普通高等学校经济数学规划教材

# 线性代数

主　编　吴建国

副主编　刘平兵

湖南大学出版社

# 线性代数

普通高等学校经济数学规划教材

# 线性代数

主　编　吴建国

副主编　刘平兵



湖南大学出版社

## 内 容 简 介

本书结合财经类高等学校本科专业线性代数课程的教学大纲及考研大纲，介绍了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、应用问题等知识。在编写中吸收了相关优秀教材的优点，概念讲述通俗易懂，突出数学方法的应用，对较烦琐的理论推导适当降低要求，并强调数学建模的思想和方法。各章配有例题和习题，书末附有习题参考答案，便于巩固知识，及时检测学习效果。

本书可作为高等学校经济、管理类本科专业的线性代数教材或教学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/吴建国主编．—长沙：湖南大学出版社，2015.6
（普通高等学校经济数学规划教材）
**ISBN 978－7－5667－0877－9**

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 141490 号

**线性代数**
XIANXING DAISHU

**主　　编：**吴建国
**责任编辑：**陈建华　郭　蔚　**责任校对：**全　健　**责任印制：**陈　燕
**印　　装：**长沙鸿和印务有限公司
**开　　本：**787×1092　16 开　**印张：**12.25　**字数：**306 千
**版　　次：**2015 年 7 月第 1 版　**印次：**2015 年 7 月第 1 次印刷
**书　　号：**ISBN 978－7－5667－0877－9/O・104
**定　　价：**32.00 元

**出 版 人：**雷　鸣
**出版发行：**湖南大学出版社
**社　　址：**湖南・长沙・岳麓山　　**邮　　编：**410082
**电　　话：**0731－88822559(发行部),88821327(编辑室),88821006(出版部)
**传　　真：**0731－88649312(发行部),88822264(总编室)
**网　　址：**http://www.hnupress.com
**电子邮箱：**presschenjh@hnu.edu.cn

# 前 言

由于科学技术的迅速发展，数量分析已渗透到社会、经济的各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认，数学的应用日益广泛深入。高等院校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设具有特别重要的意义。

线性代数作为高等院校各专业的基础数学课程之一，具有较强的逻辑性和抽象性。本书编写的宗旨是，以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标。本书既突出了数学方法与应用的介绍，又不失数学理论的系统性和科学性。

本书作为普通高等院校规划教材，适用于高等院校经济管理类专业的教学。教材内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、应用问题共六章，并附有数学实验、习题参考答案。教学时可以根据专业需要、学生基础、课时实际，有针对性地选择，实行模块化教学，使学生能更扎实地掌握所学知识，提高教学效果。

本书由具有多年一线教学经验的教师，根据当代经济管理类大学生的认知特点编写而成。全书由湖南财政经济学院吴建国教授担任主编，负责编写大纲的拟定和编写组织工作，并对全书进行总纂定稿。由刘平兵副教授担任副主编，负责部分初稿的修改和复核。各章编写人员依次是：第一章由周游编写，第二章、第六章由刘平兵编写，第三章由谭立编写，第四章、附录由吴建国编写，第五章由李建伟编写。全书由吴建国统稿。

本书在讨论编写过程中，博采众长，借鉴了许多同行的论著、编著等科研成果，得到了湖南财政经济学院有关领导及同行们的热情关心与大力支持，湖南大学出版社也为本书的编写出版给予了大量的帮助，在此一并表示深深的谢意！

由于时间仓促，教材中的不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正。

编　者

**2015 年 6 月**

# 目　次


第一章　行列式 …… 1

第一节　二阶、三阶行列式 …… 1

第二节　$n$ 阶行列式 …… 4

第三节　行列式的性质 …… 8

第四节　行列式按行(列)展开 …… 13

第五节　克莱姆(Cramer)法则 …… 21

习题一 …… 25

第二章　矩阵 …… 29

第一节　矩阵的概念 …… 29

第二节　矩阵的运算 …… 34

第三节　方阵的逆矩阵 …… 41

第四节　矩阵的分块 …… 45

第五节　矩阵的初等变换与行阶梯形矩阵 …… 50

第六节　初等矩阵与初等变换法求逆 …… 55

第七节　矩阵的秩 …… 62

习题二 …… 65

第三章　线性方程组 …… 70

第一节　线性方程组的消元解法 …… 70

第二节　线性方程组有解判别定理 …… 72

第三节　向量与向量组的线性组合 …… 79

第四节　向量组的线性相关性 …… 84

第五节　向量组的秩 …… 90

第六节　线性方程组解的结构 …… 93

习题三 …… 101

第四章　矩阵的特征值与特征向量 …… 104

第一节　向量的内积 …… 104

第二节　矩阵的特征值与特征向量 …… 109

第三节　相似矩阵 …… 113

第四节　实对称矩阵的对角化 …… 117

习题四 …… 120

**第五章　二次型**……………………………………………… 123
第一节　二次型与对称矩阵……………………………………… 123
第二节　二次型与对称矩阵的标准形…………………………… 124
第三节　正定二次型……………………………………………… 133
习题五…………………………………………………………… 137
**第六章　应用问题**……………………………………………… 139
第一节　交通流问题……………………………………………… 139
第二节　递归关系式的矩阵解法………………………………… 143
第三节　投入产出数学模型……………………………………… 145
习题六…………………………………………………………… 155
**附录　数学实验**………………………………………………… 157
实验一　行列式与矩阵…………………………………………… 157
实验习题一……………………………………………………… 164
实验二　线性方程组……………………………………………… 165
实验习题二……………………………………………………… 170
实验三　投入产出模型…………………………………………… 171
实验习题三……………………………………………………… 174
实验四　求矩阵的特征值与特征向量…………………………… 175
实验习题四……………………………………………………… 179
**习题参考答案**…………………………………………………… 181
习题一答案……………………………………………………… 181
习题二答案……………………………………………………… 181
习题三答案……………………………………………………… 184
习题四答案……………………………………………………… 186
习题五答案……………………………………………………… 187
习题六答案……………………………………………………… 188
**参考文献**………………………………………………………… 189

# 第一章　行列式

在自然科学、工程技术及管理科学中，有许多问题的数学模型是线性方程组，线性方程组的理论和解法是线性代数研究的主要对象之一，而行列式是研究线性方程组的一种重要工具.

本章主要介绍：$n$ 阶行列式的递归定义、基本性质、行列式的展开、计算方法以及用 $n$ 阶行列式解 $n$ 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

## 第一节　二阶、三阶行列式

### 一、二阶行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题. 为此，我们回顾初等代数中二元线性方程组的求解过程，从中引出二阶行列式的概念.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{①}$$

其中 $a_{ij}$ 表示第 $i$ 个方程中第 $j$ 个未知数的系数，$b_i$ 表示第 $i$ 个方程的常数项.

用消元法求解上述方程组，当 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ 时，得方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{②}$$

从上面的公式可见，两个分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，而 $a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12}$ 分别是该二元线性方程组未知数 $x_1, x_2$ 的系数，为了便于讨论和记忆，我们引入如下记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{③}$$

这就产生了二阶行列式.

**定义 1**　我们用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{ij}$ 表示这个行列式第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，横排为行，竖排为列.

二阶行列式的计算方法可按图 1-1 所示的对角线法则来进行：

即实线(主对角线)连接的两个元素的乘积,减去虚线(次对角线)连接的两个元素的乘积.

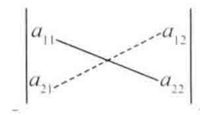


图 1-1　对角线法则

在式②中,分母是方程组①的系数按它们在方程组中的位置排成的行列式,称之为方程组的系数行列式,记为 $D$,分子则是用常数项 $b_1,b_2$ 代替 $D$ 中的第一、第二列所得到的二阶行列式,分别记为 $D_1,D_2$,即令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式②可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \qquad ④$$

**例 1**　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2=22, \\ 5x_1-3x_2=1. \end{cases}$$

**解**

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-41,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 22 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-73,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 22 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-108,$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{73}{41},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{108}{41}.$$

## 二、三阶行列式

**定义 2**　我们称符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为三阶行列式,它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad ⑤$$

三阶行列式有三行三列共九个元素.由定义可以看出,三阶行列式表示六项的代数和,每项为三个位于不同行、不同列的元素的乘积,其中三项为正号,三项为负.其运算规律可用“对角线法则”或“沙路法”来描述.

(1)对角线法则(如图 1-2 所示).

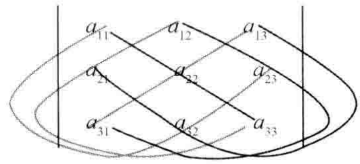



**图 1-2　对角线法则**

(2)沙路法则(如图 1-3 所示).

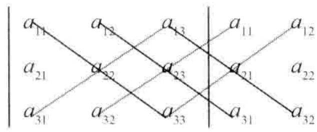



**图 1-3　沙路法则**

**注**　对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

类似的,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{⑥}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

若系数行列式 $D\neq 0$,则方程组有唯一解,即

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

**例 2**　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ -2x_1+x_2-x_3=-3, \\ x_1-4x_2+2x_3=-5. \end{cases}$$

**解**　用对角线法计算四个行列式,则

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=1\times 1\times 2+2\times(-1)\times 1+1\times(-4)\times(-2)-$$

$$1\times 1\times 1-1\times(-1)\times(-4)-2\times(-2)\times 2=11,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=33, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=11, D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix}=-22.$$

故 $$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=-2.$$

## 第二节　$n$ 阶行列式

我们的目的,是要把二阶和三阶的行列式推广到 $n$ 阶行列式,然后利用 $n$ 阶行列式解 $n$ 元线性方程组,为此,我们必须弄清二阶、三阶行列式的结构规律,才能推广到 $n$ 阶行列式.

考察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出三阶行列式具有如下特征:

(1)三阶行列式表示位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和.三个元素的乘积称为行列式的项,可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,其中 $j_1,j_2,j_3$ 取遍所有 1,2,3 这三个数字的排列,故三阶行列式共有 3! =6 项.

(2)行列式的每一项都带有符号,当行标成自然排列时,符号与列标 $j_1j_2j_3$ 的排列顺序有关.

那么,每一项前面的符号按什么规则来确定呢?为了精确地叙述这一规则,必须引入排列和逆序等定义.

### 一、排列、逆序与对换

**定义 1**　由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 $n$ 级排列(简称排列).

例如,1234,2431 都是 4 级排列,而 415362 是一个 6 级排列.

**定义 2**　在一个 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 $i_t$ 排在较小的数 $i_s$ 前面($i_t>i_s$),则称 $i_t$ 与 $i_s$ 构成一个逆序.一个 $n$ 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记为$N(i_1i_2\cdots i_n)$.

**定义 3**　如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数是奇数则称为奇排列,是偶数则称为偶排列.

一般地,我们可以根据如下方法计算排列的逆序数:

设在一个 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 当中,比 $i_k$ 大的且排在 $i_k$ 前面的数共有 $t_k$ 个,则 $i_k$ 的逆序的个数为 $t_k$,而该排列中所有自然数的逆序之和就是该排列的逆序数,即

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

**例 1**　求排列 23154 的逆序数.

**解**　方法一　直接用逆序数的定义,因为 2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序,故

$$N(23154)=3.$$

方法二　对于 5 级排列 23154,可以这样来计算逆序数:

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

所以所求排列的逆序数为 $N(23154)=0+0+2+0+1=3$,可以看出该排列是奇排列.

**例 2**　求排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数,并讨论其奇偶性.

**解**　类似于上例方法二的讨论,可以排出下表:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{排列} & n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{array}$$

则所求逆序数为

$$N(n(n-1)\cdots321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所以当 $n=4k,4k+1$ 时,该排列是偶排列;当 $n=4k+2,4k+3$ 时,该排列是奇排列.

**定义 4**　在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 $i_s$ 与 $i_t$ 对调,其他数码不变,得到另外一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换,称为一个对换,记为对换$(i_s,i_t)$.将相邻两个元素对换,称为相邻对换.

**定理 1**　一个对换改变排列的奇偶性.

**证**　(1)首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形,设排列为 $AijB$,其中 $A,B$ 表示除 $i,j$ 两个数外的其余数字,经过对换$(i,j)$,变为排列 $AjiB$,比较上面两个排列中的逆序,显然,$A,B$ 中的数字的逆序数没有改变,并且 $i,j$ 与 $A,B$ 中数字的次序也没有改变,仅仅改变了 $i$ 与 $j$ 的次序,因此,新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时),或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时),所以它们的奇偶性相反.

(2)在一般情形,设原排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB,$$

经过对换$(i,j)$,变成新排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB,$$

由原排列中将数码 $i$ 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换,变为

$$Ak_1k_2\cdots k_sjiB.$$

再将 $j$ 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 $s$ 次相邻对换得到新排列,即新排列可以由原来的排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到.由(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性,所以它与原排列的奇偶性相反.

**定理 2**　$n$ 个自然数$(n>1)$共有 $n!$个 $n$ 级排列,其中奇偶排列各占一半.

**证**　设在 $n!$个 $n$ 阶排列中,有 $p$ 个不同的奇排列,$q$ 个不同的偶排列,这样有 $p+q=n!$,我们来证明 $p=q$.

对每一个奇排列都施以同一的对换,例如都对换(1,2),由定理 1 知 $p$ 个奇排列全部变为偶排列,于是有 $p\leqslant q$;同理将全部偶排列也都施以同一对换,则 $q$ 个偶排列全部变为奇排列,于是又有 $q\leqslant p$,所以有 $p=q$,即奇偶排列的个数一样,所以分别为$\frac{n!}{2}$个.

## 二、$n$ 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

由此可以看出三阶行列式的一些规律：

(1)三阶行列式中表示所有位于不同行不同列的三个元素乘积的代数和，且每一项中元素的行标按自然顺序排列，我们称这样的项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 为标准形式.

(2)三阶行列式共有 $3!=6$ 项，它恰好是列标排列 $j_1j_2j_3$ 的可能个数，即 123 的全排列个数.

(3)当这一项写成标准形式后，每一项的符号由列标构成的排列来决定，如果是偶排列取正号，奇排列则取负号，因而项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$.

所以三阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示遍取所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 时，对一般项 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 求和.

显然，二阶行列式也符合这些特征，并可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{N(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

根据二、三阶行列式的特征，我们给出 $n$ 阶行列式的定义.

**定义 5** 由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}$ 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 $n$ 阶行列式(其中横排为行，竖排为列. 元素 $a_{ij}$ 位于行列式的第 $i$ 行和第 $j$ 列)，它表示所有取自不同行、不同列的 $n$ 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若列标构成的排列是偶排列取正号，是奇排列则取负号，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 $n$ 级排列求和，共有 $n!$ 项. 称 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式

的一般项. 行列式有时候简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

**注**　(1) $n$ 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,且冠以正号和负号的项各占一半,因此,行列式实质是一种特殊定义的数;

(2) 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$,不要与绝对值记号相混淆.

**例 3**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**解**　这是一个 4 阶行列式. 在其展开式中应有 $4!=24$ 项,每一项都是取自不同行、不同列的 4 个数的乘积. 若这 4 个数之一为 0,则这乘积为零. 所以不等于零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项. 而

$$N(4\ 3\ 2\ 1)=6,$$

所以
$$D=(-1)^{N(4\ 3\ 2\ 1)}1\times 2\times 3\times 4=24.$$

**例 4**　计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$$

**解**　根据 $n$ 阶行列式的定义 5,得 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

在 $D$ 的一般项中,只有当 $j_n=n, j_{n-1}=n-1,\cdots,j_2=2,j_1=1$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不等于零,所以 $D=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

上述行列式称为上三角行列式,其特征为主对角线以下的元素全为零,主对角线以上的元素不全为零.

类似可以求解下三角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

下面我们不加证明地给出 $n$ 阶行列式的等价表达形式：

**定理 3** $n$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的一般项可以表示为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \qquad ①$$

或

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \qquad ②$$

①式为列标是自然数列，行标是 $n$ 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 时的一般项，而②式为行标 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和列标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 $n$ 级排列的一般项.

式子的价值在于丰富了用定义计算行列式的方法，即不一定只用行标是自然排列、列标是 $n$ 级排列来计算 $n$ 阶行列式. 也可用列标是自然排列、行标是 $n$ 级排列，或行标、列标都是 $n$ 级排列来计算 $n$ 阶行列式.

例如，计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

既可按定义 5 计算：$D=(-1)^{N(1423)}abcd=abcd$；又可按①计算得

$$D=(-1)^{N(1342)}acdb=abcd;$$

还可按②式计算，这种解法留给读者自己完成.

**例 5** 判断下列两项是不是六阶行列式的项.

(1) $a_{32}a_{44}a_{51}a_{15}a_{22}a_{66}$；　　(2) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{64}a_{35}$.

**解** (1)行标 345126 是六级排列，而列标 241526 不是六级排列(有重复数字 2)，所以该项不是六阶行列式的项.

(2)行标排列 251463 的逆序数为 $N=0+0+2+1+0+3=6$，

列标排列 136245 的逆序数为 $N=0+0+0+2+1+1=4$，

所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{64}a_{35}$ 前面应带正号，该项是六阶行列式中的项.

## 第三节　行列式的性质

用行列式的定义直接计算高阶行列式通常是很困难的. 因为当 $n$ 阶行列式的阶数较高时，计算量非常大. 例如一个六阶行列式，仅加减乘除运算就多达几千次. 因此本节主要研究 $n$ 阶行列式的性质，揭示 $n$ 阶行列式的运算规律，从而丰富 $n$ 阶行列式的运算方法.

### 一、行列式的性质

将 $n$ 阶行列式 $D$ 的行与列依次互换以后得到的行列式，称为 $n$ 阶行列式 $D$ 的转置行列式，记为 $D^{\mathrm{T}}$(或 $D'$).

若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

转置行列式具有如下性质：

**性质 1**　行列式 $D$ 与其转置行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 相等. 即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质说明，在行列式中，行与列的地位是对称的、平等的. 对行成立的性质对于列也同样成立，下面行列式的其他性质都具有这个特点，因此一般仅对行给出证明.

**性质 2**　交换行列式的两行（列），行列式变号.

**推论 1**　若行列式有两行（列）的元素对应相等，则该行列式为零.

**证**　互换相同的两行（列），有 $D=-D$，故 $D=0$.

**性质 3**　行列式的某一行（列）的所有元素都有公因子 $k$，则 $k$ 可以提到行列式符号之外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证**　由行列式的性质，有

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots ka_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \end{aligned}$$

**推论 2**　行列式有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

**证**　设行列式 $D$ 有两行对应元素成比例，不妨设第 $i$ 行是第 $j$ 行 $(j\neq i)$ 的 $k$ 倍 $(k\neq 0)$，把 $D$ 中第 $i$ 行的公因数 $k$ 提到行列式外面，就得到一个第 $i$ 行与第 $j$ 行的对应元素相同的行列式 $D_1$，由推论 1 知 $D_1=0$，于是 $D=kD_1=0$.

**性质 4**　若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2.$$

**证** $D=\sum\limits_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=\sum\limits_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum\limits_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

$=D_1+D_2.$

**推论 3** 如果将行列式某一行(列)的每个元素都写成 $m$ 个数($m$ 为大于 2 的整数)的和,则此行列式可以写成 $m$ 个行列式的和.

**性质 5** 将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 $k$ 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 利用性质 4 和推论 2 有

$$\text{右端}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+0=\text{左端}.$$