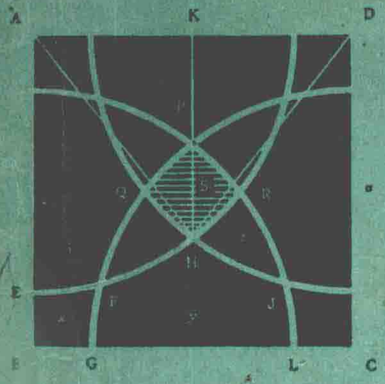

GAOZHONG
SHUXUE TIJIE

高中数学题解

江 西 人 民 出 版 社

数 学 小 丛 书

高中数学题解

谭 启 编

江西人民出版社

高 中 数 学 题 解

谭 浩 编

江西人民出版社出版

江西省新华书店发行　　江西新华印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张 $12\frac{1}{4}$ 字数285,000字

1973年8月第1版 1973年8月第1次印刷

印数：1—50,000册

统一书号：7110·3　　定价：0.83元

毛主席语录

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

编 者 的 话

数学是研究数和空间形式的自然科学。从微观世界到宏观世界，数学在阶级斗争、生产斗争和科学实验中，得到日益广泛的应用。相对地说，数学是一门逻辑性比较强，比较艰深的学科。编写本书主要目的，是为高中学生提供课外阅读资料，以便在学习数学方面有所帮助，也可供中学教师教学参考之用。

学好数学，要遵循毛主席实践第一的教导，斩荆辟棘，知难而进！只有认真掌握所学教材的基本概念，才有可能在处理数学问题时，胸有成竹，视野广阔。

本书在出版前，承蒙江西师范学院数学系傅超凡等同志多方指导；承蒙新建县文教局各方面大力支持，特别是熊大桢等同志为本书反复审核，反复修订，提供许多宝贵意见。在此，编者谨表示深挚的感激和敬意。

本书题解过程大都比较简炼，读者倘若遇到困难，可及时翻阅书末所附有关公式、定理。在写作过程中，编者曾力图做到主要类型和基础知识完备，以便同学们阅读时能够鸟瞰全局，但限于编者水平，谬误定然不少，希望广大读者批评、指正。

编者　1973.3.

目　　录

第一编 代 数 学

第一章 数的拓展与数学归纳法

1．下列各数里，哪些是有理数？无理数？为什么？

(1) $\sqrt[3]{\dfrac{568}{243}}$；　　(2) $\lg\operatorname{tg}(-840^\circ)$；

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\dfrac{5\pi}{12}$；(4) $5.3\dot{1}0\dot{6}$；

(5) $10^{2\lg\sqrt{\lg 5}}$；

(6) $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$。

〔解〕 将上述各数进行化简：

(1) $\sqrt[3]{\dfrac{568}{243}}=\sqrt[3]{\dfrac{8\times 71\times 3}{3^5\times 3}}=\dfrac{2}{9}\sqrt[3]{213}$；

(2) $\lg\operatorname{tg}(-840^\circ)=\lg\operatorname{tg}240^\circ=\lg\operatorname{tg}60^\circ=\dfrac{1}{2}\lg 3$；

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\dfrac{5\pi}{12}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)=1$；

(4) $5.3\dot{1}0\dot{6}=5\dfrac{3106-3}{9990}=5\dfrac{3103}{9990}$；

(5) $10^{2\lg\sqrt{\lg 5}}=10^{\lg\lg 5}=\lg 5=1-\lg 2$；

(6) $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$

$=\lg[(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2]^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}\lg[3+\sqrt{5}+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}]$

$=\dfrac{1}{2}\lg 10=\dfrac{1}{2}$。

答：根据有理数和无理数的意义可知，（3）、（4）、（6）是有理数，而（1）、（2）、（5）是无理数。

2．m 为何实数值时，复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 为实数？为纯虚数？等于0？

〔解〕 由 $m^2-5m-6=0$，得 $m_1=6$，$m_2=-1$。

由 $m^2-3m-4=0$，得 $m_1=4$，$m_2=-1$。

$\therefore$ 当 $m=6$ 或 $m=-1$ 时为实数；

当 $m=4$ 时，$m^2-3m-4=0$，但 $m^2-5m-6\neq0$，为纯虚数；

当 $m=-1$ 时，$m^2-3m-4=0$，同时 $m^2-5m-6=0$，复数为0。

3． 求证：对于任意整数 n，$f(n)=n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{n}{2}-1$ 都是整数，并且用3除时余2。

〔证明〕

（1） $f(n)=n^3+n^2+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}-1=n^2(n+1)+\dfrac{n}{2}(n+1)-1$.

$\because$ n 为整数，则 $n^2(n+1)$ 亦为整数；又 n 与 $n+1$ 是连续整数，故 $\dfrac{n}{2}(n+1)$ 必为整数，故 $f(n)$ 必为整数.

（2） 要证 $f(n)$ 用3除时余2，只须证明 $\phi(n)=n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{n}{2}$ 能被3整除.

$$\because\quad \phi(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n-1)}{2},$$

这里，$n(n+1)(n+2)$ 和 $n(n+1)(n-1)$ 都是三个连续整数之积，且都能被6整除，故 $\phi(n)$ 能被3整除，从而证明了 $f(n)$ 用3除时余2.（读者试用余数定理证明）

4．设有六位数 $1abcde$，乘以3后，变为 $abcde1$，求这数。

〔解〕 设 $abcde=x$，

则 $1abcde=100000+x$；

而 $abcde1=10x+1$，

所以得方程 $3\cdot(100000+x)=10x+1$

即 $7x=299999$，

$\therefore \quad x=42857$。

答：这个六位数为142857。

5. 试证$\sqrt{2}$是无理数．

〔证明〕 用归谬法：如果$\sqrt{2}$是有理数，就能用一个既约分数来表示，令$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$（这里 m、n 是自然数，且m、n互质）．则$2=\dfrac{n^2}{m^2}$，即 $n^2=2m^2$，由此可推出n^2定为偶数，从而n一定是偶数；再令 $n=2k$，那末 $m^2=2k^2$．同理可知m也是偶数．

上述推证结果 m、n 均为偶数，显然和$\dfrac{n}{m}$是既约分数相矛盾．据此可知$\sqrt{2}$不能用普通分数来表示，另外，显然$\sqrt{2}$不能用整数来表示，因而$\sqrt{2}$是无理数．

6．篮球的直径是26.5厘米，求这个篮球的体积和面积。

〔解法1〕 因这里近似数26.5有三个有效数字，所得结果从第一个不是零的数字起，应该保留3个数字，π取4个有效数字，令球的体积为V，球的面积为S，则

$$V=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{1}{6}\times 3.142\times(26.5)^3$$

$$\approx 0.5237\times 18610$$

$$\approx 9750。\quad（精确到10立方厘米）$$

$$S=\pi d^2=3.142\times(26.5)^2$$

$$\approx 3.142\times 702.3$$

$$\approx 2210。\quad（精确到10平方厘米）$$

答：球的体积是9750立方厘米；球的面积是2210平方

厘米。

〔解法2〕 查数学用表法：

(1) ∵ $V=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{1}{6}\times3.142\times(26.5)^3$,

则 $\lg V=\lg 3.142+3\lg 26.5-\lg 6$

$=0.4972+3\times1.4232-0.7782$

$=3.9886$,

∴ $V=9740$。

(2) ∵ $S=\pi d^2=3.142\times(26.5)^2$,

则 $\lg S=\lg 3.142+2\lg 26.5$

$=0.4972+2\times1.4232$

$=3.3436$,

∴ $S=2206$。

答：球的体积是9740立方厘米；球面积是2206平方厘米。

7．计算 $\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots\cdots+\frac{9}{10!}$的近似值，精确到$\frac{1}{10^{10}}$。

〔解〕 由于这个数列的通项为$\frac{n-1}{n!}(n=3,4,\cdots\cdots,10)$，

而 $\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$,

所以，所求的和可写为：

$$\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{99!}-\frac{1}{10!}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{10!}.$$

答：所求近似值约为 0.499999725.

8．应用二项式定理求$(3.002)^6$的近似值，使误差小于0.001.

〔解〕 $(3.002)^6=\left(3+\frac{2}{1000}\right)^6=3^6+6\cdot3^5\cdot\left(\frac{2}{1000}\right)+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot3^4\cdot$

$\left(\frac{2}{1000}\right)^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot3^3\cdot\left(\frac{2}{1000}\right)^3+\cdots\cdots$

显然，我们看到第四项的值已小于0.001，从此项开始以后各项的值，对我们所要求的近似值都不发生影响，因此只须计算到第三项为止。

$\therefore\quad (3.002)^6 \approx 729 + 2.916 + 0.0048$.

答：$(3.002)^6 \approx 731.921$.

〔别解〕 查数学用表法：

令 $x = (3.002)^6$,

则 $\lg x = 6 \times \lg 3.002$

$= 6 \times 0.4774$

$= 2.8644$

$\therefore x = 731.8$.

〔注〕 别解的最后误差只能达到0.1，不符本题要求。这说明如果高次乘方结果要求精确度较高时，以使用二项式定理较好。

9．比较下列各数的大小：

（1）$-3\sqrt[6]{2}$ 与 $2\sqrt[3]{-4}$；（2）$5+3i$ 与 $4+5i$

（3）$2\sqrt{6}\sin 15^\circ$ 与 $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}})$.

〔解〕（1）$\because\quad -3\sqrt[6]{2} = -\sqrt[6]{2\cdot 3^6} = -\sqrt[6]{1458}$,

又 $2\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4\cdot 2^3} = -\sqrt[3]{32} = -\sqrt[6]{1024}$

而 $-\sqrt[6]{1458} < -\sqrt[6]{1024}$,

$\therefore\quad -3\sqrt[6]{2} < 2\sqrt[3]{-4}$.

（2）虚数不能比较大小。

（3）$\because 2\sqrt{6}\sin 15^\circ = 2\sqrt{6}\sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= 2\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 3 - \sqrt{3};$$

而 $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)$

$$=\log_2\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\log_2\left(6+4\sqrt{2}-2\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right.$$

$$\left.+6-4\sqrt{2}\right)=\log_2 8=3,$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{6}\sin 15^\circ<\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right).$$

10．计算：$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}+4^{\lg 0.01}-9^{\lg 0.1}+55^{\log_5 1}-(-0.3\dot{6}\dot{3})^{-2}$。

〔解〕 原式$=\left(\frac{4}{3}\right)^2+4^{-2}-9^{-1}+55^0-\left(-\frac{363-3}{990}\right)^{-2}$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{9}+1-\left(\frac{11}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{16}{9}-\frac{1}{9}\right)+1+\left(\frac{1}{16}-\frac{121}{16}\right)=-4\frac{5}{6}.$$

11．化简：$\sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}}8-4\right)^2}+\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}-(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}$

$$\cdot\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}-0.0016^{-\frac{1}{4}}-3\left|\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right|.$$

〔解〕 原式$=\sqrt{(-3-4)^2}+3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$

$$\cdot\left[\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{4}{3}}-(0.2)^{-1}-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$

$$=7+\frac{3}{2}\sqrt{2}-2-5-\frac{3}{2}\sqrt{2}=0.$$

12．已知x,y是实数，且$(x^2+y^2)-xyi$是$13+6i$的共轭复数，求x、y.

〔解〕 因为$13+6i$的共轭复数是$13-6i$，根据复数相等条件，可得方程组：

$$\begin{cases}x^2+y^2=13\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ xy=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

（1）+（2）×2，得　　$x+y=\pm 5$,

于是，本题归结为解如下两个方程组：

$$\begin{cases}x+y=5,\\xy=6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=-5,\\xy=6.\end{cases}$$

答： $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-2,\\y_3=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-3,\\y_4=-2.\end{cases}$

13．从 $(x+y)^2i-\dfrac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1$ 关系中求 x、y 的实数值。

〔解〕 两边乘以 $-i$，得到：

$$(x+y)^2+6+xi=yi+5(x+y)+i,$$

使其实数部分相等，虚数部分相等，得方程组：

$$\begin{cases}(x+y)^2+6=5(x+y)\\x=y+1\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}(x+y)^2-5(x+y)+6=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\x-y=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

由（1）可得：$x+y=\dfrac{5\pm1}{2}$，于是得如下方程组：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x+y=3,\\x-y=1;\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1.\end{cases}$$

答： $x_1=2$，$y_1=1$；$x_2=\dfrac{3}{2}$，$y_2=\dfrac{1}{2}$。

14．求复数 $\dfrac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+\sqrt{x^4+y^4}i}$ 的模。

〔解〕 分子的模等于：

$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2;$$

分母的模等于：

$$\sqrt{(xy\sqrt{2})^2+(\sqrt{x^4+y^4})^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2.$$

因为商的模等于模的商，所以

$$\left|\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+\sqrt{x^4+y^4}i}\right|=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

答：复数的模是1．

15. 化简 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{3638}$ 。

〔解〕 原式 $=\left[\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{3638}=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^{3638}$

$$=\left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^{2}\right\}^{1819}=\left[\frac{2}{4}(1+2i+i^{2})\right]^{1819}$$

$$=i^{1819}=i^{1816+3}=i^{3}=-i。$$

16. 计算 $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1-i)^{100}}$.

〔解法 1〕 原式 $=\dfrac{[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)]^{50}}{(\sqrt{2})^{100}[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]^{100}}$

$$=\frac{2^{50}(\cos 1500^\circ+i\sin 1500^\circ)}{2^{50}[\cos(-4500^\circ)+i\sin(-4500^\circ)]}$$

$$=\cos(1500^\circ+4500^\circ)+i\sin(1500^\circ+4500^\circ)$$

$$=-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

〔解法 2〕 原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{[(1-i)^{2}]^{50}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-2i}\right)^{50}=\left(\dfrac{\sqrt{3}i-1}{2}\right)^{50}$

$$=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3\times16+2}=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

17. 用棣美弗定理求三倍角的正弦公式及余弦公式.

〔解〕 因为 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{3}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ ………(1)

又 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{3}$

$$=\cos^{3}\theta+3\cos^{2}\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^{2}+(i\sin\theta)^{3}$$

$$=\cos^{2}\theta+3i\sin\theta(1-\sin^{2}\theta)$$

$$-3\cos\theta(1-\cos^{2}\theta)-i\sin^{3}\theta$$

$$=\cos^{3}\theta+3i\sin\theta-3i\sin^{3}\theta$$

$$-3\cos\theta+3\cos^{3}\theta-i\sin^{3}\theta$$

$$=(4\cos^{3}\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^{3}\theta)\cdots(2)$$

比较（1）、（2），根据复数相等条件，得

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta;$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

18．用棣美弗定理证明：

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\cdot\sin^4\theta\cdots\cdots$$

$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + C_n^5\cos^{n-5}\theta\cdot\sin^5\theta\cdots\cdots$$

〔证明〕 据棣美弗定理：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$，

又据二项式定理：

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= \cos^n\theta + C_n^1\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta) + C_n^2\cos^{n-2}\theta(i\sin\theta)^2 \\
&\quad + C_n^3\cos^{n-3}\theta(i\sin\theta)^3 + C_n^4\cos^{n-4}\theta(i\sin\theta)^4 \\
&\quad + C_n^5\cos^{n-5}\theta(i\sin\theta)^5\cdots\cdots \\
&= (\cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\cdot\sin^4\theta + \cdots\cdots) \\
&\quad + i(C_n^1\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta \\
&\quad + C_n^5\cos^{n-5}\theta\cdot\sin^5\theta\cdots\cdots).
\end{aligned}$$

根据复数相等条件，仿上题，所以原命题成立。

19．已知 $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$，**求证：**$x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$。

〔证法1〕 $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$ 可以化成 $x^2 - 2\cos\alpha\cdot x + 1 = 0$，

解得 $x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$，

所以

$$\begin{aligned}
x^n + \frac{1}{x^n} &= (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n} \\
&= (\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha) + (\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha) \\
&= 2\cos n\alpha.
\end{aligned}$$

〔证法 2〕 用数学归纳法：

（1）当 $n=1$ 时，等式显然成立。

（2）设当 $n=k$，等式也是成立的，即有

$$x^k+\frac{1}{x^k}=2\cos kx.$$

则当 $n=k+1$ 时，因为

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$$

$$=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

$$=2\cos k\alpha\cdot 2\cos\alpha-2\cos(k-1)\alpha$$

$$=4\cos k\alpha\cdot\cos\alpha-2(\cos k\alpha\cdot\cos\alpha+\sin k\alpha\cdot\sin\alpha)$$

$$=2(\cos k\alpha\cdot\cos\alpha-\sin k\alpha\cdot\sin\alpha)$$

$$=2\cos(k+1)\alpha.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也是成立的。

根据(1)、(2)可以断定，对于任意的自然数 n，原命题成立。

20．设 1 的两个立方根为 $\omega_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$， 试证明以下诸等式成立：

（1）$\omega_1^3=\omega_2^3=1$；　（2）$1+\omega_1+\omega_2=0$；

（3）$\omega_1\cdot\omega_2=1$；　（4）$\omega_1^2=\omega_2$；

（5）$\omega_2^2=\omega_1$；　（6）$1+\omega_1^2+\omega_2^2=0$；

（7）$1+\omega_1+\omega_1^2=0$；　（8）$1+\omega_2+\omega_2^2=0$。

〔证明〕

（1）$\because$ $\omega_1^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^3$

$$=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1,$$

又 $\because$ $\omega_2^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^3$

$$=-(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=1;$$

$\therefore$ $\omega_1^3=\omega_2^3=1$。

(2) $1+\omega_1+\omega_2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$。

(3) $\omega_1\omega_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$。

(4) $\omega_1^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^2$

$$=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega_2.$$

(5) $\omega_2^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$$=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega_1.$$

(6) $1+\omega_1^2+\omega_2^2=1+\omega_2+\omega_1=0$。

(7) $1+\omega_1+\omega_1^2=\frac{1-\omega_1^3}{1-\omega_1}=\frac{1-1}{1-\omega_1}=0$。

(8) $1+\omega_2+\omega_2^2=\frac{1-\omega_2^3}{1-\omega_2}=0$。

〔注〕 请读者注意以上诸等式在复数运算中有着广泛的应用。

21. 计算： $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6+\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$。

〔解法1〕 用棣美弗定理：

$$\text{原式}=(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^6+(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)^6$$
$$=(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)+(\cos 900^\circ+i\sin 900^\circ)$$
$$=-2。$$

〔解法2〕 用20题的复数运算性质：

$$\text{原式}=\left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}(-i)\right]^6+\left[\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-i)\right]^6$$
$$=\omega_2^6(-i)^6+\omega_1^6(-i)^6=(-i)^6+(-i)^6$$
$$=i^6+i^6=-2.$$

〔注〕 此题还可用乘法公式或牛顿二项式定理展开，但比较繁冗。

22. 设 n 是自然数，求证：