Elements of Number Theory and Vinogradov

HIT

数论经典著作系列

数论基础与维诺格拉多夫

[苏]维诺格拉多夫 著　　裘光明 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

数论基础与维诺格拉多夫

Elements of Number Theory and Vinogradov

●［苏］维诺格拉多夫 著 ● 裘光明 译

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内　容　提　要

本书是根据前苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное иэдателъство технико-теоретической литературы)1952年出版的维诺格拉多夫院士(Академик И. М. Виноградов)著《数论基础》修正第六版译出的,并增加了维诺格拉多夫传等相关内容.原书经前苏联高等教育部审定为综合大学物理数学系的教本.

本书的数论基础部分前出第五版译本(由商务印书馆出版)曾得到北京大学闵嗣鹤教授的帮助,同时,中国科学院数学研究所所长华罗庚教授为本书写了指导性的介绍,对读者有很大的帮助.

图书在版编目(CIP)数据

数论基础与维诺格拉多夫/(苏)维诺格拉多夫著;裘光明译. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5603-4552-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①维… ②裘… Ⅲ.①数论-高等学校-教材 ②维诺格拉多夫,I. M.(1891~1983)-传记 Ⅳ.①O156 ②K835.126.11

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第313552号

责任编辑	刘培杰　张永芹
责任编辑	张永芹　宋晓翠
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真	0451-86414749
网　　址	http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷	哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本	787mm×1092mm　1/16　印张11　字数210千字
版　　次	2014年1月第1版　2014年1月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5603-4552-9
定　　价	18.00元

简介

维诺格拉多夫院士的《数论基础》是数论领域里不可多得的一本深入浅出的好书，译成中文，对于大学数学系的学生和爱好数论的同志都是极有帮助的.

这本书是不能粗浅地阅读的！特别是习题部分，其中包含着十分丰富的题材，特别是维诺格拉多夫学派的基本技术. 如果读这本书而不看不做书后的问题，就好像入宝山而空返，把这书的最重要的部分忽略了！这些问题大部分都是有根据有源流的. 很多是历史上的著名问题，或是维氏自己的研究工作. 他精简地叙述了，他巧妙地安排了，使读者逐步做去，在不知不觉中证明了历史上有名的定理. 这些高度的技巧，可能是初读者不易发现的，同时也诚恐国内很少人能够指明给读者关于这些问题的出处. 因此我不揣冒昧地，在这里介绍一番.

在第二章的习题中，一开始就谈到两个数论上十分重要而未解决的问题：其中一个是有名的高斯(Gauss) 的圆内整点问题. 所谓整点是指两个坐标都是整数的点. 设 T 是以原点为圆心，r 为半径的圆内的整点的个数. 换句话说，T 就是适合

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2$$

的整数(x,y) 的对数. 经过第二章问题1. c，第三章问题6. a，逐步地证明了

$$T = \pi r^2 + O(r^{\frac{2}{3}} \ln r)$$

这是历史上有名的伏乐诺依和谢尔品斯基(Вороной-Sierpinski)的结果. 而所谓高斯问题,就是要求出 $T-\pi r^2$ 的最好的上限. 这是数论中一个十分困难的问题,近若干年来经过不少数学家的努力,逐步推进,整个的历史可以概括地叙述如下:

设 θ 是最小的正整数适合下面的条件:对于任意 $\alpha > \theta$,总有

$$T = \pi r^2 + O(r^{2\alpha})$$

谢尔品斯基证明 $\theta \leqslant \frac{1}{3}$;李特伍德(Littlewood)和瓦尔非兹(Walfitz)证明 $\theta \leqslant \frac{37}{112}$;尼兰德(Nieland)更证明 $\theta \leqslant \frac{27}{82}$;蒂奇马什(Titchmarsh)用双变数方次数函数和证明 $\theta \leqslant \frac{15}{46}$. 而最好的结果则是 $\theta \leqslant \frac{13}{40}$. 这是华罗庚在1935年所证明的. 但是这距离大家所猜测的 $\theta \leqslant \frac{1}{4}$ 还有些距离. 另一方面已经证明了 $\theta \nless \frac{1}{4}$. 如何来决定这个 θ 的数值,在数论中是一个难题.

接着圆内整点问题,维氏还提出迪利克雷(Dirichlet)的约数问题. 问题是这样的:求出适合

$$xy \leqslant n, x > 0, y > 0$$

的整点的个数 T 来. 经过第二章问题1. d和第三章问题6. b,可以证明

$$T = n(\ln n + 2E - 1) + O(n^{\frac{1}{3}}(\ln n)^2)$$

这是俄国大数学家伏乐诺依的结果. 但是如果读者把维氏的证明与伏乐诺依原来的证明比较一下,不难发现新的证法是便捷得多了. 就像圆内整点问题一样,我们引进 θ,这个 θ 的历史是这样:万·德·考柏(Wan der Corput)先后证明了 $\theta \leqslant \frac{33}{100}$ 和 $\theta \leqslant \frac{27}{82}$. 最好的结果是迟宗陶同志的 $\theta \leqslant \frac{15}{46}$. 他所用的方法是闵嗣鹤同志所提出的.

在讨论上述两个问题的过程中,维氏引入了一个十分重要的定理:(见第三章问题5. a,它前面一连串的问题都是帮助读者来证明这个定理的.)

设 $A > 2, k \geqslant 1$,函数 $f(x)$ 在间隔 $Q \leqslant x \leqslant R$ 里有连续的二阶导数而且有条件

$$\frac{1}{A} \leqslant |f''(x)| \leqslant \frac{k}{A}$$

以 $\{f(x)\}$ 表示 $f(x)$ 的分数部分,则

$$\left| \sum_{Q < x \leqslant R} \{f(x)\} - \frac{1}{2}(R-Q) \right| \leqslant (2k^2(R-Q)\ln A + 8kA)A^{-\frac{1}{3}}$$

这是一个十分重要的定理(非常有用的工具). 如果把这书中所安排着的

证明和万·德·考柏的相当的工作比较一下,不难发现这里要简捷多了.

在第二章的问题里,一连串地引进了不少关于素数分布的定理.特别是问题9,那是历史上有名的俄国数学大师切比雪夫(Чебышев)的工作.问题16是麦比乌斯(Möbius)函数的若干重要性质,而且也是与素数分布基本上相通的.问题17.a中引入了一个重要方法,这方法把"爱拉托赛尼(Eratosthenes)的筛子"公式化了.这与问题23.c联系起来,就是素数论上常用的白润(Brun)方法.也就是维氏著名工作"充分大的奇数是三个素数的和"的证明中用着的一端.问题24是这个方法的一个简单的应用.

第五章的问题11讨论了所谓高斯和数.他算出形式

$$\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{Ax^2+ax}{m}}$$

的和数的绝对值.在第六章问题11里更把这结果推进一步.他研究了

$$\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{ax^n}{m}}$$

的绝对值的上限.在问题15.a里更讨论了

$$\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{ax^n+bx}{m}}$$

的一个特例.由此引申出来,我们就会发问:和式

$$\sum_{x=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{f(x)}{m}},f(x)=ax^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的上限如何?这一个历史上的问题,已经由华罗庚解决了.

不要看轻第六章的问题13,这是维氏的重要贡献之一.从第四章问题11就开始了n次剩余的讨论,而第六章问题13则是关于n次剩余分布情形的优良结果.不等式中p的方次数$\frac{1}{c}(c=2e^{1-\frac{1}{n}})$是应当可以降低的.大家预测,可以用$p^{\varepsilon}$($\varepsilon$是任意正数)来代替$p^{\frac{1}{c}}$,但是这是一个迄未解决的问题.如果读者能得出比$\frac{1}{c}$小的数,也是值得发表的.而如果能解决这个问题,那对于数论的贡献是极大的.

同时第六章问题12.c也是维氏的重要贡献,华罗庚曾经把它推进一步.问题14也是维氏自己的工作.

第五章问题9是前苏联数学家高尔士可夫(Горшков)的结果,是普通书上所找不到的.我们知道,任意$4m+1$形式的素数p一定是两个平方数的和x^2+y^2.但是究竟如何把x和y写出来?高尔士可夫回答了这个问题

$$p=\left(\frac{1}{2}S(r)\right)^2+\left(\frac{1}{2}S(n)\right)^2$$

此处$\left(\frac{r}{p}\right)=1,\left(\frac{n}{p}\right)=-1$,而且

$$S(k)=\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x^2+k)}{p}\right)$$

此处像第四章问题7引进了克鲁斯脱曼(Kloostermann)和数,第五章问题10解决了佩尔(Pell)方程,第六章问题9引进了特征函数的基本性质,等.仔细地看来,就不难发现维氏的惊人的技巧.他把这许多重要的结果分成若干问题,使读者按部就班地,用做习题的方式,自己证明了这些结果.这是多么引人入胜的方法啊!

维诺格拉多夫院士的全名是伊凡·马脱维也维赤·维诺格拉多夫(Иван Матвеевич Виноградов),生在1892年.他是前苏联科学院院士,斯泰克洛夫数学研究所所长,他还是前苏联的社会主义劳动英雄,1941年获得斯大林奖金,1945年得到列宁勋章.他对数论有划时代的光辉贡献.对于用"三角和式的估值"来研究数论上的问题这一方面,在世界上是首屈一指的权威.特别是关于华林(Waring)问题的不朽的工作,以及震惊全球的关于哥德巴赫(Goldbach)问题的贡献.他的成就证明了社会主义的优越性,这正象征着我们的明天.

华罗庚

目录

可除性理论

第一章

1.1 基本的概念和定理

a. 数论是研究整数的性质的. 我们所说的整数不仅是自然数(正整数)1,2,3,…,还有零和负整数 $-1,-2,-3,\cdots$

通常在作理论的叙述时,我们用字母表示的只是整数. 当字母所代表的不是整数时,如果意义并不很明白,我们会作特别的声明.

两个整数 a 和 b 的和数,差数和乘积仍然是整数,但是 a 被 b 除(假如 b 不等于零) 所得到的商数,可以是整数,也可以不是整数.

b. 当 a 被 b 除得到的商数是整数时,假如把它记做 q,我们就有 $a = bq$,也就是说,a 等于 b 乘上一个整数. 那么我们就说,a 被 b 除尽或者 b 除尽 a. 这时 a 叫做 b 的倍数而且 b 叫做 a 的约数. b 除尽 a 这个事实,写作 $b \mid a$.

下面的两个定理成立.

1. 如果 a 是 m 的倍数,m 是 b 的倍数,则 a 是 b 的倍数.

实际上，从 $a = a_1 m, m = m_1 b$ 推出 $a = a_1 m_1 b$，这里 $a_1 m_1$ 是整数. 这就证明了定理.

2. 如果在等式 $k + l + \cdots + n = p + q + \cdots + s$ 中，除掉某一项以外，所有的项都是 b 的倍数，则这一项也是 b 的倍数.

实际上，设这一项是 k，则因为

$$l = l_1 b, \cdots, n = n_1 b, p = p_1 b, q = q_1 b, \cdots, s = s_1 b$$

所以

$$k = p + q + \cdots + s - l - \cdots - n = (p_1 + q_1 + \cdots + s_1 - l_1 - \cdots - n_1) b$$

这就证明了定理.

c. 在一般情形下，包括 a 被 b 除尽的特殊情形在内，我们有下列定理：

每一个整数 a 可以唯一地通过正整数 b 而被表示成

$$a = bq + r \quad 0 \leqslant r < b$$

实际上，取 bq 等于不超过 a 的 b 的最大倍数，我们得到 a 的这种形式的一个表示式. 假定还有 $a = bq_1 + r_1, 0 \leqslant r_1 < b$，我们得到 $0 = b(q - q_1) + (r - r_1)$，由此推出 $r - r_1$ 是 b 的倍数(b.2). 但是由于 $| r - r_1 | < b$，所得结果只在 $r - r_1 = 0$，即 $r = r_1$ 时才可能，于是还得出 $q = q_1$.

数 q 叫做 a 被 b 除的不完全商数，数 r 叫做 a 被 b 除的余数.

例子：设 $b = 14$，我们有

$$177 = 14 \times 12 + 9 \qquad 0 < 9 < 14$$
$$-64 = 14 \times (-5) + 6 \qquad 0 < 6 < 14$$
$$154 = 14 \times 11 + 0 \qquad 0 = 0 < 14$$

1.2 最大公约数

a. 以后我们只讨论数的正的约数. 同时除尽整数 $a, b, \cdots, l$ 的每一个整数都叫做它们的公约数. 公约数中最大的一个叫做最大公约数而且用符号 $(a, b, \cdots, l)$ 来表示. 由于公约数的个数是有限的，最大公约数显然存在. 如果 $(a, b, \cdots, l) = 1$，则 $a, b, \cdots, l$ 就说是互素的. 如果数 $a, b, \cdots, l$ 中的每一个都与别的每一个互素，则 $a, b, \cdots, l$ 叫做两两互素的. 明显地，两两互素的数一定也互素；而对于两个数来说，“互素”和“两两互素”的概念是一样的.

例子：数 6,10,15，由于 $(6,10,15) = 1$，是互素的. 数 8,13,21，由于

$$(8,13) = (8,21) = (13,21) = 1$$

是两两互素的.

b. 我们先来研究两个数的公约数.

1. 如果 a 是 b 的倍数，则数 a 和 b 的公约数的集合与单独一个 b 的约数的集合重合；特别地，$(a,b)=b$.

实际上，数 a 和 b 的每一个公约数都是单独一个 b 的约数. 反之，因为 a 是 b 的倍数，所以(1.1 节，b.1) b 的每一个约数也都是 a 的约数，这说是说它们都是数 a 和 b 的公约数. 因此数 a 和 b 的公约数的集合与单独一个 b 的约数的集合重合. 而因为数 b 的最大的约数是 b 自己，所以 $(a,b)=b$.

2. 如果

$$a=bq+c$$

则数 a 和 b 的公约数的集合与数 b 和 c 的公约数的集合重合；特别地，$(a,b)=(b,c)$.

实际上，上面所写的等式表明，数 a 和 b 的每一个公约数也除尽 c(1.1 节，b.2)，因而也是数 b 和 c 的公约数. 反之，这一个等式又表明，数 b 和 c 的约数除尽 a. 因而也是数 a 和 b 的公约数. 因此数 a 和 b 的公约数与数 b 和 c 的公约数是相同的一些数；特别地，这些公约数中最大的也应该相同，即 $(a,b)=(b,c)$.

c. 为了求出最大公约数，也为了获得它的最重要性质，用到下面叙述的欧几里得(Euclid) 算法. 设 a 和 b 是正整数. 按照 1.1 节，c，我们求得一串等式

$$\begin{cases} a=bq_1+r_2 & 0<r_2<b \\ b=r_2q_2+r_3 & 0<r_3<r_2 \\ r_2=r_3q_3+r_4 & 0<r_4<r_3 \\ \vdots & \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n & 0<r_n<r_{n-1} \\ r_{n-1}=r_nq_n & \end{cases} \tag{1}$$

这串等式当我们得到一个 $r_{n+1}=0$ 时才终止. 这后一点是必然的，因为 $b,r_2,r_3,\cdots$ 是递减的正整数列，不能包括多于 b 个的正整数.

d. 自上而下来看等式组(1)，根据 b，我们可以肯定，数 a 和 b 的全体公约数与数 b 和 r_2 的全体公约数重合，也与数 r_2 和 r_3 的，数 r_3 和 r_4 的，$\cdots$，数 r_{n-1} 和 r_n 的全体公约数重合，最后就与单独一个数 r_n 的全体约数重合. 同时我们还有

$$(a,b)=(b,r_2)=(r_2,r_3)=\cdots=(r_{n-1},r_n)=r_n$$

于是我们得到了下面的一些结果.

1. 数 a 和 b 的公约数的集合与它们的最大公约数的约数集合重合.

2. 这个最大公约数等于 r_n，也就是等于欧几里得算法最后的不等于零的余数.

例子：应用欧几里得算法求(525,231). 我们求得(辅助的计算写在右边)

$$
\begin{array}{r|l}
525 & 231 \\
\cline{2-2}
462 & 2
\end{array}
\qquad 525 = 231 \times 2 + 63
$$

$$
\begin{array}{r|l}
231 & 63 \\
\cline{2-2}
189 & 3
\end{array}
\qquad 231 = 63 \times 3 + 42
$$

$$
\begin{array}{r|l}
63 & 42 \\
\cline{2-2}
42 & 1
\end{array}
\qquad 63 = 42 \times 1 + 21
$$

$$
\begin{array}{r|l}
42 & 21 \\
\cline{2-2}
42 & 2
\end{array}
\qquad 42 = 21 \times 2
$$

这里最后的正余数是 $r_4 = 21$. 所以$(525,231) = 21$.

e. 1. 设 m 表示任意的正整数,我们有$(am,bm) = (a,b)m$.

2. 设 δ 表示数 a 和 b 的任意公约数,我们有$(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}) = \frac{(a,b)}{\delta}$;特别地,我们有$(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}) = 1$,这就是说,两个数被它们的最大公约数除所得的商数是互素的.

实际上,等式组(1) 逐项地乘上 m,我们得到新的等式组,在其中代替 $a,b,r_2,\cdots,r_n$ 的是 $am,bm,r_2m,\cdots,r_nm$. 所以$(am,bm) = r_nm$,因此命题 1 成立.

应用命题 1,我们求得

$$(a,b) = (\frac{a}{\delta}\delta,\frac{b}{\delta}\delta) = (\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta})\delta$$

由此推出命题 2.

f. 1. 如果$(a,b) = 1$,则$(ac,b) = (c,b)$.

实际上,由于(ac,b) 除尽 ac 和 bc,按照 d. 1 它也除尽(ac,bc),后者根据 e. 1 等于c;而(ac,b) 又除尽b,所以它也除尽(c,b). 反之,(c,b) 除尽ac和b,所以它除尽(ac,b). 因此,(ac,b) 和(c,b) 互相除尽,因而它们就相等了.

2. 如果$(a,b) = 1$ 而且 ac 被 b 除尽,则 c 被 b 除尽.

实际上,由于$(a,b) = 1$,我们有$(ac,b) = (c,b)$. 但是因为ac是b的倍数,所以按照 b. 1 我们有$(ac,b) = b$,这说明$(c,b) = b$,即 c 是 b 的倍数.

3. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中的每一个与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中的每一个互素,则乘积 $a_1a_2\cdots a_m$ 也与乘积 $b_1b_2\cdots b_n$ 互素.

实际上,从定理 1,我们有

$$(a_1a_2a_3\cdots a_m,b_k) = (a_2a_3\cdots a_m,b_k) = (a_3\cdots a_m,b_k) = \cdots = (a_m,b_k) = 1$$

然后,简写 $a_1a_2\cdots a_m = A$,用同样的方法我们求得

$$(b_1b_2b_3\cdots b_n,A) = (b_2b_3\cdots b_n,A) = (b_3\cdots b_n,A) = \cdots = (b_n,A) = 1$$

g. 求两个以上的数的最大公约数的问题,可以化成求两个数的公约数的问题. 那就是说,为了求得数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公约数,我们写出下列的一串数

$$(a_1,a_2) = d_2,(d_2,a_3) = d_3,(d_3,a_4) = d_4,\cdots,(d_{n-1},a_n) = d_n$$

数 d_n 就是所有已知数的最大公约数.

实际上,根据 d. 1 数 a_1 和 a_2 的全部公约数与 d_2 的全部约数重合,所以数 a_1, a_2, a_3 的全部公约数与数 d_2 和 a_3 的全部公约数重合,即与 d_3 的全部约数重合. 然后我们肯定,数 a_1, a_2, a_3, a_4 的全部公约数与 d_4 的全部约数重合,等. 最后,数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的全部公约数与 d_n 的全部约数重合. 而因为 d_n 的最大约数是 d_n 自己,所以它就是数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数.

看一下上面所引的证明,我们肯定定理 d. 1 对于两个以上的数也对. 定理 e. 1 和 e. 2 也是对的,这是因为用 m 去乘或者用 δ 去除所有的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,正像所有 $d_2, d_3, \cdots, d_n$ 都被 m 乘或者被 δ 除一样.

1.3 最小公倍数

a. 所有已知数的每一个整倍数都叫做它们的公倍数. 最小的正的公倍数叫做最小公倍数.

b. 我们先来研究两个数的最小公倍数. 设 M 是两个整数 a 和 b 的任意公倍数. 因为它是 a 的倍数,所以 $M = ak$,这里 k 是整数. 但是 M 又是 b 的倍数,所以

$$\frac{ak}{b}$$

也应该是整数. 假定 $(a,b) = d, a = a_1 d, b = b_1 d$,上面的整数就可以表示成 $\frac{a_1 k}{b_1}$,这里 $(a_1, b_1) = 1$(1. 2 节,e. 2). 所以 k 应该被 b_1 除尽(1. 2 节,f. 2),$k = b_1 t = \frac{b}{d} t$,这里 t 是整数. 由此

$$M = \frac{ab}{d} t$$

反之,明显地,这种形式的每一个 M 既是 a 的倍数,也是 b 的倍数,因此,这是数 a 和 b 的所有公倍数的一般形状.

这些公倍数中的最小正数,即最小公倍数,在 $t = 1$ 时得到. 它就是

$$m = \frac{ab}{d}$$

引用 m,求 M 的公式可以改写成

$$M = mt$$

最后这两个等式引出下列定理:

1. 两个数的公倍数的集合与它们的最大公约数的某倍数集合重合.

2. 两个数的最小公倍数等于它们的乘积除以它们的最大公约数.

c. 设现在需要求出两个以上的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数. 一般地用 $[a, b]$ 表示数 a 和 b 的最小公倍数,我们写下一串数

$$[a_1, a_2] = m_2, [m_2, a_3] = m_3, \cdots, [m_{n-1}, a_n] = m_n$$

用这种方法得到的 m_n 就是所有已知数的最小公倍数.

实际上,从 b. 1,数 a_1 和 a_2 的全部公倍数与 m_2 的全部倍数重合,所以数 a_1, a_2 和 a_3 的全部公倍数与 m_2 和 a_3 的全部公倍数重合,即与 m_3 的全部倍数重合. 然后我们肯定,数 a_1, a_2, a_3, a_4 的全部公倍数与 m_4 的全部倍数重合,等. 最后,数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的全部公倍数与 m_n 的全部倍数重合. 而因为 m_n 的最小的正倍数就是 m_n 自己,所以它就是数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数.

从上面的证明我们看到,定理 b. 1 对于两个以上的数也对. 此外,我们还肯定了下列定理的正确性:

两两互素的数的最小公倍数等于它们的乘积.

1.4 欧几里得算法与连分式的关系

a. 设 α 是任意的实数. 用 q_1 表示不超过 α 的最大整数. 在 α 不是整数时,我们有

$$\alpha = q_1 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \alpha_2 > 1$$

同样地,在 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}$ 不是整数时,我们有

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3} \quad \alpha_3 > 1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{s-1} = q_{s-1} + \frac{1}{\alpha_s} \quad \alpha_s > 1$$

根据这个,我们得出下列分割成连分式的 α

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \cfrac{1}{\alpha_s}}}} \tag{1}$$

如果 α 是无理数,则在数列 $\alpha, \alpha_2, \cdots$ 中显然不能遇到整数,以致这种表示的步骤可以无限制地继续下去.

如果 α 是有理数,则以后在 b 里将会看到,在数列 $\alpha, \alpha_2, \cdots$ 里一定会遇到整数,而这种表示的步骤是有尽头的.

b. 如果 α 是有理的不可约分数 $\alpha = \frac{a}{b}$，则分割 α 成连分式，就与欧几里得算法密切地有联系. 实际上，我们有

$$a = bq_1 + r_2, \frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_2}{b}$$

$$b = r_2q_2 + r_3, \frac{b}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}$$

$$r_2 = r_3q_3 + r_4, \frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3}$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

$$r_{n-1} = r_nq_n, \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$$

于是

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

c. 在数 α 所分割成的连分式里出现的数 $q_1, q_2, \cdots$ 叫做不完全的商数（按照 b，当 α 是有理数时，这就是欧几里得算法中逐次作除法所得的不完全的商数），分数

$$\delta_1 = q_1, \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \cdots$$

叫做近似分数.

d. 当我们注意到只要把 δ_{s-1} 里的 q_{s-1} 换成 $q_{s-1} + \frac{1}{q_s}$ 就得到 $\delta_s (s > 1)$ 时，我们很容易地发现了组成近似分数的非常简单的规律.

实际上，为了统一起见，假定 $P_0 = 1, Q_0 = 0$，我们可以依次把近似分数表示成下列形状（这里等式 $\frac{A}{B} = \frac{P_s}{Q_s}$ 表示 A, B 分别由符号 P_s, Q_s 来代替）

$$\delta_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1}$$

$$\delta_2 = \frac{q_1 + \frac{1}{q_2}}{1} = \frac{q_2q_1 + 1}{q_2 \times 1 + 0} = \frac{q_2P_1 + P_0}{q_2Q_1 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2}$$

$$\delta_3 = \frac{(q_2 + \frac{1}{q_3})P_1 + P_0}{(q_2 + \frac{1}{q_3})Q_1 + Q_0} = \frac{q_3P_2 + P_1}{q_3Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}$$

等,更普遍地

$$\delta_s = \frac{q_sP_{s-1} + P_{s-2}}{q_sQ_{s-1} + Q_{s-2}} = \frac{P_s}{Q_s}$$

因此,近似分数的分子和分母可以依次按着下面的式子来计算

$$\begin{cases} P_s = q_sP_{s-1} + P_{s-2} \\ Q_s = q_sQ_{s-1} + Q_{s-2} \end{cases} \tag{2}$$

这些计算可以用下面的表来做:

q_s		q_1	q_2	…	q_{s-2}	q_{s-1}	q_s	…	q_{n-1}	q_n
P_s	1	P_1	P_2	…	P_{s-2}	P_{s-1}	P_s	…	P_{n-1}	a
Q_s	0	1	Q_2	…	Q_{s-2}	Q_{s-1}	Q_s	…	Q_{n-1}	b

例子:把数$\frac{105}{38}$写成连分式. 这里

$$\begin{array}{r|l} 105 & 38 \\ 76 & 2 \\ \hline 38 & 29 \\ 29 & 1 \\ \hline 29 & 9 \\ 27 & 3 \\ \hline 9 & 2 \\ 8 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{105}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

所以上面所说的表是:

q_s		2	1	3	4	2
P_s	1	2	3	11	47	105
Q_s	0	1	1	4	17	38

e. 我们来观察邻接的近似分数的差数$\delta_s - \delta_{s-1}$. 当$s > 1$,我们有

$$\delta_s - \delta_{s-1} = \frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \frac{h_s}{Q_sQ_{s-1}}$$

这里$h_s = P_sQ_{s-1} - Q_sP_{s-1}$;把这式子里的$P_s$和$Q_s$用式(2)来代,再化简以后,我们得到$h_s = -h_{s-1}$. 最后这个式子结合$h_1 = q_1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$,就有$h_s = (-1)^s$.