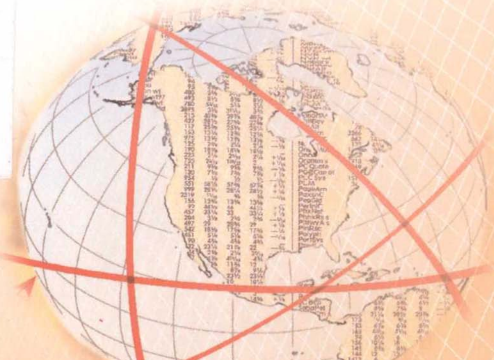
21世纪应用型本科院校规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

（第二版）

主编 刘坤
许定亮



南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

线性代数

（第二版）

主　编　刘　坤　许定亮

副主编　高　枫

南京大学出版社

内容提要

本书是作者根据教育部大学本科数学基础课程教学基本要求(2014 年版),在多年从事工科类和经济管理类等专业线性代数教学基础上编写而成的.

本书第二版在正文的基本内容及教材的体系和章节安排方面基本与原书一致,保留了原书的风格,补充了考研内容.第二版的变化主要有以下特点:改变了部分内容的阐述方式,正文有些部分的阐述更为精炼和简明易懂;对例题和习题的配置作了一些调整和补充.例题和习题更丰富,题型也更多样.书后增加了历年考研题与参考解答,更便于考研的同学学习.全书共分五章,内容包括:行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性、线性方程组与高斯消元法、矩阵的特征值和特征向量、相似矩阵、矩阵的对角化、二次型.书末附有习题答案.

本书内容丰富,编写层次清晰,阐述深入浅出,语言简明扼要.

本书可作为高等学校工科类和经济管理类各专业的本科生教材,也可作为教学参考书和考研用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 刘坤,许定亮主编. -- 2 版. -- 南京 :南京大学出版社,2015.6

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-15009-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘… ②许… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 073736 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 线性代数(第二版)
主　　编 刘　坤　许定亮
责任编辑 陈亚明　单　宁　　编辑热线 025-83686531

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京新洲印刷有限公司
开　　本 787×960　1/16　印张 20　字数 245 千
版　　次 2015 年 6 月第 2 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-15009-8
定　　价 39.50 元

网址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025) 83594756

前言

线性代数是一门基础数学课程.它的基本概念,理论和方法,具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性.它的思想和方法在工程技术和经济管理中已得到广泛应用.

本书是作者根据教育部大学本科数学基础课程教学基本要求(2014 年版),在多年从事工科类和经济管理类等专业线性代数教学基础上编写而成的.

本书对线性代数的传统内容进行了整合,使其更便于讲授和学生接受;在难易程度上充分考虑了高等教育大众化背景下的学生特点与教学特点,既删除了较艰深的理论推导,突出应用性,又保持了理论体系的连贯性和完整性,以便为学生继续深造和考研提供保障.本书注重讲清用数学知识解决实际问题的基本思想和方法,着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力.本书第二版在正文的基本内容及教材的体系和章节安排方面基本与原书一致,保留了原书的风格,补充了考研内容,书后增加了历年考研题与参考解答.第二版的变化主要有以下特点:

1. 改变了部分内容的阐述方式,正文有些部分的阐述更为

精炼和简明易懂.

2. 对例题和习题的配置作了一些调整和补充.例题和习题更丰富,题型也更多样.突出了知识点,与研究生入学考试试题题型一致,这不仅使有志于攻读硕士研究生的学生能在学习过程中作适当的准备,而且所有学生也能从中具体理解线性代数课程的基本要求和重点.

本书由刘坤和许定亮任主编.其中第一章由刘坤编写;第二章由刘坤和高枫编写;第三章正文由高枫编写,习题由刘坤和高枫编写;第四章正文由许定亮编写,习题由刘坤和许定亮编写;第五章由刘坤和许定亮编写;历年考研真题与参考解答由刘坤编写;刘坤撰写编写大纲与统稿.

在本书的编写过程中得到了常州工学院教务处领导和数理与化工学院领导的大力支持,同时也得到了南京大学出版社的大力支持,在此向他们深表谢意!

由于编者水平有限,书中错误疏漏之处在所难免,望广大读者和同行专家批评指正.

编　者

2015 年 5 月

目 录

第1章 行列式

行列式是人们在求解线性方程组的过程中建立起来的. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法,同时还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1.1 全排列及其逆序数

1.1.1 全排列及其逆序数的概念

定义 1.1 **把 n 个不同的元素排成一排,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列).**

例如,自然数 1,2,3,4 构成的不同排列有 $4!=24$ 种.

1234	1342	1423	1432	1324	1243
2134	2341	2413	2431	2314	2143
3124	3241	3412	3421	3214	3142
4123	4231	4312	4321	4213	4132

例 1 互异元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 构成的不同排列有 $n!$ 种.

解 在 n 个元素中选取 1 个　　n 种取法

在剩余 $n-1$ 个元素中选取 1 个　　$n-1$ 种取法

在剩余 $n-2$ 个元素中选取 1 个　　$n-2$ 种取法

……　　……

在剩余 2 个元素中选取 1 个　　2 种取法

在剩余 1 个元素中选取 1 个　　1 种取法

于是由乘法原理可知共有 $n!$ 种取法.

对于 n 个不同的元素，我们可以规定各元素之间有一个标准次序. 例如 n 个不同的自然数可规定从小到大为标准次序.

定义 1.2　在 n 个不同的元素按照某种约定次序构成的排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，称这两个元素之间有一个逆序. 一个排列中逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列；$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列. 当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为零时，称 $p_1p_2\cdots p_n$ 为标准排列.

不妨设排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 1 至 n 这 n 个自然数的一个排列，规定从小到大为标准次序. 考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 τ_i 个，就说 p_i 的逆序数是 τ_i.

那么 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau_1+\cdots+\tau_n$.

例 2　排列 6372451 中，$\tau=\tau_1+\cdots+\tau_7=0+1+0+3+2+2+6=14$. 故排列 6372451 为偶排列.

例 3　排列 $1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 4\ 2$，求逆序数.

解　记作 $p_1p_2\cdots p_np_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{2n-1}p_{2n}$.

$\tau_1=0,\cdots,\tau_{n+1}=0$.

$\tau_{n+2}=2=2\times1,\tau_{n+3}=4=2\times2,\cdots,\tau_{2n}=2\times(n-1)$.

$$\begin{aligned}\tau&=2[1+2+\cdots+(n-1)]\\&=n(n-1).\end{aligned}$$

1.1.2　对换

定义 1.3　把一个排列中某两个元素的位置互换，而其余的元素不动，就得到另一排列，这样一个变换称为一个对换.

例如，经过 1,2 对换，排列 1324 就成 2314. 显然，如果连续进行两次相同的对换，那么排列就还原了.

对换有相邻对换：$p_1\cdots p_ip_{i+1}\cdots p_n\to p_1\cdots p_{i+1}p_i\cdots p_n$，

一般对换：$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n\to p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n(i<j)$.

定理 1.1　排列经过一次对换，其奇偶性改变.

证 先证相邻对换：

(1) $a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m$；

(2) $a_1\cdots a_l b a b_1\cdots b_m$.

$a<b$：对换后 τ_a 增加 1，τ_b 不变，故 $\tau_2=\tau_1+1$.

$a>b$：对换后 τ_a 不变，τ_b 减少 1，故 $\tau_2=\tau_1-1$.

所以 τ_2 与 τ_1 的奇偶性相反.

再证一般对换：

(1) $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$；

(2) $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m a b c_1\cdots c_n$；

(3) $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$.

(1)→(2)经过 m 次相邻对换，(2)→(3)经过 $m+1$ 次相邻对换，(1)→(3)经过 $2m+1$ 次相邻对换，所以 τ_3 与 τ_1 的奇偶性相反.

推论 1 奇排列变为标准排列的对换次数为奇数，偶排列变为标准排列的对换次数为偶数.

推论 2 所有 n 个元素构成的排列中($n\geqslant 2$)，奇排列与偶排列各占一半.

例如，在 1，2，3 三个数的排列中，132，213，321 为奇排列，123，231，312 为偶排列.

§1.2 n 阶行列式的定义

1.2.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

通过消去 x_1，x_2，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可求得方程组(1-1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

(1-2)中的分子分母都是由方程组(1-1)的四个系数与常数项确定的.由于它们的结构相似,考察分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,是由方程组(1-1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组中的位置,排成二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1-3)所确定的二阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式(1-4)的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表示元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表示元素位于第 j 列.

利用行列式的概念,(1-2)式中的分子也可表示为

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

再记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则方程组(1-1)的解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}.$$

其中分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式,x_2

的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

所以有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

1.2.2　三阶行列式

定义 1.4　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \tag{1-6}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(1-6)**式称为数表**(1-5)**所确定的三阶行列式.**

上述定义表明三阶行列式是 6 项含有三个元素乘积的代数和，每项均为不同行不同列的三个元素乘积再冠以正负号，其从左上角到右下角方向称为

主对角线方向，三项乘积取正号；从右上角到左下角方向称为次对角线方向，三项乘积取负号.

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D=2\times1\times1+(-4)\times5\times1+1\times(-3)\times(-1)-1\times1\times1-(-4)\times(-3)\times1-2\times5\times(-1)=-18$.

1.2.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的结构.

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以看出：

(1) 乘积中三个数不同行、不同列，项的一般形式为：$\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 行标(第 1 个下标)排列为标准排列 123；列标(第 2 个下标)排列为 $p_1p_2p_3$，是 1，2，3 的某个排列(共 6 种).

(2) 正项：123，231，312 为偶排列；负项：132，213，321 为奇排列.

于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2p_3)} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

其中 $\sum\limits_{(p_1p_2p_3)}$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

上述规律对二阶行列式显然也成立. 按此规律，可把行列式推广到一般形式.

定义 1.5 n^2 **个数** $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，**排成** n **行** n **列的数表**

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1-7}$$

令 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \tag{1-8}$$

式(1 - 8)称为数表(1 - 7)的 n 阶行列式，其中 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 表示对 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和.

行列式(1 - 8)常简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 中的第 i 行、第 j 列的元素.

定义表明，n 阶行列式是所有形如

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

的项的和，即：

(1) 每一项是 n 个元素的乘积，且这 n 个元素取自不同的行和不同的列.

(2) $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 表示对 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和，而这所有的排列有 $n!$ 种，所以各和式共有 $n!$ 项.

(3) 当行标按标准排列排好后，各项的符号由列标的排列逆序数所确定，且正项与负项的个数相同，都有 $\frac{1}{2}n!$ 项.

按此定义的二阶、三阶行列式与原有定义的二阶、三阶行列式显然是一致的. 当 $n=1$ 时，$|a|=a$（注意不要与绝对值符号混淆）.

例 3　计算 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$.

解 行列式中每一项是 n 个元素的乘积，且这 n 个元素取自不同的行和不同的列. 因为第 n 行中只有第 n 列的元素 a_{nn} 不显为零，因此 p_n 可只考虑取 n 的情形. 由此，D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不显含 0，且列标构成排列的逆序数为 $\tau(1\ 2\cdots n)=0$，故

$$D_1=(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 不显含 0，且列标构成排列的逆序数为

$$\tau(n\cdots 2\ 1)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{故 } D_2&=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.\end{aligned}$$

结论 以主对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积. 以副对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于副对角线上元素的乘积，并冠以符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

特例:

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

定理 1.2 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$