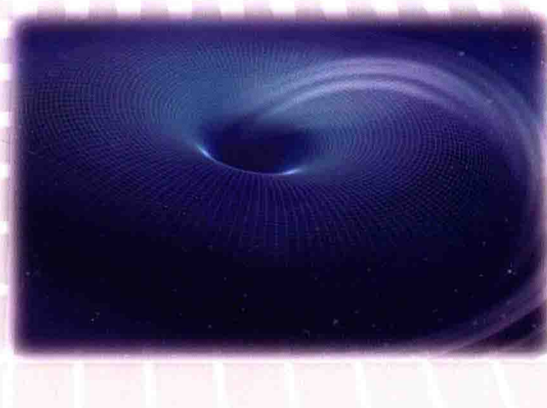
21世纪高等工科教育数学系列课程教材

积分变换与场论

JIFEN BIANHUAN YU CHANGLUN

彭　丽　张玲玲　任淑青　孟旭东　编著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高等工科教育数学系列课程教材

积分变换与场论

彭　丽　张玲玲　任淑青　孟旭东　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书内容包括Fourier(傅里叶)变换、Laplace(拉普拉斯)变换、数量场、矢量场的基本内容及其简单应用,是编者根据应用型本科院校的教育教学特点、学生基础状况及多年的教学经验编写而成。本书理论严谨,逻辑清晰,由浅入深,易于学习,是2012年度院级教育教学改革立项项目的研究成果。书中带*部分为选学内容,书后附有Fourier变换和Laplace变换表,以方便查用;各节后配有适量的习题,供读者掌握基本知识和基本计算方法;书末附有习题参考答案。

本书内容重视与电学、信号控制等专业学科的联系,适合作为应用型本科院校和独立院校电气、信号等专业基础课的教材,也可作为广大工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

积分变换与场论 / 彭丽等编著. — 北京 : 中国铁道出版社, 2015.8
21世纪高等工科教育数学系列课程教材
ISBN 978-7-113-17258-9

Ⅰ. ①积… Ⅱ. ①彭… Ⅲ. ①积分变换—高等学校—教材②场论—高等学校—教材 Ⅳ. ①O177.6②O412

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第125449号

书　　名: 积分变换与场论
作　　者: 彭　丽　张玲玲　任淑青　孟旭东　编著

策　　划: 李小军　　　**读者热线:** 400-668-0820
责任编辑: 李小军　徐盼欣
编辑助理: 许　璐
封面设计: 付　巍
封面制作: 白　雪
责任校对: 汤淑梅
责任印制: 李　佳

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)
网　　址: http://www.51eds.com
印　　刷: 三河市宏盛印务有限公司
版　　次: 2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
开　　本: 720 mm×960 mm　1/16　**印张:** 9.5　**字数:** 182千
书　　号: ISBN 978-7-113-17258-9
定　　价: 20.00元

前　言

“积分变换与场论”是电气、自动化等专业的一门重要专业基础课，在“电路”“自动控制”等专业课中有着广泛的应用。本课程一般采用高等教育出版社出版的《工程数学——积分变换》与《工程数学——矢量分析与场论》两本教材。为了方便师生使用，编者根据该课程教学大纲的教学要求以及多年的教学经验，在保证基本内容完整的前提下，删去了一些繁难之处，增添了一些实例，使本书更具实践性和应用性。本书侧重于基本理论与基本方法的应用，努力做到精确简练，深入浅出，通俗易懂。

本书具有如下特点：

(1)将积分变换与场论结合在一起作为一个学期的教学内容，这样既保证了教学质量，又节省了课时；

(2)增添了一些专业课中的实例，使学生充分认识到该课程的重要性，使其更好地完成与专业课的学习衔接，提高将实际问题转化为数学问题的能力；

(3)在基本方法的应用上，采用一题多解，力求富于启发性，以期达到融会贯通、增加学习兴趣的目的。

本书主要包括积分变换与场论两部分内容，其中第一部分(第1、2章)为积分变换，主要介绍Fourier(傅里叶)变换和Laplace(拉普拉斯)变换；第二部分(第3、4章)为场论，主要介绍数量场和矢量场。书中附有不同层次的习题，以供学生练习选用。

完成本教材基本教学内容大约需32课时，每章可根据学生实际情况选讲一些综合类习题。

本书由彭丽、张玲玲、任淑青、孟旭东编著。具体编写分工如下：第1章由任淑青编写，第2章由彭丽编写，第3章由张玲玲编写，第4章由孟旭东编写。全书由张玲玲统稿并最终定稿。本书的编写得到了李忠定教授的支持和鼓励，郑莉芳、安宏伟等教研室同事和专业课教师对本书的出版提出了很多建议，在此致以由衷的谢意。同时，我们也感谢参考文献中的诸位作者，本书从他们的著作中吸取了许多优秀思想，极大地丰富了本书内容。

由于水平所限，书中难免有错漏及欠妥之处，请读者批评指正，以使本书不断完善。

编　者

2015年1月

目　　录

第一部分　积 分 变 换

第二部分　场　　论

第一部分 积分变换

积分变换无论在数学理论还是工程应用中都是一种非常有用的工具，主要用来求解复杂的微积分方程. 常见的积分变换有傅里叶(Fourier)变换、拉普拉斯(Laplace)变换、梅林(Mellin)变换和亨克尔(Hankel)变换，本书重点介绍 Fourier 变换和 Laplace 变换，梅林变换和亨克尔变换都是由 Fourier 变换演变而来的，在此不再介绍.

Fourier 变换是一种分析信号的方法，用正弦波作为信号的成分，它既可以用来分析信号的成分，也可以用这些成分合成信号. 通俗地说，Fourier 变换表示能将满足一定条件的某个函数表示成三角函数(正弦函数或余弦函数)或它们积分的线性组合，在不同研究领域，Fourier 变换具有不同形式的变体形式，如连续 Fourier 变换和离散 Fourier 变换等.

Laplace 变换是为简化计算而建立的实变函数和复变函数之间的一种函数变换，对一个实变量函数作 Laplace 变换，并在复数域中作各种运算，再将运算结果作 Laplace 逆变换来求得实数域中的相应结果，比直接在实数域中求出同样的结果在计算上容易很多. 在经典控制理论中，用直观简便的图解方法来确定控制系统的整个特性，分析控制系统的运动过程，综合控制系统的校正装置等，都是建立在 Laplace 变换的基础上的.

第 1 章 Fourier 变换

本章将从以 T 为周期的函数 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上的 Fourier 级数展开式出发，讨论当 $T\to+\infty$ 时的极限形式，从而得出非周期函数的 Fourier 积分公式；然后在 Fourier 积分公式的基础上，引入 Fourier 变换的概念；并讨论 Fourier 变换的一些性质及应用.

§1.1 Fourier 积分

在物理学及一些其他学科中，除周期函数外，还会遇到一些非周期函数，如电学中的指数衰减函数和单位阶跃函数等，Fourier 级数的应用受到了限制，为此，本节引入 Fourier 级数的极限形式——Fourier 积分.

1.1.1 Fourier 级数

1. 三角表示式

在高等数学中，我们已经学习了以 T 为周期的函数 $f_T(t)$ 如果在区间 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷(Dirichlet)条件，即在区间 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足：

(1)连续或只有有限个第一类间断点；

(2)只有有限个极值点.

那么在 $f_T(t)$ 的连续点处，级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),\qquad(1.1.1)$$

其中，

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n=1,2,3,\cdots.$$

2. 复数表示式

在电子技术中为了方便起见,常利用欧拉(Euler)公式

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2}, \quad \sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2\mathrm{j}}$$

把函数 $f_T(t)$的 Fourier 级数改写成复数形式.此时,式(1.1.1)可写为

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2}+b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2\mathrm{j}}\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}, \end{aligned}$$

将 a_0,a_n,b_n 代入,得

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}t, \\ \frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2} &= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)(\cos n\omega t-\mathrm{j}\sin n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t \quad (n=1,2,3,\cdots), \\ \frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2} &= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t+\mathrm{j}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)(\cos n\omega t+\mathrm{j}\sin n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t \quad (n=1,2,3,\cdots), \end{aligned}$$

因此,得

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}.$$

若记

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t} \mathrm{d}t \quad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots),$$

$$\omega_n = n\omega,$$

则式(1.1.1)可写为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}. \tag{1.1.2}$$

这就是 **Fourier** 级数的复数表示式.

1.1.2 非周期函数 $f(t)$ 与周期函数 $f_T(t)$ 的关系

在 $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ 作函数 $f_T(t)=f(t)$，在其他区间上按周期 T 延拓至整个数轴上，如图 1-1-1 所示. 显然，T 越大，$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围就越大，这说明当 $T\to+\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$ 就可以转化为 $f(t)$，即

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} f_T(t). \tag{1.1.3}$$

因此，非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 展开式可以看成周期函数 $f_T(t)$ 的 Fourier 展开式当 $T\to+\infty$ 时的极限形式.

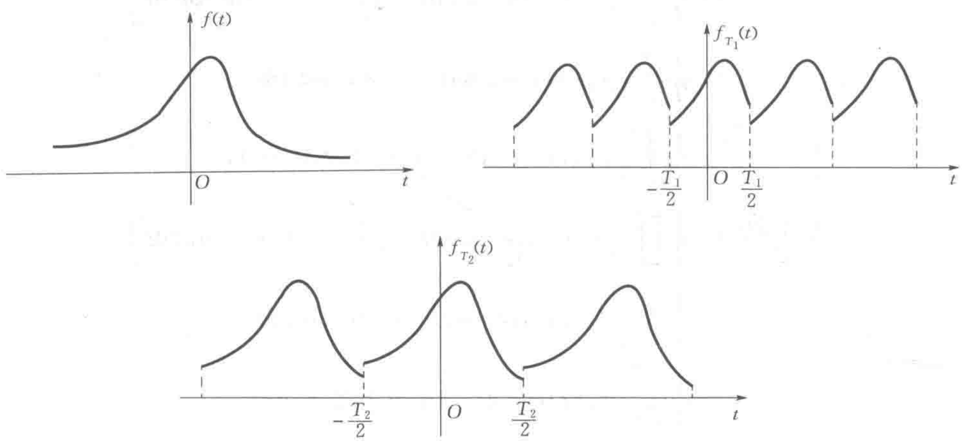


图 1-1-1

1.1.3 Fourier 积分

由式(1.1.2)和式(1.1.3)，得

$$f(t) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}. \tag{1.1.4}$$

当 n 取一切整数时，ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上，如图 1-1-2 所示. 若取两个相邻的点的距离以 $\Delta\omega_n$ 表示，即

图 1-1-2

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T} \quad \left(即\ T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n} \right),$$

则当 $T\to+\infty$ 时，有 $\Delta\omega_n\to 0$，所以式(1.1.4)又可以写为

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t} \Delta\omega_n, \tag{1.1.5}$$

当 t 固定时，$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}$ 是参数 ω_n 的函数，记为 $\Phi_T(\omega_n)$，即

$$\Phi_T(\omega_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t},$$

于是式(1.1.5)变为

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_T(\omega_n) \Delta\omega_n. \tag{1.1.6}$$

易见，当 $\Delta\omega_n\to 0$，即 $T\to+\infty$ 时，有 $\Phi_T(\omega_n)\to\Phi(\omega_n)$，即

$$\Phi(\omega_n) = \lim_{T\to+\infty} \Phi_T(\omega_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t},$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega_n) \mathrm{d}\omega_n,$$

即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \mathrm{d}\omega,$$

也即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega. \tag{1.1.7}$$

式(1.1.7)称为非周期函数 $f(t)$ 的 **Fourier 积分公式**.

需注意的是，上式只是形式上的，是不严格的. 关于一个非周期函数在什么条件下可以用 Fourier 积分公式表示，我们有如下定理：

定理(Fourier 积分定理) 若 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足：

(1)在任一有限区间上满足狄利克雷条件；

(2)在无限区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积(即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$收敛)，则在$f(t)$的连续点有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

当t为$f(t)$的第一类间断点时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}. \tag{1.1.8}$$

式(1.1.7)称为 **Fourier 积分的复数形式**，利用欧拉公式，可将它转化为三角形式.

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由于$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$是关于$\omega$的奇函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$是关于$\omega$的偶函数，从而上式可化为

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.9}$$

称式(1.1.9)为$f(t)$的 **Fourier 积分的三角形式**.

利用三角公式，式(1.1.9)可化为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega\tau\cos\omega t+\sin\omega\tau\sin\omega t)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega\\&=\int_{0}^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t]\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

其中，

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau,$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

当$f(t)$为奇函数时，

$$A(\omega)=0,$$
$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

此时得到

$$f(t)=\int_0^{+\infty}B(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega.\tag{1.1.10}$$

称式(1.1.10)为**正弦 Fourier 积分公式**.

同理,当 $f(t)$ 为偶函数时,

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau,$$
$$B(\omega)=0.$$

此时得到

$$f(t)=\int_0^{+\infty}A(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega.\tag{1.1.11}$$

称式(1.1.11)为**余弦 Fourier 积分公式**.

注意: 当 $f(t)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 时,可作奇延拓或偶延拓到 $(-\infty,+\infty)$,从而得到 $f(t)$ 的正弦或余弦 Fourier 积分公式.

例 1 求 $f(t)=\mathrm{e}^{-\beta|t|}\ (\beta>0)$ 的 Fourier 积分.

解 由 Fourier 积分公式

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta|\tau|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\tau}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta\tau}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\beta-\mathrm{j}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{\beta-\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{e}^{(\beta-\mathrm{j}\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)\tau}\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{\beta-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\beta+\mathrm{j}\omega}\\&=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2},\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t\,d\omega+j\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t\,d\omega\right).\end{aligned}$$

因为$\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t$ 是关于 ω 的偶函数，$\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t$ 是关于 ω 的奇函数，所以

$$f(t)=\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$$

由此可得一个含参量的广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}.$$

注意：$f(t)$ 是偶函数，故也可以用余弦 Fourier 积分公式即式(1.1.11)得到 $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau\,d\tau\right)\cos\omega t\,d\omega$，请读者自行完成.

例 2 求函数 $f(t)=\begin{cases}1 & 当\ 0<t<1\\0 & 当\ t>1\end{cases}$ 的 Fourier 积分，并由此证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

解 由于 $f(t)$ 只在 $(0,+\infty)$ 上有定义，因此可作偶延拓. $t=1$ 为 $f(t)$ 的间断点，在连续点处，由余弦 Fourier 积分公式，有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega\int_0^1\cos\omega\tau\,d\tau\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega,\end{aligned}$$

当 $t=1$ 时，有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\frac{1}{2},$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{当 } 0 < t < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{当 } t = 1 \\ 0 & \text{当 } t > 1 \end{cases}.$$

将 $t=1$ 代入，有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{4},$$

也即

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{4},$$

令 $2\omega = x$，则有

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

此积分称为**狄利克雷(Dirichlet)积分**.

在高等数学中，$\frac{\sin x}{x}$的原函数不存在，用找原函数的方法无法求出，但由例 2，用 Fourier 积分就能求出。

习　题　1.1

1. 求下列函数的 Fourier 积分.

(1) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{当 } |t|<1 \\ 0 & \text{当 } |t|>1 \end{cases}$；　(2) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{当 } |t|\leqslant\pi \\ 0 & \text{当 } |t|>\pi \end{cases}$；

(3) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } -\infty<t<-1 \\ -1 & \text{当 } -1<t<0 \\ 1 & \text{当 } 0<t<1 \\ 0 & \text{当 } 1<t<+\infty \end{cases}$.

2. 求下列函数的 Fourier 积分，并推证下列积分结果.

(1) 指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t<0 \\ \mathrm{e}^{-\beta t} & \text{当 } t\geqslant 0 \end{cases}$ $(\beta>0)$，证明