杜志建 主编

TIANXING EDUCATION 天星教育

试题调研®

高考意见领袖

高分宝典系列

2012高考成功计划

高考状元纠错笔记

2012年高考必纠的83个易错点

一本2011高考状元夺取高分的秘籍

一本汇集名校名师备考经验的必备手册

一本教你如何避开命题陷阱的笔记簿

数学

—文科—

天星教育图书

1039885304

02894374

课标通用

CHISO 青少社 SINCE 1956 新疆青少年出版社

试题调研®

高考意见领袖

高分宝典系列　　2012高考成功计划

高考状元纠错笔记

主　　编：杜志建

编 委 会：桑进林　张　　　孙天桥　张　翰

秦永安　刘洪恩　贾玉兵　蔡中华　宋建玲　边德礼

王志忠　刘立栋　刘其富　吕存正　李长青

本册主编：张　健　龙艳青　王献新

数学

—文科—

CHISO 新疆青少年出版社

图书在版编目(CIP)数据

试题调研. 高考状元纠错笔记. 数学. 文科/杜志建主编. —修订本.
—乌鲁木齐:新疆青少年出版社,2010.6
ISBN 978-7-5371-7325-4

Ⅰ. ①试… Ⅱ. ①杜… Ⅲ. ①数学课-高中-升学参
考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 121781 号

出 版 人:徐 江
策　　划:王启全
责任编辑:多艳萍
责任校对:刘 娜
封面设计:天星美工室

试题调研·高考状元纠错笔记　数学(文科)
杜志建　主编

出　　版:新疆青少年出版社
社　　址:乌鲁木齐市北京北路 29 号　　邮政编码:830012
电　　话:0991-7833936(编辑部),0371-68698015(邮购部)
网　　址:http://www.qingshao.net

发　　行:新疆青少年出版社营销中心　　电　话:0991-7833979　7833965
经　　销:各地新华书店　　法律顾问:钟 麟 13201203567
印　　刷:郑州市毛庄印刷厂

开　　本:787mm×1092mm　1/16　　版　次:2011 年 7 月修订版
印　　张:9　　印　次:2011 年 7 月第 1 次印刷
字　　数:248 千字
书　　号:ISBN 978-7-5371-7325-4
定　　价:13.80 元

目录 Contents

状元有约

携手2011年高考新科状元，与你面对面交流数学学习的秘诀，取得高分的法宝，识错、纠错、避错的诀窍.让状元的学习经验成为你高考备考的"利剑".

纠错笔记

以状元的纠错笔记为蓝本选取典例，以名师的教学经验为依托分析错因，以经典解法为基础提炼正解，全面整理考生备考中的易错点、易混点.让状元的笔记与名师的心血完美结合，让状元的思维与名师的智慧激情碰撞，为你打造一本精彩无限的高考状元纠错笔记.

索引

2012年高考必纠的83个易错点

状元有约

关于纠错笔记的学习心得

2011年河北高考文科状元　高媛

高考成绩

总　　分:660(含5分少数民族加分)

各科成绩:语文:126分　数学:147分

英语:144分　文综:238分

状元心得:得到这个成绩,自然很高兴,但自己也很清楚,仍有很多的同学实力在我之上,"状元"只是一个名次而已.我认为高考带给我的不只是一个名次,一个分数,更重要的是一段成长的经历,高考考场上,是知识的较量,也是心态的较量.经历高考,人会真正的长大.

一、建立纠错笔记的重要性

首先,必须肯定纠错笔记的建立是非常必要的(不是重要,而是必要).

练习新题与错题二者之间的关系也许大多数同学都比较迷惑,我也在不断探求二者之间怎样才是一个合适的比例.现在把我的一些想法与大家分享一下,作为参考.

二者本是殊途同归,虽然途径不同,但都服务于知识的掌握与成绩的提高,因此不应把二者对立,完全抛弃其中之一的做法都是不可取的.然而在日常学习中,对于新题目的重视比较容易做到,这样在学习压力较大的情况下,错题整理的环节就会被不自觉地压缩,甚至被直接删除,这样,短期内也许无明显影响,但长此以往,会明显发觉成绩提高上的阻力愈来愈大,很多题目似曾相识,却不能准确解答,很多知识即使在做题时发现漏洞,也没有及时填充,从而使知识漏洞愈来愈多,这也就为高考埋下巨大隐患.

也许一些同学认为纠错笔记的建立是一个很耗费时间的事情,

状元感言

伴随着高考的紧张,高考考场上的沉稳,成绩公布时的淡定,收到录取通知书的喜悦,高三生活在不知不觉中结束了.再回首,高三带给我的有梦想,有现实,有在解出题后喜悦的笑声,还有在奋斗时留下的心酸的泪水.

状元心语

收集错题后要对错题进行分析.将错题抄写下来或是剪切下来只是第一步,而重要的还在后面.首先要分析错误原因,比如知识不清、题目较难或题型比较新颖;其次要写下正确解答,用荧光笔标出重点;最后要将个人理解或知识迁移写下.如果时间不够,这些过程可以挑重点写,但这三个步骤都要进行思考,否则便会错误得“不明不白”.

状元支招

建立纠错笔记,有两种方法可选择:第一是借助一本没用的书,通过“剪刀加浆糊”的剪贴方式建立一本纠错笔记.如果选择这种方法,选书方面应选用一本较厚的书,以免错题太多.选笔方面,应尽量选用红、蓝、黑三种颜色的笔.三种颜色分工明确,黑色笔抄题,红色笔答题,蓝色笔标明错误区域,这样一目了然,简单高效.另一种方法是用一本笔记本,摘抄错题和知识盲点,建立一本纠错笔记.尽量各科都各有一本笔记本,也同样可以使用彩色笔以使纠错笔记一目了然.

的确,这是一项艰巨的任务,而且似乎还很枯燥,因为你所整理的错题,在新奇度上会欠缺一些,但“高投入,高产出”,你花在纠错笔记上的时间不会浪费,如果说做题的过程是“辛勤耕耘”,那么错题整理的过程就是“颗粒归仓”,你的收获不在于你种了多少,而在于你收了多少(当然,如果你种得太少,收获自然不会很多),因此,不要浪费你的汗水,把你的“知识果实”收入囊中,真正让知识“为我所用”.

二、收集错题的方法

首先谈一下如何收集错题,错题的收集也是有方法的.我认为收集的错题大致分为两类:一类是属于自己能力范畴的,只要自己足够细致认真就能做出来的;另一类是有利于锻炼思维提高学习能力的.在建立起纠错笔记后,关键还在于不断地进行回顾反思,做出总结.切忌一味地为收集错题而收集.学习中,我常看到一些同学拿着错题本四处摘抄错题,兴致十足,结果笔记本上密密麻麻满是错题,自己却鲜有反思总结,成绩总提不上去.时间花了很多,收效甚微,当然学习效率就低.

谈到反思总结,想必有人会心生烦燥:总结,总结,又是总结.以前我总是这样想,那么到底该如何总结呢?我们犯错有两种原因,犯低级错误和遇到难题,相应地我们的总结也分为两种.在总结低级错误时,我们应该多问几个为什么,回想自己当初是怎样的答题状态.为什么我自己会犯这种低级错误?是看错了问题还是理解错题意了.找出犯错病因后,接下来就要反思如何避免这种低级错误,把解决方法记在自己随身携带的小本子上.对于这个问题我有个口诀:眼到手到,手到口到,口到心到.眼到,就是眼睛要随着题目走,细致看题;手到,就是要用笔划出关键字词;口到,就是在必要时小声读出关键字眼;心到,就是精神要高度集中,思维要跟上.只有当审题到位了,我们做题才能如鱼得水.在总结难题时,同样要多问为什么.为什么自己没做出来,是毫无思路还是有点思路不敢写出来?分析答案要顺推逆推,梳理答案的思路,做到举一反三,触类旁通.

在数学学习方面,不可否认,大量的题目练习是必要的,题目不仅可以训练我们的逻辑思维,也可以提高我们的熟练度,尤其到后期,熟练度更为重要,简单题与中档题迅速准确的解答,为下面解决难题提供了充足的时间,是取得数学高分的有效方法.

另外,要有总结和整理的过程,归纳题型,找出共性,到后期,我们的时间会非常紧张,在大量做题不能实现的情况下,做典型题就

是一个很好的选择,而在林林总总的复习资料中选出典型题,就要靠平时的总结与积累,相信功夫到了,自然手到擒来.

然后是不怕难题,在平时遇难即躲,不愿花时间思考,在考试时遇到难题当然就不会了,相反,在自己的思考下解出难题,就会为自己增加信心,久而久之,难题便不再是难题,即使经过思考,没能独立解决难题,但有过思考的过程,便是为解题打下了良好基础.

最后是注重细节,有很多题目,不是我们不会做,但一下笔总是出现这样或那样的漏洞,这当然不是大错,但正是这些小错误,让我们每道题都丢掉1~2分,这样一来,我们精心完成的试卷,就很难考出我们想要的分数了.

总之,不管是什么考试,审题一定要清楚,尽量避免低级错误.把简单的事做好就是不简单,把平凡的事做好就是不平凡,把小事做到极致就是大事!

三、纠错对提高成绩的必要性

纠错是提高成绩的必由之路,愈早进行愈早受益.

对于纠错,我们要放正心态,不要怕错题,我们做大量的练习题,目的之一其实就是找到不会的题目,面对错题,我们应兴奋,古人说“闻过则喜”,我们也应如此,错题就是我们的提升空间,就是我们努力的方向,就是我们高考成功的助力器.在高考前出越多的错误,在高考中我们的胜算就越多(当然,这是在认真纠错的前提下).

我们也不必惧怕“错题重错”,对于明明认真改过的题目,再做时又错一次的情况,我也时常发生,这时不必心急,因为这是一种思维的惯性,只要再次回顾题目,强化知识点即可(这也是给我们提个醒,是时候回顾下我们的纠错笔记了).

总之,将纠错进行到底,刚开始时速度可以适当放慢些,不贪多,但求纠错后思路清晰,力争“题不二错”,这就达到了纠错的目的.每天留出一些时间纠错,日日积累,日日提高.以上是我高中三年的一些感受,希望在日常学习中对同学们有些帮助,最后祝同学们在高考之战中旗开得胜.

状元讲经

对于解答题中难题也是不能放弃的.首先不要有畏难情绪,毕竟难题也是由简单的步骤组成的;其次,要学会由果溯因,根据最终结果逆推解答过程,由后推前,找出关键点,从而在整体理解下突破.有代表性的难题更要学会积累,这也是得高分的技巧.

状元心语

只有笑到最后的人才是胜者.平时付出汗水哪怕是泪水都不算什么.小考失利时我也哭过,但我在擦干泪水之后便静下心来,认真地把错题写到纠错本上,心中坚定地念到:“即使背十遍,也要记住你!”之后的复习中突然发现了老师出题的目的.其实考试就是对话,是自己与自己的对话,自己与出题者的对话,所以要从错误中总结出老师要考查的方向.这些工夫都要下在平时.

纠错笔记

笔记一 集合与常用逻辑用语

改错，改错，是不是只改错题？我认为错题固然要改，但并非只改错题，一些做对的题目，如果经典，我们也应记录在册，或者一些题目，我们虽然做对了，但其中仍有一些不清晰的知识点，也要认真"改错"，否则这些题比错题更"致命"，切忌有那种一做对题就"万事大吉"的想法.

——2011 年河北高考文科状元 高媛

状元纠错

闪记

各种数集的记号：①正整数集合 $\mathbf{N}^*$ 或者 $\mathbf{N}_+$；②自然数集合 $\mathbf{N}$；③整数集合 $\mathbf{Z}$；④有理数集合 $\mathbf{Q}$；⑤实数集合 $\mathbf{R}$；⑥复数集合 $\mathbf{Z}$. 有时也把正实数集合记为 $\mathbf{R}^+$、负实数集合记为 $\mathbf{R}^-$，这都不难根据问题的实际情况判断这些符号表示什么数集. **注意**：$\mathbf{N}$、$\mathbf{N}^*$、$\mathbf{N}_+$ 三者的区别及联系：其中 $\mathbf{N}^*=\mathbf{N}_+\subsetneqq\mathbf{N}$，切不能将 $\mathbf{N}_+$ 及 $\mathbf{N}^*$ 写为 $\mathbf{N}^+$、$\mathbf{N}_*$，即将"+"、"*"放错了地方.

点拨

集合有三种表示方法：列举法、描述法、韦恩图法. 对于用描述法给出的集合

易错点 1 集合中元素的特征认识不明

D 【典例 1】 已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{-x^2+3x}\}$，$N=\{x||x|>2\}$，则 $M\cap N=$

$x^2-3x\leq 0$ $x(x-3)\leq 0$ $x<-2$ $>2.$

A. $\{x|1<x<3\}$ B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|2<x<3\}$ $0\leq x\leq 3$ D. $\{x|2<x\leqslant 3\}$

错因分析 可能把集合 M 看成函数的值域，出现求解错误. 只要不出现这个问题，根据集合的含义，把集合 M,N 具体求出来，再根据集合的运算法则进行计算即可.

解析 集合 M 是函数 $y=\sqrt{-x^2+3x}$ 的定义域，即 x 满足 $-x^2+3x\geqslant 0$，解得 $0\leqslant x\leqslant 3$，即 $M=[0,3]$；集合 N 是不等式 $|x|>2$ 的解集，即 $N=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，所以 $M\cap N=(2,3]$. 故选 D.

状元笔记

集合中的元素

在集合的试题中明确集合的含义是解题的关键之一，其要点是关注集合的代表元素，如本题中集合 M 的代表元素是 x，是函数的定义域，不是函数的值域. 解答与集合有关的问题时，首先认清集合中的元素是什么，具有什么特征？属于什么类型，是数集还是点集还是图形集？然后再进行相关运算，以免混淆集合中元素的属性. 例如：$\{x|x^2+2x-3=0\}$ 表示方程 $x^2+2x-3=0$ 的解组成的集合；$\{x|x^2+2x-3>0\}$ 表示不等式 $x^2+2x-3>0$ 的解集；$\{y|y=x^2+2x-3\}$ 表示函数 $y=x^2+2x-3$ 的值域；$\{(x,y)|y=x^2+2x-3\}$ 表示函数 $y=x^2+2x-3$ 的图象上的点构成的集合.

即时突破1　(2011·广东卷)已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $y=x\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为 C.　$x^2=\frac{1}{2}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　$x=\pm$.

易错点2　遗忘空集致误

$4(a+1)^2-4a^2+4\geq0$. $4a^2+8a+4+4\geq0$ $a\leq0$.

【典例2】　设集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.　$x=0$ -4　$x(x+4)$　$a=\pm1$

错因分析　集合 B 为方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的实数根所构成的集合,由 $B\subseteq A$ 可知,集合 B 中的元素都在集合 A 中,在解题中容易忽视方程无解,即 $B=\varnothing$ 的情况,导致漏解.　$a=-1$.

【解析】　$\because A=\{0,-4\}$,$\therefore B\subseteq A$ 分以下三种情况:

(1)当 $B=A$ 时,$B=\{0,-4\}$,由此知0和 -4 是方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的两个根,由根与系数之间的关系,得

$$\begin{cases}\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)>0,\\-2(a+1)=-4,\\a^2-1=0,\end{cases}$$ 解得 $a=1$;　$x^2=0$.

(2)当 $\varnothing\neq B\subsetneqq A$ 时,$B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$,并且 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$,解得 $a=-1$,此时 $B=\{0\}$ 满足题意;

(3)当 $B=\varnothing$ 时,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,解得 $a<-1$.

综上所述,所求实数 a 的取值范围是 $a\leq-1$ 或 $a=1$.

状元笔记

空集的特殊性

由于空集是任意一个集合的子集,因此 $B=\varnothing$ 时也满足 $B\subseteq A$.尤其要注意在解决含有参数的方程或不等式的问题时,往往漏掉空集的讨论而导致漏解.空集是一个特殊的集合,由于思维定势的原因,考生往往会在解题中遗忘这个集合,导致解题错误或是解题不全面.

即时突破2　已知集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x>0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围.

1° $A=\varnothing$. $\Delta=a^2+4a+4-4<0$.　$a(a+4)<0$　$-4<a<0$

易错点3　忽视集合中元素的互异性致误

【典例3】　已知集合 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,若 $1\in A$,求实数 a 的取值集合.　1° $a=-1$. $\{1,0,1\}$舍.　2° $a=0$.

错因分析　由 $1\in A$ 可知,集合 A 中的三个元素都可能等于1,得到 a 的值后,忽视对集合中元素的互异性检验而导致错解.

【解析】　(1)若 $a+2=1$,即 $a=-1$,$(a+1)^2=0$,$a^2+3a+3=1-3+3=1$,元素重复;　3° $a^2+3a+2=0$.

(2)若 $(a+1)^2=1$,即 $a=-2$ 或 $a=0$,　$-1,-2$.　$0,\times$.

$\{x\mid x\in P\}$,要紧紧抓住代表元素 x 及其所具有的性质.

$x^2+2x-1=0$

技巧

因为集合 A 中含有0与 -4 两个元素,且 $B\subseteq A$,所以 B 中元素的个数不超过2,只能取0,1,2,故可以根据集合 B 中所含元素的个数进行分类讨论,从而转化为方程根的个数进行讨论,但要注意,当该方程有两个相等实根时,集合 B 只有一个元素,而不是两个元素.

警示

0与 $\varnothing$:0是一个实数,$\varnothing$ 是一个集合,这个集合中含有0个元素,但 $0\notin\varnothing$,而 $\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

集合 $\{\varnothing\}$ 与空集 $\varnothing$ 的区别与联系:$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$,$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

贴士

集合的三要素:确定性、无序性、互异性.确定性:指集合中的元素必须是确定的;无序性:指集合中的元素没有先后顺序;互异性:指集合中的元素互不相同.

当 $a=-2$ 时，$a+2=0$，$a^2+3a+3=4-6+3=1$，元素重复；

当 $a=0$ 时，$a+2=2$，$a^2+3a+3=3$，满足题意；

(3)若 $a^2+3a+3=1$，解得 $a=-1$ 或 $a=-2$，由(1)(2)，可知均不符合题意.

所以实数 a 的取值集合为 $\{0\}$.

状元笔记

集合元素的互异性对解题的影响

集合中的元素具有确定性、无序性、互异性，集合中元素的三种性质中互异性对解题的影响最大，特别是类似本题这种带有字母参数的集合，实际上就隐含着对字母参数的一些要求，如根据集合 A 可知三个元素两两不等，首先根据 1 是集合中的元素建立方程，然后分别求出这三个数值检验是否相等，所以解题时一定要注意含字母参数的有关问题.

即时突破 3 若 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{1,a+1,a^2-2a+2,-\frac{1}{2}(a^2-3a-8),a^3+a^2+3a+7\}$，且 $A\cap B=\{2,5\}$，试求实数 a.

$a(a^2-2a-1)+7=0.$

易错点 4 集合运算不准确致误

【典例 4】 若集合 $A=\{x\,|\,|x|=x\}$，$B=\{x\,|\,x^2+x\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$ B

$x\geqslant 0$ $x(x+1)\geqslant 0$ $x\leqslant -1$ $x\geqslant 0$

A. $[-1,0]$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]$

错因分析 求错两个集合，特别是集合 A，虽然是方程的解集，但这个方程的解集是一个无限集合. 具体解答本题的思路是求出两个集合，再求交集.

解析 $A=[0,+\infty)$，$B=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，故 $A\cap B=[0,+\infty)$. 故选 B.

状元笔记

集合运算三要点

在进行集合运算时，首先要明确集合交、并、补运算的含义. 交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；补集：若 $B\subseteq U$，则 $\complement_U B=\{x|x\in U$ 且 $x\notin B\}$；其次要掌握好集合运算中的几个辅助性结论：①$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap A=A$，$A\cup A=A$；②$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$；③$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$，$\complement_U\complement_U A=A$，$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$；④$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$（德·摩根律），这些辅助性结论往往是转化问题的关键. 最后，要特别注意进行集合运算时的“端点元素”.

纠错心得

提示

集合运算类的试题中，集合中的代表元素一般是方程的解集、不等式的解集、函数的定义域、函数的值域等，在解题中就是把这些集合求出来，再进行运算.

点拨

在解决集合运算问题时，要从集合中元素的性质入手，明确集合中的元素与已知集合之间的关系，要么属于这个集合，要么属于这个集合的补集，然后利用交集、并集、补集表示集合运算.

即时突破4　(2011·陕西卷)设集合 $M=\{y|y=|\cos^2 x-\sin^2 x|,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{x||x-\frac{1}{i}|<\sqrt{2}$,i 为虚数单位,$x\in\mathbf{R}\}$,则 $M\cap N$ 为

A. $(0,1)$　　B. $(0,1]$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

易错点5　四种命题的结构不明致误

【典例5】 有下列四个命题:

①命题"若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数"的逆命题;

②命题"面积相等的三角形全等"的否命题;

③命题"若 $m\leqslant 1$,则 $x^2-2x+m=0$ 有实根"的逆否命题;

④命题"若 $A\cap B=B$,则 $A\subseteq B$"的逆否命题.

其中是真命题的是______(填上你认为正确的命题的序号).

错因分析　对四种命题的构成规律不明确,不知道如何构造一个命题的否命题、逆命题和逆否命题;对一些简单命题的否定错误.本题的基本解题思路是先写出各个命题的其他形式的命题,再判断其真假或者是根据四种命题之间的等价关系进行判断.

【解析】　命题①的逆命题是"若 x,y 互为倒数,则 $xy=1$",这显然是一个真命题;命题②的否命题是"面积不相等的三角形不全等"也是一个真命题;命题③中若 $m\leqslant 1$,则方程 $x^2-2x+m=0$ 的判别式大于或者等于零,方程一定有实数根,故这个命题是真命题,其逆否命题与其等价,故这个命题的逆否命题是真命题;命题④中,原命题是假命题,故其逆否命题也是假命题. 故填①②③.

状元笔记

四种命题的构造方法

在根据给出的命题构造其逆命题、否命题、逆否命题时,首先要把原命题的条件和结论弄清楚,这样逆命题就是把原命题的条件和结论交换了的命题,否命题就是把原命题中否定了的条件作条件、否定了的结论作结论的命题,逆否命题就是把原命题中否定了的结论作条件、否定了的条件作结论的命题. 在这四种命题中原命题和逆否命题等价、否命题和逆命题互为逆否命题也是等价的.

即时突破5　(2011·山东卷)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,命题"若 $a+b+c=3$,则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$"的否命题是

A. 若 $a+b+c\neq 3$,则 $a^2+b^2+c^2<3$

B. 若 $a+b+c=3$,则 $a^2+b^2+c^2<3$

C. 若 $a+b+c\neq 3$,则 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$

D. 若 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$,则 $a+b+c=3$

技巧

集合的运算多借助数轴或韦恩图,利用数形结合解决.

贴士

一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$、$\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,则四种命题的形式为:

原命题:若 p,则 q;

逆命题:若 q,则 p;

否命题:若 $\neg p$,则 $\neg q$;

逆否命题:若 $\neg q$,则 $\neg p$.

警示

命题的否定与否命题不一样. 若命题为:若 p,则 q,则该命题的否命题为若 $\neg p$,则 $\neg q$;命题的否定为若 p,则 $\neg q$.

易错点6 充分必要条件颠倒致误

【典例6】 若 $p:a\in\mathbf{R},|a|<1$,q:关于 x 的二次方程 $x^2+(a+1)x+a-2=0$ 的一个根大于零,另一个根小于零,则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

错因分析 解答本题易出现的错误是颠倒了充分条件和必要条件,把充分条件当成必要条件而致误.

【解析】 $p:a\in\mathbf{R},|a|<1\Leftrightarrow -1<a<1\Rightarrow a-2<0$,可知满足 q 的方程有两根,且两根异号,条件充分;条件不必要,如 $a=1$ 时,方程的一个根大于零,另一个根小于零.也可以把命题 q 中所有满足条件的 a 值求出来,再进行分析判断,实际上一元二次方程两根异号的充要条件是两根之积小于0,对于本题就是 $a-2<0$,即 $a<2$.故选A.

状元笔记

判断充分条件、必要条件、充要条件时,常用的方法是通过"$\Rightarrow$"来判断.一方面是要注意箭头的指向(单向或双向);另一方面是看"p 是 q 的……"或"q 是 p 的……",p 是 q 的充分条件表示为 $p\Rightarrow q$,p 是 q 的必要条件表示为 $q\Rightarrow p$.解题时最容易出错的就是颠倒了充分性与必要性,所以在解决这类问题时一定要根据充要条件的概念作出准确的判断.

即时突破6 已知条件 $p:x\leqslant 1$,条件 $q:\dfrac{1}{x}<1$,则 q 是 $\neg p$ 成立的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

易错点7 "或""且""非"理解不准致误

【典例7】 已知命题 p:关于 x 的方程 $x^2-ax+4=0$ 有实根;命题 q:关于 x 的函数 $y=2x^2+ax+4$ 在 $[3,+\infty)$ 上是增函数.若 p 或 q 是真命题,p 且 q 是假命题,则实数 a 的取值范围是

A. $(-12,-4)\cup[4,+\infty)$　　B. $[-12,-4]\cup[4,+\infty)$

C. $(-\infty,-12)\cup(-4,4)$　　D. $[12,+\infty)$

错因分析 对 p 或 q 为真命题时,p,q 之间的真假关系判断错误.

闪记

对于两个条件 A,B,如果 $A\Rightarrow B$ 成立,则 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件;如果 $B\Rightarrow A$ 成立,则 A 是 B 的必要条件,B 是 A 的充分条件;如果 $A\Leftrightarrow B$,则 A,B 互为充分必要条件.

点拨

依据多个命题间的关系,判断其中两个命题之间的关系时需要注意明确两者之间的关系,可先用"$\Rightarrow$"作运载工具,将各自命题之间的联系找出来,最后找到所求命题之间的关系.

闪记

$p\wedge q$"见假就假",$p\vee q$"见真就真",$\neg p$ 与 p"真假相对".

【解析】　命题 p 等价于 $\Delta=a^2-16\geqslant0$，解得 $a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant4$；命题 q 等价于 $-\frac{a}{4}\leqslant3$，解得 $a\geqslant-12$. 因为 p 或 q 是真命题，p 且 q 是假命题，则命题 p 和 q 一真一假. 当 p 真 q 假时，$a<-12$；当 p 假 q 真时，$-4<a<4$. 故选 C.

状元笔记

含逻辑联结词的命题真假

判断含有逻辑联结词的复合命题的真假，可利用真值表转化为一些简单命题的真假判断. 已知命题 p、q，只要有一个命题为假，$p\wedge q$ 就为假；只要有一个命题为真，$p\vee q$ 就为真，$\neg p$ 与 p 真假相对.

即时突破 7　设 p：实数 x 满足 $x^2-4ax+3a^2<0$，其中 $a\neq0$，q：实数 x 满足 $\begin{cases}x^2-x-6\leqslant0,\\x^2+2x-8>0.\end{cases}$

(1)若 $a=1$，且 $p\wedge q$ 为真，求实数 x 的取值范围；

(2)若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

易错点 8　对含有量词的命题的否定不当致误

【典例 8】　命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant0$"的否定是

A. 不存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant0$　B. 存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant0$

C. 存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$　D. 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$

错因分析　本题是对全称命题的否定，因此否定时既要对全称量词"任意"否定，又要对"$\leqslant$"进行否定，全称量词"任意"的否定为存在量词"存在"，"$\leqslant$"的否定为"$>$"，可能出现的错误是"顾此失彼"，忽略了细节.

【解析】　题目中命题的意思是"对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant0$ 都成立"，要否定它，只要能找到至少一个 x，使得 $x^3-x^2+1>0$ 即可，故命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\leqslant0$"的否定是"存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1>0$". 故选 C.

状元笔记

命题的否定方法

对全称命题的否定，在否定判断词时，还要否定全称量词，变为特称命题. 特别要注意的是，由于有的命题的全称量词往往可以省略不写，从而在进行命题否定时易将全称命题只否定判断词，而不否定省略了的全称量词.

即时突破 8　已知命题 p：$\frac{1}{x^2-4x+3}\geqslant0$，则命题 p 的否定 $\neg p$ 为________.

技巧

"p 或 q"为真，则必有一真，"p 且 q"为假，则必有一假，所以由已知条件可得命题 p、q 只能是一真一假.

警示

原命题为真，它的逆命题不一定为真；

原命题为真，它的否命题不一定为真；

原命题为真，它的逆否命题一定为真.

技巧

否定一个全称命题，只需找出一个实数，使结论不成立即可. 否定该命题只需把"任意"改为"存在"，不等式中的"$\leqslant$"换成"$>$"即可.

警示

命题的否命题与命题的否定是不同的两个概念，若 p 表示命题，非 p 叫做命题的否定；如果原命题是"p 则 q"，那么命题的否定为"若 p 则非 q"，而否命题为"若非 p 则非 q"，既否定结论，又否定条件.

纠错体验

1. 设 $A=\{x|-1<x<1\}$,$B=\{x|x-a>0\}$,若 $A\subseteq B$,则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)$ B. $(-\infty,-1]$

C. $[1,+\infty)$ D. $(1,+\infty)$

2. 若条件 $p:|x+1|\leqslant 4$,条件 $q:x^2<5x-6$,则$\neg p$是$\neg q$的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 下列判断错误的是:

A. "$am^2<bm^2$"是"$a<b$"的充分不必要条件

B. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^3-x^2-1\leqslant 0$"的否定是"$\exists x\in\mathbf{R},x^3-x^2-1>0$"

C. 若 $p\wedge q$ 为假命题,则 p,q 均为假命题

D. "$x=2$"是"$x^2=4$"的充分不必要条件

4. 已知命题:

p_1:函数 $y=2^x-2^{-x}$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

p_2:函数 $y=2^x+2^{-x}$在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

则在命题 $q_1:p_1\vee p_2$,$q_2:p_1\wedge p_2$,$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$ 和 $q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$中,真命题是

A. q_1,q_3 B. q_2,q_3 C. q_1,q_4 D. q_2,q_4

5. 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)|kx-y-2\leqslant 0\}$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$. 若 $A\subseteq B$,则实数 k 的取值范围是______.

6. 已知集合 $A=\{x||x-1|<2m-1\}$,$B=\left\{x\left|\begin{cases}x^2\leqslant 9,\\|x-1|\leqslant 2\end{cases}\right.\right\}$,且 $A\cup B=B$,则实数 m 的取值范围是______.

7. 设 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x^2+3x+2=0\}$,$B=\{x|x^2+(m+1)x+m=0\}$. 若$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,求 m 的值.

8. 设 $A=\{(x,y)|y^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)|4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)|y=kx+b\}$,是否存在 k、$b\in\mathbf{N}^*$,使得$(A\cup B)\cap C=\varnothing$?若存在,求出 k,b 的值;若不存在,说明理由.

答案与解析

【即时突破】

1. B 直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有两个不同的交点,故 $A\cap B$ 的元素的个数只有两个.

2. 由 $A\cap B=\varnothing$,(1)当 A 中的元素为非正数时,即方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 只有非正数解.

$\therefore\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant 0,\\a+2\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 0$;

(2)当 $A=\varnothing$时,$\Delta=(a+2)^2-4<0$,解得 $-4<a<0$.

综上所述,得 $a>-4$.

3. $\because A\cap B=\{2,5\}$,$\therefore a^3-2a^2-a+7=5$,解得 $a=2$ 或 $a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时,$a^2-2a+2=1$,与元素的互异性矛盾,故舍去 $a=1$;

当 $a=-1$ 时,$B=\{1,0,5,2,4\}$,此时 $A\cap B=\{2,4,5\}$,这与 $A\cap B=\{2,5\}$矛盾,故舍去 $a=-1$;

当 $a=2$ 时,$A=\{2,4,5\}$,$B=\{1,3,2,5,25\}$,此时 $A\cap B=\{2,5\}$满足题意,故$a=2$为所求.

4. C 集合 M 是函数 $y=|\cos^2x-\sin^2x|=|\cos2x$

$|$的值域,所以集合 $M=[0,1]$;集合 N 中 $|x-\frac{1}{i}|<\sqrt{2}$,即 $|x+i|<\sqrt{2}$,即 $\sqrt{x^2+1}<\sqrt{2}$,解得 $-1<x<1$,所以集合 $N=(-1,1)$,所以 $M\cap N=[0,1)$.

5. A　"$a+b+c=3$"的否定是"$a+b+c\neq3$","$a^2+b^2+c^2\geqslant3$"的否定是"$a^2+b^2+c^2<3$".

6. B　即$\frac{1}{x}<1$是 $x>1$ 的什么条件,$\frac{1}{x}<1$ 的解是 $x>1$ 或者 $x<0$,故条件是必要但不是充分的.

7. (1)由 $x^2-4ax+3a^2<0$,得 $(x-3a)(x-a)<0$,

当 $a=1$ 时,解得 $1<x<3$,即 p 为真时实数 x 的取值范围是 $1<x<3$. 由 $\begin{cases}x^2-x-6\leqslant0,\\x^2+2x-8>0,\end{cases}$ 得 $2<x\leqslant3$,即 q 为真时实数 x 的取值范围是 $2<x\leqslant3$.

若 $p\wedge q$ 为真,则 p 真且 q 真,

所以实数 x 的取值范围是 $2<x<3$.

(2)p 是 q 的必要不充分条件,即 $q\Rightarrow p$,且 $p\nRightarrow q$,设 $A=\{x|p(x)\}$,$B=\{x|q(x)\}$,则 $A\supsetneqq B$,又 $B=(2,3]$,当 $a>0$ 时,$A=(a,3a)$;$a<0$ 时,$A=(3a,a)$.

所以当 $a>0$ 时,有 $\begin{cases}a\leqslant2,\\3<3a,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant2$;

当 $a<0$ 时,显然 $A\cap B=\varnothing$,不合题意.

所以实数 a 的取值范围是 $1<a\leqslant2$.

8. $\frac{1}{x^2-4x+3}<0$ 或 $x=1$ 或 $x=3$　$\frac{1}{x^2-4x+3}\geqslant0$ $\Leftrightarrow1\times(x^2-4x+3)\geqslant0$ 且 $x^2-4x+3\neq0$. $\therefore\neg p$ 为 $x^2-4x+3<0$ 或 $x=1$ 或 $x=3$. 故填 $\frac{1}{x^2-4x+3}<0$ 或 $x=1$ 或 $x=3$.

【纠错体验】

1. B　集合 $B=(a,+\infty)$,$A\subseteq B$,则只要 $a\leqslant-1$ 即可,即 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

2. A　条件 p:$|x+1|\leqslant4\Rightarrow-5\leqslant x\leqslant3$,则 $\neg p$:$x>3$ 或 $x<-5$.

条件 q:$x^2<5x-6\Rightarrow2<x<3$,则 $\neg q$:$x\geqslant3$ 或 $x\leqslant2$.

则 $\neg p\Rightarrow\neg q$,$\neg q\nRightarrow\neg p$,故 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件. 故选 A.

3. C　选项 A 中的结论正确;选项 B 中的结论正确;对于且命题只要其中有一个是假命题,这个且命题就是假命题,故选项 C 中的结论不正确.

4. C　**解法一**　函数 $y=2^x-2^{-x}$ 是一个增函数与一个减函数的差,故函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 **R** 上为增函数,p_1 是真命题;而对 p_2:$y'=2^x\ln2-\frac{1}{2^x}\cdot\ln2=\ln2(2^x-\frac{1}{2^x})$,当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$2^x\geqslant\frac{1}{2^x}$,又 $\ln2>0$,所以 $y'\geqslant0$,函数单调递增;同理当 $x\in(-\infty,0)$ 时,函数单调递减,故 p_2 是假命题. 由此可知 q_1 真,q_2 假,q_3 假,q_4 真. 故选 C.

解法二　p_1 是真命题同解法一;由于 $2^x+2^{-x}\geqslant2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$,故函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 **R** 上存在最小值,故这个函数一定不是 **R** 上的单调函数,故 p_2 是假命题. 由此可知 q_1 真,q_2 假,q_3 假,q_4 真. 故选 C.

5. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　**解法一**　实质上本题中的圆 $x^2+y^2=1$ 在直线 $kx-y-2=0$ 的上方,直线 $kx-y-2=0$ 是斜率为 k、在 y 轴上的截距为 -2 的直线,根据图形可知 $k\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

解法二　根据子集的定义,本题中 $A\subseteq B$ 即集合 A 中的任意一个元素都在集合 B 中,我们不妨设集合 A 中的 $x=\cos\theta$,$y=\sin\theta$,说明 $k\cos\theta-\sin\theta-2\leqslant0$ 对任意 θ 恒成立,即 $\sqrt{k^2+1}\sin(\theta+\varphi)\leqslant2$ 对任意 θ 恒成立,即 $\sqrt{k^2+1}\leqslant2$ 恒成立,即 $-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$.

6. $(-\infty,\frac{3}{2}]$　$B=\{x|\begin{cases}x^2\leqslant9,\\|x-1|\leqslant2\end{cases}\}=\{x|$