偏微分方程的非标准混合有限元方法

The Nonstandard Mixed Finite Element Methods for Partial Differential Equations

刘洋 李宏 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

偏微分方程的非标准混合有限元方法

刘 洋 李 宏 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press
·北京·

内容简介

本书首先简单介绍了混合有限元方法的发展状况，并给出常用的基本空间、范数和不等式；讨论了一些偏微分方程的非标准混合有限元方法的先验误差理论和数值模拟结果，主要包括双曲波方程、积分微分方程的正定 (扩展) 混合有限元方法，RLW 方程、RLW-Burgers 方程、耦合 BBM 方程组、Sobolev 方程和四阶问题的 H^1-Galerkin (扩展) 混合有限元方法，四阶 Cahn-Hilliard 方程和四阶反应扩散问题的一类混合有限元方法，分数阶反应扩散问题、分数阶电报方程、四阶分数抛物问题的混合有限元方法.

本书适合作为高等院校数学以及相关专业研究生和本科生的教材，同时也可供计算数学、计算物理方向等科研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程的非标准混合有限元方法 / 刘洋, 李宏著. -- 北京: 国防工业出版社, 2015. 4

ISBN 978-7-118-10041-9

Ⅰ. ①偏… Ⅱ. ①刘… ②李… Ⅲ. ①偏微分方程—有限元法—研究 Ⅳ. ①O175. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 062052 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092　1/16　**印张** 15　**字数** 309 千字

2015 年 4 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—2000 册　**定价** 56.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777　发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755　发行业务: (010) 88540717

序　言

在工程和科学实践中, 很多问题都可以转化成微分方程的形式进行描述, 从而使如何求解微分方程解的问题显得十分重要. 由于各种因素的影响, 一般来说, 采用常规的解析方法很难求得微分方程的解, 尤其是非线性微分方程的求解问题. 显然解析求解的方法是不够的, 那么如何克服这些困难呢? 当然, 应该考虑微分方程的数值解法, 即通过求其数值近似解代替解析解来研究问题. 随着计算机信息时代的到来, 有效的微分方程数值解法也越来越多, 除了当前比较成熟的有限差分方法和有限元方法两大数值计算方法之外, 还有很多数值方法问世. 目前, 微分方程数值计算方法主要有混合有限元方法、配点法、迭代法、区域分解法、时空元方法、间断 Galerkin 方法、谱方法、有限体积 (元) 方法等. 这些数值方法都有各自的优缺点, 在不同的微分方程求解中发挥着重要作用, 并已经成为当今计算领域关注的热点话题. 目前, 国内外学者们已经出版了一些关于微分方程数值解法的相关书籍, 其中, 有限元方法和有限差分方法方面的居多, 而专注于混合有限元方法方面的专著书籍并不多见. 近年来, 作者查阅了大量微分方程数值方法的相关文献资料, 并以其中一些方法为基础, 做了关于几类非标准混合有限元方法方面的一些浅显的研究工作, 并将内容进行了整理, 编写了本书.

本书共分为 5 章内容: 第 1 章主要介绍了有限元方法的产生背景和发展历程, 给出经典混合有限元方法和几类常见的混合有限元方法的发展状况概述, 引入了本书中常用的基本定义和基本不等式; 第 2 章主要给出了分裂混合有限元方法的思想和发展状况的介绍, 并将分裂正定混合有限元方法进行了应用推广和算法改进. 首先将该方法结合常微分方程求解方法形成了一类新的分裂正定混合有限元数值格式, 通过黏弹性波方程进行了算法研究, 给出了详细的先验误差理论分析, 并通过数值结果对提出方法进行了一些简单验证, 同时结合扩展混合有限元方法形成了分裂扩展混合有限元方法, 并通过抛物型积分微分方程和伪双曲方程给出了详细的先验误差分析等理论证明, 最后通过数值算例对理论结果进行了数值验证; 第 3 章主要介绍了 H^1-Galerkin 混合有限元方法、H^1-Galerkin 扩展混合有限元方法和分裂 H^1-Galerkin 混合有限元方法等, 集中研究了 RLW 方程、RLW-Burgers 方程、耦合 BBM 方程、Sobolev 方程、四阶抛物方程和四阶强阻尼波动方程等的相关数值理论; 第 4 章主要通过 Cahn-Hilliard 方程和非线性四阶反应扩散方程研究了一类混合有限元方法, 并分别给出了时间向后 Euler 格式和线性化的 Crank-Nicolson 方法的全离散误差分析; 第 5 章主要给出了几类时间分数阶偏微分方程的混合有限元方法, 主要包含分数阶反应扩散方程和分数阶电报方程的 H^1-Galerkin 混合有限元方法理论和数值结果, 分数阶扩散问题的一类混合有限元方法和分数四阶问题的混合有限元方法的理论分析与数值模拟.

本书在完成过程中得到了方志朝、何斯日古楞、高巍、刘金存、魏小溪、王金凤等老师和赵猛、牟森、杜艳伟、张敏、余祖登等学生的帮助, 在这里表示感谢; 感谢国防工业出版社编辑的热心帮助; 感谢国家自然科学基金 (11301258, 11361035), 内蒙古自然科学基金 (2012MS0108, 2012MS0106), 内蒙古自治区高等学校科学研究基金重点项目 (NJZZ12011) 的资助.

由于作者水平有限, 本书难免存在错漏之处, 敬请读者批评指正.

作　者

2014 年 10 月于内蒙古大学

目　录

第 1 章　绪论

众所周知, 科学与工程中的许多实际问题都可以用线性或非线性发展型微分方程或方程组描述, 其中绝大多数的微分方程必须通过数值方法求近似解而无法给出其解析解. 因此, 数值求解问题就在当今的社会中显得十分重要. 随着计算机软、硬件的不断更新和计算方法的迅速发展, 科学计算和实验以及理论研究成为现代科学研究的三大主要手段. 科学计算还能解决实验及理论无法解决的问题, 并由此发现一些新的物理现象, 加深人们对物理机理的理解和认识, 促进科学发展. 当代科学计算已渗透到极其广泛的专业领域中, 形成了许多新的边缘学科, 如计算物理学、计算力学、计算流体力学、计算化学、计算生物学、计算材料学和计算经济学等. 而计算数学正是联系它们的纽带和共同基础[1]. 随着人类科学技术水平的发展, 出现了很多求解微分方程的数值方法. 而形形色色的数值方法, 长期以来吸引着数学家、物理学家和工程师们的关注. 一种数值方法, 包括它的数学基础和它的实现, 都紧紧地依赖于理论数学的发展和计算手段的改善. 计算机科学的发展, 现代大型高速电子计算机的出现, 对数值方法的冲击之大, 要求之高, 前所未有.

作为求解微分方程的一个强有力手段 —— 有限元方法, 正是电子计算机时代的产物[2]. 最早用有限元方法处理微分方程问题的近似计算始于 20 世纪 40 年代的 Courant 等人. 到了 20 世纪 50 年代中期, 随着电子计算机的迅速发展, 有限元方法由航空结构工程开始发展起来, 随后逐步应用到土木结构工程, 到了 60 年代, 在一些连续统领域, 都得到了越来越广泛的应用. 直到五六十年代, 我国的冯康院士[3] 和西方科学家各自独立奠定了有限元方法的理论基础. 由于越来越多的数学家加入到发展有限元方法的行列, 这种方法便由工程局限中逐渐解脱出来, 代之以统一的观点和严密的数学描述, 并确定了它的数学理论. 起初, 有限元方法广泛应用于船舶、一般机械、巨型建筑和水利设施 (桥梁、大坝等) 的设计; 近年来, 又被广泛地应用于流体动力学、电磁场等非应力分析问题. 有限元方法之所以能够获得如此迅速的发展和应用, 是因为它具有独特的优越性. 如常用的有限差分方法, 其不足之处是采用了直交网格, 因此它较难适应区域形状的任意性, 而且区分不出场函数在区域中轻重缓急的差异; 此外, 它还有编制不出通用程序的困难. 然而有限元方法可以用任意形状的网格分割区域, 还可以根据场函数的需要布置节点, 因而对区域的形状有较大的适应性. 此外, 有限元方法在实用上具有更大的优越性. 主要体现在它能够与大型电子计算机相结合, 能够编制出通用的计算程序, 很大程度上体现了数值计算方法的进步, 同时也促进了计算机科学的发展[2].

随着科学和工程等多个领域的科学家们和科技工作者的努力, 实际应用得到不断的发展, 有限元方法理论得到了不断的完善, 产生了很多基于有限元理论思想的数值计算方法, 如混合有限元方法[4-10]、时空 (连续或间断) 有限元方法[11-19]、(混合) 有限体积元方法[20-22]、特征 (混合) 有限元方法[23-26]等. 这些基于有限元思想的数值方法在数值求解整数阶偏微分方程问题上得到了很好的理论研究和实际应用, 目前, 有限

元方法已经开始应用于求解分数阶偏微分方程问题. 本书的主要目的是研究混合有限元方法, 介绍一些整数阶和分数阶偏微分方程问题的非标准混合有限元方法的数值算法和数值理论.

1.1 混合有限元方法简介

混合有限元方法是将问题中所求的未知量函数, 除了原来的未知量, 还将原方程的未知量的导数的相关表达式作为中间变量 (一般情况下引入的中间变量应具有实际意义) 共同求解的一种有限元方法. 通过混合有限元方法可以将高阶方程进行降阶处理, 化为低阶方程, 对决大多数问题而言有利于数值处理. 该方法出现于 20 世纪六七十年代, 并且由 Babuska[4] 和 Brezzic[5] 创立了混合有限元方法的一般理论. 20 世纪 80 年代初, Falk 和 Osborn[6] 提出了一种改进的混合方法, 在一定程度上增大了混合有限元法的适用范围. 随后得到了迅速的发展, 被广泛应用于固体力学、流体力学等诸多领域. 近年来, 很多杰出的数学家致力于混合有限元方法方面的研究并取得了丰富的成果. 在文献 [27, 28] 中, Nedelec 讨论了 R^3 空间中的混合有限元. 文献 [29, 30] 研究了椭圆问题的混合有限元方法; 文献 [31-33] 分别给出了抛物型方程和抛物型积分微分方程的混合有限元方法; 文献 [34] 给出了 Sobolev 方程混合有限元误差估计, 并证明了混合有限元解的存在唯一性; 在文献 [35] 中, Yuan 和 Pani 研究了变系数强阻尼波动方程的长时间行为下的混合有限元方法; 而 Chen 和 Huang 在文献 [36] 中研究了非线性二阶双曲波问题的混合有限元方法, 提出了一些时间离散格式, 并给出了超收敛结果; 文献 [37] 研究了奇异摄动问题的混合有限元方法; 文献 [38, 39] 分别研究了 Burgers 方程和正则长波方程的混合有限元方法, 文中证明了弱形式解和逼近解的存在唯一性, 并给出了数值模拟的计算过程, 验证了混合元方法的可行性; 文献 [40, 41] 研究了 SRLW 方程的混合有限元方法, 分别从不同的角度进行了误差分析和数值计算; 文献 [42] 中针对定常的 Navier-Stokes 方程提出一种非线性 Galerkin 混合元法, 并导出非线性 Galerkin 混合元解的存在性和误差估计及其后验误差估计; 文献 [43-45] 研究了非定常热传导 — 对流问题混合有限元方法; Boffi 等[7]讨论了含有拉格朗日乘子的界面问题的混合格式; Boffi[46]研究了特征值逼近和 hp 混合有限元应用问题; Arnold 等人研究了弹性力学问题的混合有限元方法[8, 9, 47, 48], 弹性动力学问题的混合有限元方法[49], 椭圆问题的混合有限元方法[50]等; 文献 [51] 研究了自适应混合有限元方法; 文献 [23,52-56] 研究了一些最优控制问题的混合有限元方法. 随着该理论的不断完善与发展, 混合有限元方法得到了计算数学界的认可, 并得到了足够的重视, 很多数学家基于传统的混合元方法提出大量行之有效的非标准混合有限元数值格式和数值理论, 如最小二乘混合有限元方法、混合间断有限元方法、非协调混合有限元方法、扩展混合有限元方法、正定分裂混合有限元方法、H^1-Galerkin 混合有限元方法等. 下面将给出几种混合有限元方法的详细介绍.

1994 年, Chen[57, 58]提出了一个被称为扩展混合有限元的新的混合有限元方法的

方法, 并借助二阶椭圆方程给出了详细的数学理论. 相比标准的混合有限元方法, 扩展混合有限元方法能够同时高精度逼近未知存量函数, 它的梯度函数和流量函数. 目前已经有了大量的相关研究, 1997 年, Arbogast 等人[59]将扩展混合有限元方法、块中心九点差分格式和数值相结合, 求解了带有张量系数的椭圆问题; 在文献 [60] 中, Chen 针对非线性二阶椭圆问题又给出了详细的数学理论分析, 并在文献 [61] 讨论了四阶椭圆问题的扩展混合有限元方法. 随着扩展混合有限元方法的发展, 该方法已经被应用于求解很多发展方程问题. Woodward 和 Dawson[62] 研究了半线性反应扩散问题的扩展混合有限元方法; Wu 和 Allen[63], Chen 等人[64-66]研究了半线性反应扩展方程的一些扩展混合有限元两层网格算法; Song 和 Yuan[67]研究了三维渗流驱动问题的扩展迎风混合多步方法; Guo 和 Chen[68]提出了对流占优输运问题的扩展特征混合有限元方法, 并给出了详细的理论误差分析; 2010 年, Chen 和 Wang[69]将 H^1-Galerkin 混合有限元方法和扩展混合思想相结合提出了 H^1-Galerkin 扩展混合有限元方法, 并通过非线性抛物问题给出了详细的误差分析理论; Liu 和 Li[70]给出了伪双曲方程问题的 H^1-Galerkin 扩展混合有限元方法的先验误差分析; 在文献 [71] 中, Liu 研究了 RLW-Burgers 问题的 H^1-Galerkin 扩展混合有限元方法, 并给出了最优的半离散和向后 Euler 全离散误差估计; Zhao 等[72]研究 Solobev 方程的扩展混合有限元方法, 讨论了先验误差估计理论; 文献 [73] 提出了对流占优问题稳定化的扩展混合有限元方法; Jiang 和 Li[74]研究了均匀棒纯纵向运动方程的扩展混合半离散格式, 并进行了详细的半离散误差分析; 文献 [75, 76] 分别研究了线性抛物积分微分方程和椭圆问题的扩展混合体积方法; 文献 [77] 提出了杂交扩展混合有限元方法, 并讨论了后验误差估计结果; Song 等[78]研究了杂交扩展混合有限元方法, 并通过椭圆问题给出了详细的数值理论分析.

最小二乘混合有限元方法是将最小二乘方法和混合有限元方法完美结合的结果, 它不仅保持了原最小二乘方法的特点, 同时具有了混合有限元方法的优势, 该方法相对于传统的混合有限元方法有着不必满足 LBB 相容性条件的优势, 并且具有对称正定的离散形式, 进而使得混合有限元空间的基函数的选取比较灵活. 该方法已经成为当今计算数学界重点关注的数值解法之一, 近年来更是活跃. 1996 年, Gardner 等[79]研究了正则长波方程的最小二乘有限元方法; 2002 年, 文献 [80] 针对非线性抛物问题提出了两种最小二乘混合元格式; 同年, 文献 [81] 将余量形式的 Petrov 最小二乘方法与非线性 Galerkin 混合元结合起来, 形成了一种非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元法, 成功数值求解了 N-S 方程, 并证明了该方法解的存在唯一性和收敛性; 2005 年, 文献 [82] 研究了弹性力学问题的最小二乘混合有限元方法; 文献 [83] 于 2006 年提出了抛物型积分微分方程的两个 Crank-Nicolson 最小二乘混合元格式, 并且两个格式都具有二阶收敛的结果; 文献 [84] 于 2007 年给出了伪双曲型方程的两类最小二乘混合元数值格式, 分别给出了两种格式的时间一阶和二阶精度, 并通过数值模拟得到了和理论分析相同的结果; 文献 [85] 提出了线性弹性问题的自适应最小二乘混合元数值格式, 并给出了详尽的数值理论分析; 2008 年, 文献 [86] 提出了正则长波方程的最小二

乘混合有限元格式; 2009 年, 文献 [87] 针对伪双曲方程得到了两类分裂最小二乘混合有限元格式, 通过适当地选择最小二乘泛函, 可以将程序分裂成分别关于未知量函数和其流量的两个子格式, 进而使程序容易实现; 同年, 文献 [88] 给出了线性和非线性抛物问题的一些分裂最小二乘混合元格式, 这些程序都能将未知量函数和流量函数进行分离成为独立对称正定的子格式, 得到了最优阶误差估计结果, 并通过数值实验得到了和理论分析相吻合结果; 2010 年, 文献 [89] 对于稳态热传导对流问题提出了最小二乘 Galerkin-Petrov 非协调混合有限元方法. 目前针对各种不同的问题寻求合适的最小二乘能量泛函, 不断地进行有价值性的推广应用和具有创造性的最小二乘混合格式的设计, 从而给最小二乘混合方法注入了活力, 使之成为重要的数值解法之一.

近年来, 非协调混合有限元方法得到了迅速的发展, 有很多国内外的专家、学者加入了研究该方法的行列. Zhang 等[90]讨论了不可压弹性力学问题的四边形非协调有限元方法; 文献 [91] 研究了弹性力学问题的非协调混合有限元方法; Hu 和 Shi[92]研究了平面弹性力学问题的低阶矩形非协调混合有限元; Man 等[93]利用低阶矩形非协调混合有限元方法研究了三维弹性力学问题; Awanou[94]提出了旋转非协调矩形混合元方法, 并求解了弹性问题; 文献 [95-97] 研究了非协调 H^1-Galerkin 混合有限元方法; Qiao 等[98]对麦克斯韦方程给出了非协调混合有限元逼近的外推和超收敛分析; Yi[99]讨论了二维和三维的线性弹性力学问题的矩形非协调混合有限元方法; 2011 年, Gopalakrishnan 和 Guzmán[100]针对线性弹性问题提出了对称非协调混合有限元方法; 文献 [101] 给出了带有阻尼项的定常 Stokes 方程的低阶非协调混合有限元方法的超逼近和超收敛分析.

时空混合间断有限元方法, 主要是利用混合有限元方法在空间方向上进行降阶处理, 然后采用空间方向间断或时间方向间断求解一类数值计算方法, 因此一般可以把这类方法分为空间混合间断有限元方法和时间混合间断有限元方法. 该方法不仅体现了混合有限元方法的特点, 也体现了时间（或空间）间断有限元方法的特点. 间断有限元方法是利用完全间断的分片多项式作为近似解和实验函数空间的一种有限元方法, 它更广泛地涉及和直接服务于航空学和电磁学, 工程和机械, 石油勘探和天气预报等许多领域的理论和技术的研究、分析和发展, 成为许多数值方法和计算物理的重要学术期刊上的热门课题. 而混合间断有限元方法能够更好地处理高阶发展问题, 具有很强的实用性. 文献 [102] 研究了多孔介质中可压缩驱动问题空间混合间断有限元方法, 并给出了详细的误差分析过程; Yang 和 Chen[103]给出了可压缩和不可压缩驱动问题的空间混合间断有限元方法的超收敛分析; Houston 等[104]研究了线性化的不可压缩磁流体动力学问题的空间混合间断 Galerkin 方法; 文献 [17] 提出了四阶抛物方程的间断时空混合有限元方法; 文献 [18] 采用文献 [17] 中的方法数值求解了一类四阶抛物型积分微分方程, 并给出了先验误差结果; 2008 年, Liu 等[14]研究了对流扩散方程的时间间断混合有限元方法, 并给出了理论误差分析, 同时通过数值例子对方法进行了简单验证; He 等[105]提出了抛物问题的分裂混合时间间断有限元方法, 讨论了先验误差分析理论, 并对理论分析进行了数值验证; 2009 年, 文献 [16] 进一步研究了一类带广义边

界条件的四阶抛物型方程的混合间断时空有限元法.

除了以上介绍的几类混合有限元方法, 还有很多混合方法值得关注, 此处不再赘述.

1.2 基本概念及不等式

本节给出一些常用的基本不等式和常用的符号定义等.

简单积分不等式: 以下积分不等式成立

$$\int_0^t \int_0^\tau |\psi(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant C \int_0^t |\psi(s)|^2 \mathrm{d}s, \tag{1.2.1}$$

式中: ψ 是 $[0,t], t\in[0,T]$ 上的可积函数.

连续 Gronwall 引理[45, 106]: 设 $f(t), g(t)$ 是 $[0,T]$ 上的非负可积函数, 正常数 α, β 满足

$$f(t) \leqslant \alpha g(t) + \beta \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, t\in[0,T],$$

则如下不等式成立

$$f(t) \leqslant \alpha g(t) + \beta exp(\beta T) \int_0^t g(s)\mathrm{d}s, t\in[0,T].$$

离散 Cronwall 引理[45, 106]: 设 ψ_n 是非负数列且满足

$$\psi_0 \leqslant \alpha_0,\ \psi_n \leqslant \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \psi_j,\ n \geqslant 1,$$

式中: $\omega_j \geqslant 0$; $\{\alpha_n\}$ 为非负的单调不减数列, 则有

$$\psi_n \leqslant \mathrm{e}^{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \omega_j} \alpha_n,\ n \geqslant 1.$$

定义 1.2.1 设 m 为整数, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ 为实数, 则 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 定义为

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\ |\alpha| \leqslant m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

式中: $L^p(\Omega) = \left\{ u \middle| \int_\Omega \middle| u|^p \mathrm{d}x < +\infty \right\}$, 相应的范数定义为

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

特别当 $p=2$ 时, 简记 $\|u\|_{2,\Omega} = \|u\|$; 当 $m=0$ 时, 有 $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

定义 1.2.2 在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的范数定义为:

(1) 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, 有

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}},$$

当 $p=2$ 时, 记空间 $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, 相应的范数记为 $\|u\|_{m,2,\Omega} = \|u\|_m$; 特别当 $m=0, p=2$ 时, 记空间 $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, 相应范数为 $\|u\|_{0,2,\Omega} = \|u\|_0 = \|u\|$.

(2) 当 $p=+\infty$ 时, 有

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \sup_{|\alpha|\leqslant m} \Big\{ ess \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u| \Big\}.$$

当 $m=0$ 时, 记 $\|u\|_{0,\infty,\Omega} = \|u\|_\infty$.

定义 1.2.3 在空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的半范数定义为:

(1) 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, 有

$$|u|_{m,p,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

特别当 $m=0$ 时, 有 $|u|_{0,p,\Omega} = \|u\|_{p,\Omega}$.

(2) 当 $p=+\infty$ 时, 有

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \sup_{|\alpha|=m} \Big\{ ess \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u| \Big\}.$$

Hölder 不等式: 设 $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, 且满足 $1/p+1/q=1$, 则对于任意的 $f \in L^p(\Omega)$ 和任意的 $g \in L^q(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega |fg|\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_\Omega |g|^q \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

特别当 $p=q=2$ 时, 有 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_\Omega |fg|\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_\Omega |f|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_\Omega |g|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Young 不等式: 设 a, b, p, q 为正实数, $1/p+1/q=1$. 则成立

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

特别当 $p=q=2$ 时, 有

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$ab \leqslant \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Poincaré不等式: 设 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ 为有界区域, $\Gamma \subset \partial\Omega, \mathrm{meas}(\Gamma) > 0$. 则存在常数 $C = C(\Omega) > 0$, 使得

$$||u||_{1,p} \leqslant C\Big(|u|_{1,p} + \Big|\int_\Gamma u\mathrm{d}s\Big|\Big),\ u \in W^{1,p}(\Omega),\ 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

特别当 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时, 此不等式给出了 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间中范数 $||\cdot||_{1,p}$ 与半范数 $|\cdot|_{1,p}$ 的等价性, 此时可有

$$||u||_{0,p} \leqslant C|u|_{1,p},\ u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Green 公式[45]: (1) 当 $u \in H^2(\Omega)$ 和 $v \in H^1(\Omega)$ 时, 有

$$\int_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},$$

式中: $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; ∇u 为 u 的梯度, $\Delta_u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

(2) 当 $v \in H^1(\Omega)$ 和 $\phi \in H(\mathrm{div};\Omega)$ 时, 有

$$\int_\Omega v\nabla \cdot \phi\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla v \cdot \phi\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\phi \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}s,$$

式中: $H(\mathrm{div};\Omega) = \{\phi \in (L^2(\Omega))^d |\ \nabla \cdot \phi \in L^2(\Omega)\}$; $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; ∇v 为 v 的梯度; $\nabla \cdot \phi = \mathrm{div}\phi$ 为向量函数 ϕ 的散度.

本书仅仅列出一些基本的不等式及定义, 关于 Sobolev 空间及相关性质、解析方法、数值解法等详细内容可以参阅已出版的相关教材和专著[107−114].

第 2 章　正定混合有限元方法

羊丹平教授[115] 于 2001 年针对多孔介质中可压缩驱动问题的非线性抛物型压力方程提出一个新的混合有限元方法 —— 分裂正定混合有限元方法. 该方法相对于标准的混合有限元方法有一定的优点: 形成混合有限元系统的系数矩阵是对称正定的, 同时流函数方程不依赖于压力方程, 进而能够运用不同有效的算法独立而快捷地获得流函数的近似解; 该方法不会导致鞍点问题. 2006 年, 文献 [116] 给出了多孔介质中可压缩驱动问题的全离散分裂正定混合有限元格式, 并进行了理论误差分析.

但直到最近几年, 该方法才得到了足够重视, 2009 年, 文献 [117] 将该方法成功应用到了双曲方程 $(c(x,t)u_{tt}-\nabla\cdot(\mathcal{A}(x,t)\nabla u)=f(x,t))$; 文献 [117] 给出了二阶双曲问题的半离散和全离散格式误差估计, 并证明了半离散格式的有限元解的存在唯一性, 最后通过数值算例验证了算法的可行性; 2012 年, Liu[118] 结合伪双曲方程的特点提出两种分裂正定混合有限元格式, 并对误差估计进行了详细的分析; 2012 年, 文献 [119] 利用分裂正定混合有限元方法数值求解了两类发展型积分微分方程, 给出了详细的误差分析的理论过程, 并通过数值结果说明了理论结果的正确性; 几乎与文献 [119] 同时, He 等[105] 将分裂正定混合有限元思想和时间间断思想相结合, 提出了分裂混合时空间断有限元方法, 并讨论了先验误差分析理论, 同时通过数值算例给出了理论结果的一个验证; 郭和张[120]对拟抛物型方程进行了研究, 鉴于方程的特点给出了两类混合格式, 并给出了误差分析过程, 同时采用数值算例验证了算法的有效性和理论分析的正确性; 最近, Wang, Chen 和 Tang[121] 研究了双曲方程的全离散分裂正定混合有限元方法, 并讨论了一些超收敛现象; Shi 和 Tang[122] 提出了伪双曲问题的分裂正定非协调混合有限元方法; 文献 [123] 研究了黏弹性波问题的分裂正定混合有限元方法, 文中主要先进行了时间半离散估计, 然后再进行空间方向上有限元的逼近并给出了全离散误差估计; 2014 年, Luo 和 Li[124] 针对双曲问题提出了 POD 降阶分裂正定混合有限元方法, 给出了详细的计算过程, 并分析了新的思想下的误差结果, 通过两种不同区域情况的数值例子进一步验证了提出算法的实用性; 最近, Du 等[125] 提出了含有对流项的 Sobolev 方程的一种基于两个变换的分裂正定混合有限元方法, 通过引入两个变换并结合分裂正定混合有限元方法思想形成了新的分裂正定混合元格式, 并在时间方向上采用 Crank-Nicolson 离散, 给出了完整的理论误差分析过程, 并通过一个简单的一维算例检验了方法的可行性和有效性.

本章基于分裂正定混合有限元方法[115]的基本思想, 形成两类新的分裂正定混合有限元格式, 也就是基于两个变换的分裂正定混合有限元方法和扩展正定混合有限元方法; 通过黏弹性波问题给出了基于两个变换的分裂正定混合有限元方法, 并给出了理论误差分析和数值模拟结果; 通过抛物型积分微分方程和伪双曲型方程分别给出了扩展混合有限元方法的先验误差分析, 并通过数值过程验证了算法理论结果的正确性.

为了给出混合有限元格式及相关先验误差分析, 需要给出一些空间及相应的估计结果. 令 X_{h_u} 和 V_{h_σ} 分别是 $L^2(\Omega)$ 和 W 的子空间, 具有逆估计[108]和以下的逼近性

质[29, 109, 126, 127]: 对于 $0 \leqslant q \leqslant +\infty$ 和正整数 r, r^*, k, 有

$$\begin{cases} \inf\limits_{\omega_h \in V_{h_\sigma}} \|\omega - \omega_h\|_{L^q(\Omega)} \leqslant Ch_\sigma^{r+1}\|\omega\|_{W^{r+1,q}(\Omega)}, \forall\, \omega \in H(\mathrm{div};\Omega) \cap [W^{r+1,q}(\Omega)]^d; \\ \inf\limits_{\omega_h \in V_{h_\sigma}} \|\nabla \cdot (\omega - \omega_h)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant Ch_\sigma^{r^*}\|\nabla \cdot \omega\|_{W^{r^*,q}(\Omega)}, \forall\, \omega \in H(\mathrm{div};\Omega) \cap [W^{r+1,q}(\Omega)]^d; \\ \inf\limits_{v_h \in X_{h_u}} \|v - v_h\|_{L^q(\Omega)} \leqslant Ch_u^{k+1}\|v\|_{W^{k+1,q}(\Omega)}, \forall v \in L^2(\Omega) \cap W^{k+1,q}(\Omega). \end{cases} \tag{2.0.1}$$

这里当空间为 Raviart-Thomas 空间[29]、Nedelec 空间[27, 28]和 Brezzi-Douglas-Fortin-Marini 空间[126] 时, $r^* = r + 1$; 当空间为 Brezzi-Douglas-Marini 空间[127]和 Brezzi-Douglas-Durán-Fortin 空间[30] 时, $r^* = r$; 当空间为 Chen-Douglas 空间时, 包括以上两种情形.

为了下面误差分析的需要, 引入两个算子. 众所周知, 在任何一个古典的混合有限元空间里, 都存在一个算子 R_h: $H(\mathrm{div};\Omega) \to V_{h_\sigma}$[109, 127], 使得对 $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, 有

$$\begin{cases} (\nabla \cdot (\sigma - R_h\sigma), \phi_h) = 0, \forall\, \phi_h \in \nabla \cdot V_{h_\sigma} = \{\phi_h = \nabla \cdot \omega_h, \omega_h \in V_{h_\sigma}\}, \\ \|\sigma - R_h\sigma\|_{L^q(\Omega)} \leqslant Ch_\sigma^{r+1}\|\sigma\|_{W^{r+1,q}(\Omega)}, \\ \|\nabla \cdot (\sigma - R_h\sigma)\|_{L^q(\Omega)} \leqslant Ch_\sigma^{r^*}\|\nabla \cdot \sigma\|_{W^{r^*,q}(\Omega)}. \end{cases} \tag{2.0.2}$$

再定义一个 L^2–投影算子 P_h: $L^2(\Omega) \to X_{h_u}$, 使得

$$\begin{cases} (u - P_h u, v_h) = 0, \forall u \in L^2(\Omega),\ v_h \in X_{h_u}, \\ \|u - P_h u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant Ch_u^{k+1}\|u\|_{H^{k+1,q}(\Omega)},\ \forall\, u \in H^{k+1}(\Omega). \end{cases} \tag{2.0.3}$$

C 为与空间网格参数 h_u, h_σ 和时间离散参数 δ 无关的正常数, 尽管在不同处有所不同. 定义 $(\cdot,\cdot)$ 为 $L^2(\Omega)$ 或 $[L^2(\Omega)]^d$ 的内积. 并引入函数空间 $W = H(\mathrm{div};\Omega) = \{\omega \in [L^2(\Omega)]^d;\ \nabla \cdot \omega \in L^2(\Omega)\}$.

2.1　双曲波问题的分裂混合有限元方法

2.1.1　引言

本节考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \nabla \cdot (a(x)\nabla u + b(x)\nabla u_t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times J; \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \bar{J}; \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

式中: Ω 为 $\mathbf{R}^d$ 中的带有光滑边界 $\partial\Omega$ 有界凸角形区域; $J = (0,T]$ $(0 < T < \infty)$ 为时间区间; $u(x,t)$ 为位移; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; $a(x)$ 和 $b(x)$ 分别为弹性系数和黏性系数, 并且存在正常数 $a_{\min}, a_{\max}, b_{\min}$ 和 $b_{\max}$, 使得

$$0 < a_{\min} \leqslant a(x) \leqslant a_{\max}, 0 < b_{\min} \leqslant b(x) \leqslant b_{\max}, x \in \bar{\Omega}.$$