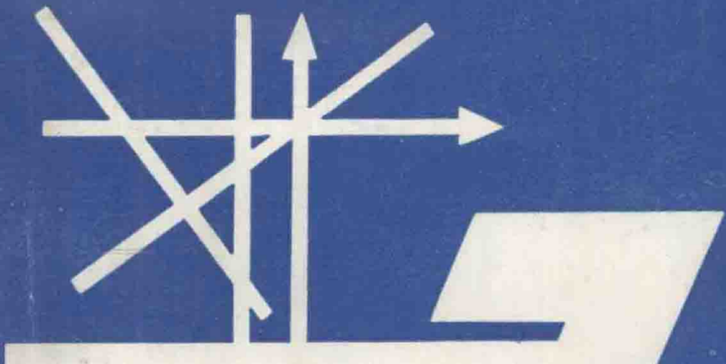
中学数学专题精讲

主编：陈建森　万兴灿



武汉工业大学出版社

中学数学专题精讲

主编: 陈建森 万兴灿

武汉工业大学出版社

前　　言

经过编写组全体人员近两年的努力，《中学数学专题精讲》一书与读者见面了，它的出版为广大爱好数学的青少年和数学工作者提供了一本良好的指导书，它弥补了中学数学专题论述资料的不足。本书可作为中学数学教学参考书，更适合高中各年级学生进行专题复习，尤其是高三年级总复习的教材。

本书汇集了十几个省市中学界部分特级、高级等优秀教师的教学经验、经过精心设计和加工锤炼，将中学教学中十五专题进行总结、阐述，每专题一讲，每讲开篇有本讲的内容概述及研究方法。讲中拟若干方法，每法配以典型例题，例后概述本法的广泛性和特殊性，讲末有配套练习题，附录综合练习

本书由湖北省宜昌市第一中学万兴灿，陈建森主编，参加专题编写的有：江西：左加林，上海：冯唯，山东：王文清，湖北：叶家振，袁惠秋新疆：张星阳，安徽：汪民岳，河南：刘长义，山西：薛胜保（张希良），刘彬文，吉林：王福权，湖南：沈文选，河北：赵建勋，江苏：张嘉瑾、李尧亮（李尧明）

单元练习题、综合测验题由吉林：王绍鹏，湖北：朱泽俭、陈长太，周德霞，姚继新，蒋含丹，周钦鉴，陈启蔚，贺志才，夏乃球、彭定达、李家福、郭云翔等老师提供。

在本书的编辑和出版过程中，受到有关方面的大力支持，尤其是湖北省秭归县新华印刷厂，在此一并表示感谢！

限于水平和精力，书中难免有不当之处，敬请读者指正，便于此书再版时修订。

编　者

1988年12月

中学数学专题精讲

陈建森　万兴灿　　主编
责任编辑　张靖若

*

武汉工业大学出版社出版发行
湖北省秭归县印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：8.75　字数：200千
1989年2月第1版　　1989年2月第1次印刷
印数：1—10,000
ISBN 7-5629-0202-X/O·0010
定价：3.20元

目　　录

第 一 讲　函数解析式的求法……………………………（ 1 ）

第 二 讲　函数的单调性及其应用………………………（ 14 ）

第 三 讲　函数的最值和值域……………………………（ 28 ）

第 四 讲　不等式的研究方法……………………………（ 47 ）

第 五 讲　三角恒等式的证明……………………………（ 63 ）

第 六 讲　反三角不等式及三角方程……………………（ 84 ）

第 七 讲　数列及其通项公式……………………………（107）

第 八 讲　复数几何意义的应用…………………………（121）

第 九 讲　圆锥曲线的性质及应用………………………（133）

第 十 讲　曲线轨迹求法技巧……………………………（162）

第十一讲　立体几何元素间的度量关系…………………（180）

第十二讲　排列组合六大类………………………………（195）

第十三讲　参数问题的讨论………………………………（212）

第十四讲　构造法…………………………………………（225）

第十五讲　猜想与数学归纳法……………………………（240）

附　　录　…………………………………………………（264）

第一讲　函数解析式的求法

函数及其概念贯穿着中学数学教材，因而函数的解析式举目可见。如何准确迅速地求得函数的解析式，是函数教与学中的一大重点。以下我们将给出求函数解析式的若干方法。

一、定义法

定义法是直接根据函数的概念及其对应法则，并结合特定函数的定义去求函数解析式的一种方法。

例1：已知$f(x+1)+f(x+2)=3x^2+5x+0.5$，求$f(x)$

解：∵$f(x)$、$f(x+1)$，$f(x-1)$关于x的次数相同，又

$3x^2+5x+1/2=3/2(x+1)^2+3/2(x+1)^2-4x-7$

进一步变形可得

$$3x^2+5x+1/2$$

$$=3/2(x+1)^2-2(x+1)+3/2(x+2)^2-2(x+2)-1$$

$$=\left[\frac{3}{2}(x+1)^2-2(x+1)-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}(x+2)^2-2(x+2)-\frac{1}{2}\right]$$

$$=f(x+1)+f(x+2)$$

故所求的解析式$f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}$

说明：此题亦可用待定系数法解。

例2　已知$f(1/x+1)=1+1/x^2+1/x$求$f(x)$。

解：∵　$f(1/x+1)=1+1/x^2+1/x$

$$=\frac{x^2+2x+1-2x}{x^2}+\frac{1}{x}$$

$$=(\frac{1+x}{x})^2-\frac{1+x-x}{x}$$

$$=(\frac{1+x}{x})^2-\frac{1+x}{x}+1$$

∴　$f(x)=x^2-x+1$　　　　（$x\in R$，但$x\neq 0$）

说明：此题也可用换元法解。

二、换元法

当已知条件中的关系式为$f[u(x)]=F(x)$，（$F(x)$为已知解析式），一般可设辅助变量。$t=u(x)$，以通过t这个中间变量，找出函数对于中间变量的对应关系，从而确定$f(x)$的解析式。

例1　已知$f(e^x)=x^3+\sin x$，求$f(x)$

解：把e^x看成自变量，可设$t=e^x$，则有$x=\ln t(t>0)$

∴　$f(t)=\ln^3 t+\sin(\ln t)$

从而$f(x)=\theta\ln^3 x+\sin(\ln x)$　　　（$x>0$）

例2：　已知$f(1+2\operatorname{tg}x)=1-3\operatorname{ctg}x$，求$f(x)$

解：整体地把$1+2\operatorname{tg}x$看成自变量，设$t=1+2\operatorname{tg}x$，则$\operatorname{tg}x=(t-1)/2$，$\operatorname{ctg}x=2/(t-1)$。

∴　$f(t)=f(1+2\operatorname{tg}x)=1-3\operatorname{ctg}x$

$=1-6/(t-1)=(t-7)/(t-1)$，　　　（$t\neq 1$）

$$\therefore\quad f(x)=\frac{x-7}{x-1}\qquad (x\neq 1)$$

另解：设所求函数$y=f(x)$中的x，y为

$$\begin{cases}x=1+2\mathrm{tg}t\\ y=1-3\mathrm{ctg}t\end{cases}\qquad (t为参数)$$

则有
$$\begin{cases}\mathrm{tg}t=\frac{1}{2}(x-1) & (1)\\ \mathrm{ctg}t=\frac{1}{3}(1-y) & (2)\end{cases}$$

(1)×(2)得，$\frac{1}{2}(x-1)\cdot\frac{1}{3}(1-y)=1$

$$\therefore\quad y=\frac{x-7}{x-1}\qquad 即f(x)=\frac{x-7}{x-1}\qquad (x\neq 1)$$

三、待定系数法

根据函数的类型设出其参系数的表达式，然后再根据已知关系式或其它条件去确定相应的系数，从而求出解析式。

例1、已知$f(x)$为有理整函数，且$mf(x+1)+mf(x-1)=2x^2+2mx+2$，又$m\neq 0$，求$f(x)$。

解：依题意可设$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

则 $f(x+1)=a(x+1)^2-b(x+1)+c$

$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$\therefore\quad mf(x+1)+mf(m-1)$

$=2max^2+2mbx+2m(a+c)$

与已知关系式比较系数得

$$\begin{cases} 2ma = 2 \\ 2mb = -2m \\ 2m(a+c) = 2 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} a = \frac{1}{m} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{m}x^2 - x$

例2　已知$my+n$与$ax+b$成正比（m，n，a，b皆为常数，且$m \neq 0$，$a \neq 0$）当$x=2$时，$y=-1$；当$x=3$时，$y=1$，求y与x之间的函数关系式。

解：根据两函数成正比的定义，可设

$my+n=\lambda(ax+b)$ $\lambda \neq 0$）

整理得　$y = \frac{\lambda a}{m}x + \frac{\lambda b - n}{m}$　　（1）

把$x=2$，$y=-1$及$x=3$，$y=1$分别代入（1）得

$$\begin{cases} \frac{2\lambda a}{m} + \frac{\lambda b - n}{m} = -1 & (2) \\ \frac{3\lambda a}{m} + \frac{\lambda b - n}{m} = 1 & (3) \end{cases}$$

将上式中$\lambda\alpha/m$，$(\lambda b-n)/m$解出有

$\frac{\lambda a}{m} = 2$，$\frac{\lambda b - n}{m} = -5$

$\therefore$　所求函数解析式为：$y=2x-5$

四、解方程组法。

当函数$f(x)$由已知关系式$af[u(x)]+bf[t(x)]=F(x)$（其中$F(x)$为已知式）确定，且$a \neq b$， u（x）与t（x）有互为相反数或互为倒数的关系，则可在已知关系式中通过对u(x)与t(x)互相替换的方法来求解f(x)。

例1　已知$f(1-x)+2f[1/(1-x)]=2x+3$，求f(x)。

解：令$y=1-x$，则

$$f(y)+2f(1/y)=5-2y \qquad (1)$$

在（1）中以$\frac{1}{y}$替换y，则有

$$f(1/y)+2f(y)=5-2/y \qquad (2)$$

联立（1）（2），并求解f（y），得

$$f(y)=\frac{2}{3}y-\frac{4}{3y}+\frac{5}{3},$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3x}+\frac{5}{3}。$$

例2，由$af(2x-3)+bf(3-2x)=2x$，$a^2\neq b^2$求f（x）

解：令$2x-3=y$，则原条件可为

$$af(y)+bf(-y)=y+3 \qquad (1)$$

在（1）中以－y替换y得

$$af(-y)+bf(y)=-y+3 \qquad (2)$$

由（1）×a－（2）×b得

$$f(y)=\frac{y}{a-b}+\frac{3}{a+b}$$

$$\therefore f(y)=\frac{x}{a-b}+\frac{3}{a+b}$$

五、特殊值法

当已知解析式中涉及到多个变量时，我们可根据解析关

系式对于自变量在给定取值范围内的一切值都成立的条件，令其中某些变量取给定取值范围内的某些特殊值，以达到减少未知元，最终化为只含一个变元的关系式，从而求出所需的解析式。

例1、已知对于一切实数x，y，关系式：$f(x-y)=f(x)-(2x-y+1)y$都成立，且$f(0)=1$，求$f(x)$。

解：由于$f(x-y)=f(x)-(2x-y+1)y$对于一切实数x，y都成立，令$x=0$，则有

$f(-y)=f(0)-(1-y)y$，

即$f(-y)=y^2-y+1$

设$x=-y$，则得$f(x)=x^2+x+1$

例2、已知x，$y\in Q$，且$f(1)=2$，$f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$ 对于一切有理数成立，求$f(x)$。

解：$\because$ $f(1)=2$，在条件

$$f(x,y)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1 \qquad (1)$$

中为消去一个未知元，可令$y=1$，代入(1)式得

$$f(x)=f(x)\cdot f(1)-f(x+1)+1$$

即 $$f(x+1)-f(x)=1 \qquad (2)$$

又$\because$(1)对于一切x，$y\in Q$都成立，则必对$x,y\in N$也成立，而当$x\in N$时(2)式表示以$f(1)=2$为首项，公差为1的等差数列，故有，$f(x)=x+1$

所求函数的表达式为 $f(x)=x+1$

六、递推法和迭代求和法

当一个函数是定义在自然数集的函数，并且已知条件中

存在或通过变换可以得到一个递推关系时，可利用这个关系，通过递推或逐步迭代后累加转化为简单的数列求和问题来求出函数的解析式f（x）

例1、设f（n）= 2n+1

$$\varphi(n)=\begin{cases}3 & (当n=1)\\ f[\varphi(n-1)] & (当n\geq 2)\end{cases}$$

其中n∈N，求φ（n）

解 ∵ n≥2时，$\varphi(n)=f[\varphi(n-1)]=2[\varphi(n-1)]+1$

$\therefore\ \varphi(n)+1=2[\varphi(n-1)+1]$

$\therefore\ \dfrac{\varphi(n)+1}{\varphi(n-1)+1}=2$

由上试知$\{\varphi(n)+1\}$是首项为$\varphi(1)+1=4$，公比g = 2的等比数列。

$\therefore\ \varphi(n)+1=4\cdot 2^{n-1}$

即 $\varphi(n)=2^{n+1}-1$

例2、已知x∈N，$f(x)=f(x-1)+a^x$，且f（1）= 1，试求f（x）的解析式。

解：（略）（参看本书数列一讲）

$$f(x)=\begin{cases}x & (a=1)\\ 1+\dfrac{a^2(a^{x-1}-1}{a-1} & (a\neq 1)\end{cases}$$

七、利用函数性质求解析式

当已知条件给出函数所具的某些性质时，则可充分利用

其性质、特征，挖掘各种隐含条件，求出适合题设条件的函数解析式。

例1、已知函数$y=f(x)$在它的定义域内是增函数，且$f(x)=f^{-1}(x)$，试求$y=f(x)$的表达式。

解：∵ $y=f(x)$在定义域内是增函数，则$f^{-1}(x)$在自身定义域（即$f(x)$的值域）上也是增函数（证明略）。又∵$f(x)=f^{-1}(x)$，在$f(x)$定义域内取一点a，设$f(a)=b$，则$a=f^{-1}(b)=f(b)$，故可以猜想$f(x)=x$。以下证明猜想正确且唯一。

依假设，若$a<b=f(a)$，由于$f(x)$是增函数，则有$f(a)<f(b)$，即$b<a$，这与$a<b$矛盾，故$f(a)$不可能大于a，同理，可证$f(a)$不可能小于a。故有$f(a)=a$存在且唯一。

故$f(x)=x$是所求满足条件的解析式。

例2、设$y=f(x)$为奇函数，且当$x\geq 0$时，有$f(x)=x(2-x)$，求$y=f(x)$的解析式。

解：∴ $f(x)$为奇函数，∴当$x<0$，$-x>0$时，有

$$f(x)=-f(-x)=-\left\{(-x)\cdot[2-(-x)]\right\}=x(2+x)$$

故所求的函数解析式为

$$y=f(x)=\begin{cases} x(2-x) & (x\geq 0) \\ x(2+x) & (x<0) \end{cases}$$

八、利用图象特征求函数解析式

当根据已给定图象去求函数解析式时，首先要仔细观察图象的特征，以准确确定函数的类型和范围（经过的象限，

最高点与最低点，与坐标轴的交点等），并揭示出函数的各种性质。然后利用待定系数法或观察法去求解析式。

例：已知某正弦曲线的图象如图

试求此函数的解析式f(x)

【分析】：

显然图象是由$y = A\sin(wx + \varphi)$的图象向上平移而得到的，并注意到图象已反映出特殊的“五点”（即在平衡线上三点、最高点及最低点）故由性质不准得如下解法。

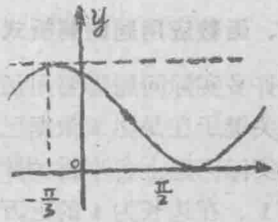


图 1—1

解：设$f(x) = A\sin(wx + \varphi) + B$，由图象知，曲线沿直线 $y = \frac{3}{2}$上下摆动，则 $B = \frac{3}{2}$，最高点与最低点的纵坐标相差3个单位，所以$A = \frac{3}{2}$，最高点、最低点两点的横坐标绝对值之差为$\frac{5}{6}\pi$，则周期$T = 2\times\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$，∴ $w = 2\pi/T = \frac{6}{5}$，又最高点为$(-\frac{\pi}{3}, 3)$，故有

$$3 = \frac{3}{2}\sin\left[\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \varphi\right] + \frac{3}{2}$$

解出：$\varphi=2k\pi+\frac{9\pi}{10}(k\in Z)$，令$k=0$，则初相$\varphi=9\pi/10$，故所求解析式为

$$f(x)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{6}{5}x+\frac{9}{10}\pi\right)+\frac{3}{2}$$

九、函数应用题的解析式求法

有许多实际问题需要用函数的观点去处理，而处理这些问题的关键所在是必须依据已知条件，寻求出能本质地揭示和反映实际问题上各事物的数量关系。

例1、在边长为4的正万形ABCD边长上有一点P，沿着折线BCA由B点（起点）向A点（终点）移动，设P点移动的路线为x，求△ABP的面积y与x的函数关系式。

解：当P在BC上移动时，$BP=x$

$$y_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BP=2x \qquad x\in[0,4],$$

当P在CD上移动时，$\because AB\parallel BC$，故$y_{\triangle ABP}$为定值8，$x\in(4,8)$；

当P在DA上移动时，$\because BC+CD+DP=x$，$BC+CD+DA=12$，$\therefore AP=12-x$，从而$y_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot AP=\frac{1}{2}\times4(12-x)=24-2x$，$x\in[8,2]$

综上可知，所求函数的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,4];\\ 8 & x\in(4,8),\\ 24-2x & x\in[8,12].\end{cases}$$

例2、投寄邮件规定平信最重量不得超过60克，每20克应贴邮票4分，不足20克重以20克重计算。写出邮资（分）与信件重量的关系式。

解：应贴邮票情况有三种，以20，40，60克重为三个分段点，故所求的关系式为

$$y=\begin{cases}4 & (0<x\leq 20)\\ 8 & (20<x\leq 40)\\ 12 & (40<x\leq 60)\end{cases}$$

其中y表示邮资量（分），x为信件重量（克）。

十、综合法。

灵活且熟练地应用各种技巧求解函数的解析式是本讲的目的。在求解函数的解析式的过程中常常使用多种方法，使问题的处理变得容易，解答来得迅速。

例：已知$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot\cos y$，求$f(x)$其中$f(0)=a$，$f(\frac{\pi}{2})=b$

解：在已知关系式中令$x=0$，$y=t$得

$$f(t)+f(-t)=2f(0)\cdot\cos t \qquad (1)$$

再令$x=\frac{\pi}{2}+t$，$y=\frac{\pi}{2}$代入已知关系式得

$$f(\pi+t)+f(-t)=0 \qquad (2)$$

再令$x=\frac{\pi}{2}$，$y=\frac{\pi}{2}+t$ 代入已知关系式得

$$f(\pi+t)-f(-t)=-2f(\frac{\pi}{2})\sin t \qquad (3)$$