华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

57

PEARSON

Linear Algebra with Applications

(Ninth Edition)

线性代数

（原书第9版）

[美] 史蒂文 J. 利昂（Steven J. Leon）著
马萨诸塞大学达特茅斯分校

张文博 张丽静 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

57

Linear Algebra with Applications

(Ninth Edition)

线性代数

（原书第9版）

[美] 史蒂文 J. 利昂（Steven J. Leon） 著
马萨诸塞大学达特茅斯分校

张文博 张丽静 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（原书第9版）/（美）利昂（Leon, S. J.）著；张文博，张丽静译．—北京：机械工业出版社，2015.9
（华章数学译丛）
书名原文：Linear Algebra with Applications, Ninth Edition

ISBN 978-7-111-51165-6

I. 线…　II. ①利…　②张…　③张…　III. 线性代数　IV. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第193274号

本书版权登记号：图字：01-2014-7250

本书结合大量应用和实例详细介绍线性代数的基本概念、基本定理与知识点，主要内容包括：矩阵与方程组、行列式、向量空间、线性变换、正交性、特征值和数值线性代数等．为巩固所学的基本概念和基本定理，书中每一节后都配有练习题，并在每一章后提供了MATLAB练习题和测试题．

本书叙述简洁，通俗易懂，理论与应用相结合，适合作为高等院校本科生“线性代数”课程的教材，同时也可作为工程技术人员的参考书．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码：100037）

责任编辑：迟振春	责任校对：董纪丽
印　　刷：北京瑞德印刷有限公司	版　　次：2015年9月第1版第1次印刷
开　　本：186mm×240mm　1/16	印　　张：29.75
书　　号：ISBN 978-7-111-51165-6	定　　价：79.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

本书译自 Steven J. Leon 所著的《Linear Algebra with Applications，Ninth Edition》一书，是一本既具有深刻的理论意义，又具有重要应用价值的书籍. 本书不仅适合作为本科生学习线性代数基本知识的教材，也可作为普通读者工程实践中的参考书.

原书作者从事线性代数的教学和研究工作几十年，有着非常丰富的教学和研究经验. 本书前八版得到了众多读者的肯定，本版又增添了新的章节，并调整了部分章节的顺序.

本书包含的内容非常丰富，除了对线性代数的基本概念进行了必要的阐述和证明外，还给出了大量的应用实例. 这些实例均与现代科学技术及生产、生活实践紧密相关. 通过这些例子，读者可在学习线性代数基本知识的同时，了解这些基本知识是如何在实践中应用的，从而大大提高学习线性代数的兴趣，并将线性代数的理论与应用实践紧密结合起来.

本书另外一个重要的特色是，紧密结合数学工具软件 MATLAB. 在每一章的结尾都包含很多计算机操作的练习，附录中还给出了完成这些练习所需掌握的基本知识. 这些计算机练习将为读者进一步理解线性代数的基本内容，把握线性代数研究的实质，灵活运用线性代数的基本方法，提供十分有益的帮助.

在本书的翻译过程中，得到了机械工业出版社华章公司的大力支持与帮助，在此表示感谢.

译 者

于北京

前　　言

我非常欣喜地看到本书已经出版到了第 9 版．大量读者的持续支持和热情让我深受鼓舞．现在线性代数的重要性日益凸显，其应用领域也越来越广泛．这在很大程度上是由于过去 75 年来计算机技术的革命，线性代数在数学课程中的地位已经上升到与微积分同样重要了．同时，现代软件技术为改进线性代数课程的教学方法提供了可能．

本书的第 1 版出版于 1980 年．第 2 版(1986 年)中做了很多重要的调整，特别是大大扩展了练习部分，并大幅调整了线性变换章节的内容．此后的每一个版本都有着显著的变化，包括增加 MATLAB 计算机练习，大量增加应用的数量，多次改变本书不同章节的顺序等．非常幸运的是，我遇到了很多杰出的审稿人，他们的建议使得本书进行了很多重要的改进．就第 9 版而言，对以前各个版本中都没有进行主要修正的第 7 章予以了特别的关注．

第 9 版中的更新内容

1. 在第 3 章中增加了新的小节

3.2 节讨论了子空间的问题．当我们求得了齐次线性方程组的解后，给出了一个子空间的重要例子．这种子空间称为零空间(null space)．新增加的小节用以说明零空间对于求解非齐次线性方程组的解集也是非常有用的．该小节中包括了新的定理和用来从几何方面描述定理的新图形．3.2 节练习的最后增加了三个相关的问题．

2. 第 1、5、6 和 7 章中增加了新的应用

在第 1 章中，我们引入了管理科学领域的一个重要应用．管理决策通常涉及在一些可选项中进行选择．我们假设这些选择在头脑中有着固定的目标，并基于一组评估的标准．这些决策通常包括一些并不一定完全相容的人的判断．层次分析法是一种评估不同可选项的方法，其使用一个包含加权标准和对每一个可选项满足标准的程度进行评估的图表．

第 1 章中，读者会看到如何设置这个图表或分析过程中的决策树．在对图表中的每一项进行了加权和评估后，对所有可选项的总体评估就可以使用简单的矩阵-向量运算进行计算了．第 5 章和第 6 章中，我们将回顾该应用，并使用更为高级的矩阵方法来探讨如何确定决策过程中合适的权重和评估．最后，在第 7 章中，我们给出一个数值算法来计算决策过程中的权重向量．

3. 修订了 7.1 节并增加了两个小节

重新修正了 7.1 节以适应时代的需要．增加了关于 IEEE 浮点数表示法以及数值算法的精度和稳定性的两个小节．有关这些内容的例子和练习也相应进行了增补．

4. 修订了 7.5 节

修订并扩展了对豪斯霍尔德(Householder)变换的讨论. 增加了一个新的小节，在该小节中探讨了使用 QR 分解法求解线性方程组的问题. 有关该内容的练习也进行了增补.

5. 修订了 7.7 节

7.7 节探讨求解最小二乘问题的数值方法. 修订了该节内容，并增加了一个使用改进的格拉姆-施密特方法求解最小二乘问题的小节. 在该小节中包含了一个新的算法.

内容概要

本书不但适用于低年级的学生，同时也适用于高年级的学生. 学生应熟悉微分和积分的基本知识，即学过一个学期的微积分课程.

若本书作为低年级课程的教材，教师应花更多的时间在前面的章节中，并略去后面的很多章节. 对更为高级的课程，可以快速浏览前两章中的很多主题，然后较为完整地讲述后面的章节. 本书内容讲解细致，初学者在阅读和理解这些材料时不会有什么问题. 为进一步帮助学生，书中还给出了大量的例子. 每一章后面的计算机练习有助于学生进行数值计算，学生还可尝试将这些结果进行推广. 另外，本书中包含很多应用问题，这些应用问题有助于学生开拓思路并理解学过的相关内容.

本书中包含了美国国家科学基金(NSF)发起的、线性代数课程研究小组(LACSG)推荐的所有内容并有所补充. 尽管有很多材料无法包含在一学期的课程中，但本书内容相对独立，教师可以很容易略过不需要的材料. 此外，学生可以将本书作为参考，并自学略过的主题.

后面给出了针对不同课程的推荐教学大纲.

理论上讲，本书内容可在两学期内讲授. 尽管 LACSG 建议线性代数课程要上两个学期，但这在很多大学中并不现实. 目前对中级课程还没有一个公认的核心教学大纲. 事实上，如果教师希望中级课程的所有内容能编写在一本书中的话，则这本书将非常厚重. 本书尽力覆盖了现代应用问题中需要的所有线性代数基本主题. 此外，对中级课程还附加了两个可以从网上下载的章节：

http://pearsonhighered.com/leon

建议的教学大纲

Ⅰ. 两学期课程

在两个学期的教学中，可以包含本书所有的 40 节. 还可以包含一次额外的课来演示如何使用 MATLAB 软件.

Ⅱ. 低年级学生的一学期课程

A. 低年级的基本课程

第 1 章	1.1～1.6 节	7 讲
第 2 章	2.1～2.2 节	2 讲
第 3 章	3.1～3.6 节	9 讲
第 4 章	4.1～4.3 节	4 讲
第 5 章	5.1～5.6 节	9 讲
第 6 章	6.1～6.3 节	4 讲
	总计	35 讲

B. LACSG 以矩阵为主的课程

线性代数课程研究小组推荐的核心课程中仅包含欧几里得向量空间. 因此，对该类课程，可以忽略 3.1 节(这是关于一般向量空间的内容)以及第 3 章到第 6 章中涉及函数空间的所有内容和练习. 本书包含了 LACSG 核心教学大纲中的所有内容，无需再引入其他的辅助材料. LACSG 建议用 28 讲讲授核心材料，这可通过采用每周一讲，并结合复习课来完成. 如果没有复习课，推荐使用下面的进度表：

第 1 章	1.1～1.6 节	7 讲
第 2 章	2.1～2.2 节	2 讲
第 3 章	3.2～3.6 节	7 讲
第 4 章	4.1～4.3 节	2 讲
第 5 章	5.1～5.6 节	9 讲
第 6 章	6.1、6.3～6.5 节	8 讲
	总计	35 讲

Ⅲ. 一学期高级课程

在较为高级的课程中，覆盖的内容取决于学生的知识背景. 下面是两个 35 讲的课程.

A. 课程 1

第 1 章	1.1～1.6 节	6 讲
第 2 章	2.1～2.2 节	2 讲
第 3 章	3.1～3.6 节	7 讲
第 5 章	5.1～5.6 节	9 讲
第 6 章	6.1～6.7 节(如果时间允许，可加上 6.8 节)	10 讲
第 7 章	7.4 节	1 讲
	总计	35 讲

B. 课程 2

回顾第 1～3 章各主题		5 讲
第 4 章	4.1～4.3 节	2 讲
第 5 章	5.1～5.6 节	10 讲
第 6 章	5.1～6.7 节(如果时间允许，可加上 6.8 节)	11 讲
第 7 章	7.1～7.4 节(如果时间允许，可加上 7.1～7.3 节)	7 讲
	总计	35 讲

计算机练习

本版每一章的结尾均包含一部分计算练习，这些练习是基于 MATLAB 软件包的. 本书的 MATLAB 附录介绍了该软件的基本用法. MATLAB 的优势在于，它是矩阵运算的强大工具，并易于学习. 看完附录后，学生应可以完成计算练习，而不需要参考其他的软件书籍或手册. 教学时，建议用一个学时讲授该软件. 这些练习可以作为一般的作业，也可作为规定的计算机实验课程的一部分.

ATLAST 书籍可作为本书 MATLAB 练习的辅助材料(见下面的"补充材料").

虽然课程讲解可以不涉及计算机上的应用，但计算机练习有助于强化学生的学习，并为他们提供线性代数学习的新手段. 因此，在线性代数的第一门课程中，建议组成线性代数课程学习小组，这种观点被越来越多的人所认同.

补充材料

网络支持和附加章节

本书的两个附加章节可从作者的主页上下载：

http://www.umassd.edu/cas/math/people/facultyandstaff/steveleon

或从 Pearson 网站下载：

http://pearsonhighered.com/leon

附加的章节为：

- 第 8 章 迭代法
- 第 9 章 标准型

在 Pearson 网站上，还为学生和教师提供了本书中包括的在线练习的链接. 作者的主页中还包括了勘误表.

配套书籍

下面给出了本书的配套书籍.

- **Student Study Guide for Linear Algebra with Applications.** 该手册总结了重要的定理、定义和本书中给出的概念，其中还包括部分练习的答案和提示，以及对其他练习的建议.

- **ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra , Second Edition.** ATLAST(扩展的线性代数教学用软件工具，Augmenting the Teaching of Linear Algebra using Software Tools)是 NSF 为鼓励和促进线性代数教学中使用软件而发起的一个项目. 在 1992～1997 年间，ATLAST 项目指导了 18 个工作组使用 MATLAB 软件包. 这些工作组为基于软件的线性代数教学设计了上机练习、方案和教学计划. 1997 年，从这些素材中选择了一部分内容以手册的形式出版. 2003 年，这本手册进行了大量的扩充，出版了第 2 版. 第 2 版共 8 章，每章包含一个简短的练习和一个较大的课题.

  与 ATLAST 书籍配套开发的软件包(M-文件)可以从 ATLAST 网站下载：

  www1. umassd. edu/specialprograms/atlast

  此外，Mathematica 用户可以下载由 Richard Neidinger 开发的《ATLAST Mathematica Notebooks》.
- **Linear Algebra Labs with MATLAB：3rd ed.** David Hill 和 David Zitarelli 著.
- **Visualizing Linear Algebra using Maple.** Sandra Keith 著.
- **A Maple Supplement for Linear Algebra.** John Maloney 著.
- **Understanding Linear Algebra Using MATLAB.** Erwin 和 Margaret Kleinfeld 著.

致谢

感谢本书所有以前版本的审阅人和做出其他贡献的人. 特别感谢第 9 版的审阅人：

Mark Arnold，阿肯色大学

J'Lee Bumpus，奥斯汀学院

Michael Cranston，加利福尼亚大学尔湾分校

Matthias Kawski，亚利桑那州立大学

同时感谢给出评论和建议的大量读者. 特别感谢如 LeSheng Jin 建议增加层次分析法应用的读者.

特别感谢 Pearson 出版社的项目经理 Mary Sanger 和助理编辑 Salena Casha. 非常感谢 Tom Wegleitner 所做的准确修改以及相关的手册. 感谢 Pearson 公司所有编辑、生产和销售人员所做的努力. 同时感谢集成软件服务项目经理 Abinaya Rajendran.

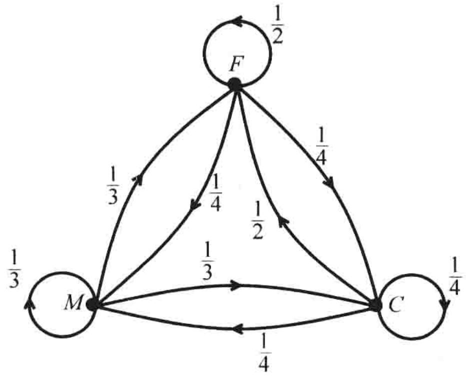
感谢 Gene Golub 和 Jim Wilkinson 的贡献. 本书第 1 版中的绝大多数内容写于 1977～1978 年，那时作者在斯坦福大学做访问学者. 在此期间，作者听取了 Gene Golub 和 J. H. Wilkinson 讲授的数值线性代数课程，这些课程对本书有着深刻的影响. 最后，感谢 Germund Dahlquist 对本书早期版本的建议. 尽管 Gene Golub、Jim Wilkinson 和 Germund Dahlquist 已经离世，但他们仍然活在大家的记忆中.

Steven J. Leon

sleon@umassd. edu

目　　录

第1章 矩阵与方程组



求解线性方程组或许是数学问题中最重要的问题. 超过75%的科学研究和工程应用中的数学问题，在某个阶段都涉及求解线性方程组. 利用新的数学方法，通常可将较为复杂的问题化为线性方程组. 线性方程组广泛应用于商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域. 因此，本书从讨论线性方程组开始应当是合适的.

1.1 线性方程组

形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

的方程称为含有 n 个未知量的线性方程，其中 a_1，a_2，…，a_n 和 b 为实数，x_1，x_2，…，x_n 称为变量. 含有 m 个方程和 n 个未知量的线性方程组定义为

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}\tag{1}$$

其中 a_{ij} 及 b_i 均为实数. (1)称为 $m\times n$ 的线性方程组. 下面是几个线性方程组的例子：

$$\text{(a)}\ \begin{aligned}x_1+2x_2&=5\\2x_1+3x_2&=8\end{aligned}\qquad\text{(b)}\ \begin{aligned}x_1-x_2+x_3&=2\\2x_1+x_2-x_3&=4\end{aligned}\qquad\text{(c)}\ \begin{aligned}x_1+x_2&=2\\x_1-x_2&=1\\x_1\quad&=4\end{aligned}$$

方程组(a)称为 2×2 的方程组，(b)称为 2×3 的方程组，(c)称为 3×2 的方程组.

若有序 n 元组(x_1，x_2，…，x_n)满足方程组中的所有方程，则称其为 $m\times n$ 的方程组的解. 例如，有序数对(1，2)为方程组(a)的解，因为

$$\begin{aligned}1\cdot(1)+2\cdot(2)&=5\\2\cdot(1)+3\cdot(2)&=8\end{aligned}$$

有序三元组(2，0，0)为方程组(b)的解，因为

⊖ 此页码为英文原书页码，与索引页码一致.

$$1\cdot(2)-1\cdot(0)+1\cdot(0)=2$$
$$2\cdot(2)+1\cdot(0)-1\cdot(0)=4$$

事实上，方程组(b)有很多解. 易见，对任意的实数 α，有序三元组$(2,\ \alpha,\ \alpha)$均为(b)的解. 但是，方程组(c)无解. 由(c)中的第三个方程知，第一个变量的取值应为 4. 将 $x_1=4$代入其前两个方程，可以看出，第二个变量必须满足

$$4+x_2=2$$
$$4-x_2=1$$

由于不存在实数能同时满足上述两个方程，故方程组(c)无解. 如果线性方程组无解，则称该方程组是不相容的(inconsistent). 如果线性方程组至少存在一个解，则称该方程组是相容的(consistent). 由此，方程组(c)为不相容的，而方程组(a)和(b)均为相容的.

线性方程组的所有解的集合称为方程组的解集(solution set). 如果线性方程组不相容，则其解集为空集. 相容的线性方程组的解集必非空. 因此，求解线性方程组，就是寻找其解集.

2×2 方程组

让我们从几何的角度考察方程组

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

每一个方程均可对应于平面上的一条直线. 有序对$(x_1,\ x_2)$为上述方程组解的充分必要条件是，两条直线均过该实数对对应的平面上的点. 例如，考虑三个方程组

(i) $\begin{aligned}x_1+x_2&=2\\x_1-x_2&=2\end{aligned}$　　(ii) $\begin{aligned}x_1+x_2&=2\\x_1+x_2&=1\end{aligned}$　　(iii) $\begin{aligned}x_1+x_2&=2\\-x_1-x_2&=-2\end{aligned}$

方程组(i)对应的两条直线的交点为(2，0). 因此{(2，0)}为方程组(i)的解集. 方程组(ii)对应的两条直线是平行的，因此，方程组(ii)为不相容的，即它的解集为空集. 方程组(iii)对应的两条直线相互重合，因此，直线上任一点的坐标均为方程组(iii)的解(参见图 1.1.1).

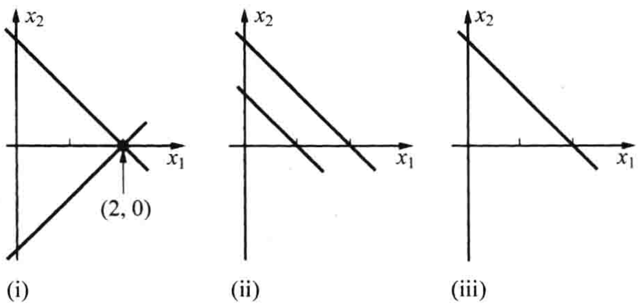


图 1.1.1

一般地，两条直线间有三种情况：相交、平行或重合，相应的解集中分别含有一个、零个或无穷多个元素.

$m\times n$ 的方程组与此类似. $m\times n$ 的方程组可能相容，也可能不相容. 如果它们相容，则方程组只能是有且只有一个解，或有无穷多个解. 事实上，这就是所有的可能性. 其原因将在 1.2 节中学习行阶梯形方程组时予以讲解. 下面关注的问题是求所给方程组的所有解. 为处理这个问题，首先引入等价方程组(equivalent systems)的概念.

等价方程组

考虑两个方程组

$$\text{(a)}\quad\begin{aligned}3x_1+2x_2-x_3&=-2\\ x_2\qquad&=3\\ 2x_3&=4\end{aligned}\qquad\qquad \text{(b)}\quad\begin{aligned}3x_1+2x_2-x_3&=-2\\ -3x_1-x_2+x_3&=5\\ 3x_1+2x_2+x_3&=2\end{aligned}$$

显然，方程组(a)容易求解. 因为，由后两个方程容易得到 $x_2=3$ 和 $x_3=2$. 将这些值代入第一个方程，可得

$$\begin{aligned}3x_1+2\cdot 3-2&=-2\\ x_1&=-2\end{aligned}$$

于是，方程组(a)的解为(−2，3，2). 求解方程组(b)似乎不是很容易. 其实，方程组(b)与方程组(a)有相同的解. 为看清这一点，首先将其前两个方程相加：

$$\begin{array}{r}3x_1+2x_2-x_3=-2\\ -3x_1-x_2+x_3=5\\ \hline x_2\qquad=3\end{array}$$

若 (x_1, x_2, x_3) 为(b)的解，则它必满足方程组中的所有方程. 因此，它必然满足任意两个方程相加后得到的新方程. 因此，x_2 必为 3. 类似地，(x_1, x_2, x_3) 必满足第三个方程减去第一个方程后得到的新方程：

$$\begin{array}{r}3x_1+2x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2-x_3=-2\\ \hline 2x_3=4\end{array}$$ 3

因此，方程组(b)的解必为方程组(a)的解. 通过类似的讨论，可以证明方程组(a)的解也是方程组(b)的解. 由(a)中的第二个方程减去第一个方程得

$$\begin{array}{r}x_2\qquad=3\\ 3x_1+2x_2-x_3=-2\\ \hline -3x_1-x_2+x_3=5\end{array}$$

然后，将其第一个方程与第三个方程相加：

$$\begin{array}{r}3x_1+2x_2-x_3=-2\\ 2x_3=4\\ \hline 3x_1+2x_2+x_3=2\end{array}$$

因此，(x_1, x_2, x_3) 为(b)的解的充要条件是，它是方程组(a)的解. 即方程组(a)和方程组(b)有相同的解集{(−2，3，2)}.

定义 若两个含有相同变量的方程组具有相同的解集，则称它们是**等价的**(equivalent).

显然，交换方程组中任意两个方程的位置，不会影响方程组的解集. 重新排列后的

方程组将等价于原方程组．例如，方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 &= 6 \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

含有三个相同的方程，因此，它们必有相同的解集．

若将方程组中的某一方程两端同乘一非零实数，则方程组的解集不变，并且新方程组等价于原方程组．例如，方程组

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

是等价的．

若将方程组中某一方程的倍数加到另一方程上，新的方程组将与原方程组等价．由此可得，n 元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足两个方程

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j \end{aligned}$$

的充要条件是，它满足方程

4

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n &= b_j + \alpha b_i \end{aligned}$$

综上所述，有三种运算可得到等价的方程组：

Ⅰ．交换任意两个方程的顺序．

Ⅱ．任一方程两边同乘一个非零的实数．

Ⅲ．任一方程的倍数加到另一方程上．

对给定的方程组，可以使用这些运算得到一个容易求解的等价方程组．

$n \times n$ 方程组

本节中仅讨论 $n \times n$ 的方程组．本节将证明，若 $n \times n$ 的方程组仅有一个解，则利用上面的运算Ⅰ和运算Ⅲ可得到一个等价的"严格三角形方程组"．

定义 若方程组中，第 k 个方程的前 $k-1$ 个变量的系数均为零，且 $x_k(k=1, \cdots, n)$的系数不为零，则称该方程组为**严格三角形的**(strict triangular form)．

▶**例 1** 方程组

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

为严格三角形的，因为第二个方程中的系数分别为 0，1，-1，且第三个方程中的系数分别为 0，0，2．由于该方程组为严格三角形的，因此容易求解．由第三个方程可得 $x_3=2$．将其代入第二个方程，有

$$x_2 - 2 = 2 \quad \text{或} \quad x_2 = 4$$

将 $x_2=4$，$x_3=2$ 代入第一个方程，最终可得

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2 \cdot 4 + 2 &= 1 \\ x_1 &= -3 \end{aligned}$$

因此，方程组的解为(−3，4，2). ◀

任何 $n\times n$ 的严格三角形方程组均可采用和上例相同的方法求解．首先，从第 n 个方程解得 x_n，将其代入第 $n-1$ 个方程解得 x_{n-1}，将 x_n 和 x_{n-1} 的值代入第 $n-2$ 个方程解得 x_{n-2}，以此类推．称这种求解严格三角形方程组的方法为**回代法**(back substitution). 5

▶**例 2** 解方程组

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

解 利用回代法可得

$$\begin{aligned} 4x_4 &= 4 & x_4 &= 1 \\ 4x_3 + 3 \cdot 1 &= 3 & x_3 &= 0 \\ x_2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 &= 2 & x_2 &= -1 \\ 2x_1 - (-1) + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= 1 & x_1 &= 1 \end{aligned}$$

因此，方程组的解为(1，−1，0，1). ◀

一般地，给定一个 n 个方程 n 个未知量的线性方程组，可用运算Ⅰ和Ⅲ尽可能将其转化为等价的严格三角形方程组.（我们将在下一节中看到，当方程组不是唯一解时，不可能将其化简为严格三角形式.）

▶**例 3** 解方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

解 第二式减去第一式的 3 倍，可得

$$-7x_2 - 6x_3 = -10$$

第三式减去第一式的 2 倍，可得

$$-x_2 - x_3 = -2$$

若将方程组中的第二和第三个方程分别用上面两个新方程替换后，则得到等价的方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -7x_2 - 6x_3 &= -10 \\ -x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

若该方程组的第三个方程替换为它与第二个方程的 $-\frac{1}{7}$ 倍的和，最终可得严格三角形

方程组：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ -7x_2 - \quad 6x_3 &= -10 \\ -\frac{1}{7}x_3 &= -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

6

利用回代法，得到

$$x_3 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 3$$ ◀

回顾上例中的方程组. 可以把方程组与一个以 x_i 的系数为元的 3×3 数字阵列联系起来.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

这个阵列称为方程组的**系数矩阵**(coefficient matrix). 简单地说，**矩阵**(matrix)就是一个矩形的数字阵列. 一个 m 行和 n 列的矩阵称为 $m\times n$ 矩阵. 如果矩阵的行数和列数相等，即 $m=n$，则称该矩阵为方阵.

如果在系数矩阵右侧添加一列方程组的右端项，可得到一个新的矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

这个矩阵称为方程组的**增广矩阵**(augmented matrix). 一般地，当一个 $m\times r$ 的矩阵 B 采用上述方法附加到一个 $m\times n$ 的矩阵 A 上时，相应的增广矩阵记为$(A \mid B)$. 若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}$$

则

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right]$$

每一方程组均对应于一个增广矩阵，形如

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

方程组的求解可以通过对增广矩阵进行运算得到. x_i 作为位置标志符，在计算结束前可以省略. 用于得到等价方程组的三个运算，可对应于下列增广矩阵的行运算.

初等行运算

Ⅰ. 交换两行.

Ⅱ. 以非零实数乘以某行.

Ⅲ. 将某行替换为它与其他行的倍数的和.

7

注意到前面的例子，是用第一行将其他各行中的第一列元素消去. 称第一行为**主行**(pivotal row). 为明显起见，主行中的元素均加黑表示并为整行添加阴影. 主行的第一个非零元素称为**主元**(pivot).

(主元 $a_{11}=1$)

$$\left.\begin{array}{c}\text{需要消去的元}\\ a_{21}=3\ \text{和}\ a_{31}=2\end{array}\right\}\longrightarrow\left[\begin{array}{rrr|r}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ 3 & -1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{array}\right]\begin{array}{l}\leftarrow\text{主行}\\ \\ \\ \end{array}$$

通过利用行运算Ⅲ，从第二行中减去第一行的 3 倍，从第三行中减去第一行的 2 倍. 之后，得到矩阵

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 1 & 3\\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-6} & \mathbf{-10}\\ 0 & -1 & -1 & -2\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \leftarrow\text{主行}\\ \\ \end{array}$$

在这一步，选择第二行为新的主行并利用行运算Ⅲ消去第二列中最后一个元. 此时，主元为-7，商$\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7}$即为从第三行中减去的第二行的倍数. 最终得到矩阵

$$\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -7 & -6 & -10\\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7}\end{array}\right]$$

这就是与原方程组等价的严格三角形方程组的增广矩阵. 使用回代法容易得到此方程组的解.

▶**例 4** 解方程组

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6\\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1\\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 3\end{array}$$

解 该方程组对应的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{rrrr|r}0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & -2 & 2 & 3\end{array}\right]$$

由于用 0 作为主元不可能消去同列的其他元，所以我们将利用行运算Ⅰ交换增广矩阵的