浙大优学

战术观点精辟独创　思路探究歌诀导航
范例剖析新颖开放　点拨到位练习精当

数学高考压轴题解术

SHUXUE GAOKAO
YAZHOUTI
JIESHU

苏贤昌　苏良智　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学高考压轴题解术

苏贤昌　苏良智　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学高考压轴题解术/苏贤昌，苏良智编著. 一杭州：浙江大学出版社，2015.4
ISBN 978-7-308-14522-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①苏…②苏… Ⅲ. ①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 061130 号

数学高考压轴题解术
苏贤昌　苏良智　编著

责任编辑	沈国明
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
	(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州中大图文设计有限公司
印　　刷	浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	15.25
字　　数	400 千
版 印 次	2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-14522-0
定　　价	32.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式：0571—88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

前　　言

数学高考压轴题通常是指选择题、填空题、解答题中的最后几道题，这几道题是高考数学卷中综合性和探索性最强、难度最大的题，其情景创设新颖，创新意识浓厚，主要功能是突出高考的选拔性.

有些考生对压轴题置之不理，认为只要把基本题目做好就够了. 这种得过且过的心态，不利于学生创新思维，拼搏进取.

有些考生认为压轴题是难题而不敢去做，甚至连第 1 问(必拿分)也不做. 这种胆怯害怕、知难而退的心理，不利于学生争夺高分，冲刺名校.

还有些考生认为压轴题是命题组智慧的浓缩，做起来花时太多，得不偿失. 他们其实是不明白“取法乎上，仅得乎中”的道理. 压轴题也是由基本知识构成的. 常做压轴题，研究压轴题，能促进学生深刻地领悟数学知识，激发学生解题的直觉或灵感，提高数学解题的技能，从而高屋建瓴地解决数学问题. 如果“取法乎中”，往往“仅得乎下”，连中游也难以保住.

因此，在数学高考的复习备考中，对于基础好的学生来说，与其把时间浪费在那些简单重复的基础题上，倒不如集中精力钻研压轴题，从探究压轴题的解题策略中学会解压轴题，掌握求解压轴题的技能、技巧，提高创新思维能力. 当然，学生也应根据自己的实际，注重基础知识的夯实，不要好高骛远，一味钻难题.

为了帮助学生更好地把握数学知识的产生、发展及运用规律，激励学生拼搏进取，创造性地破解数学压轴题，笔者特编写了《数学高考压轴题解术》一书.

本书将会教你如何将陌生的问题常规化，将复杂的问题简单化. 让你快速领悟题意，让解题变得轻松快乐，让每一位数学基础好的考生创造提分奇迹.

在编写本书时，笔者注重了将所用的数学思想与数学方法编成通俗易懂、易记、易掌握的歌诀，以歌诀助记忆，以歌诀导引学生解题的思路与方向.

本书共分三个部分，第一部分阐述研究挑战数学高考压轴题的意义；第二部分着重论述求解数学高考压轴题的思想方法；第三部分是范例导引. 所举案例都有规范的解答和评注，练习也附有解答. 本书能让学生学有内容，记有方法，用有范例，练有目标，是高中学生学习数学，复习备考的良师益友.

限于水平和经验，本书的编写不当之处在所难免，敬请读者批评指正.

(联系方式：suxianchang@sina.com)

目　　录

第一章　求解数学高考压轴题的意义

近年来的数学高考试题，注重以能力为立意为核心，重视知识的发生发展过程，突出数学能力的考查；注重双基，突出理性思维、应用意识与探究意识；注重在知识网络的交汇点创设问题情境，突出创新思维. 这是数学高考命题的基本思想，在数学高考压轴题的编拟上体现得尤为突出.

现行数学高考试题中的压轴题，已由单纯知识的叠加型题转化为知识、方法、能力、创新思维的综合型题. 它蕴含一定的基本技能、技巧，具有知识广而量大，构思新颖，解法灵活，能力要求高等特点，是现行数学高考试题的精华部分. 由于一份数学试卷中的基础题、中档题，大多数学生都能完成，拉开分数距离的任务就落在压轴题上. 因而，数学高考压轴题具有突出的选拔功能.

美国数学教育家波利亚曾说过："掌握数学意味着什么呢?这就是说要善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题". 而数学高考压轴题，正是这种具有独立思考、思路合理、见解独到、发明创造特点的高档试题. 因此，我们要在数学高考中创造性地发挥自己的水平，取得高分，就一定要在压轴题上下功夫.

鉴于上述，我们认为对即将参加高考的学生而言，注重加强对数学高考压轴题的解题策略的研究，有利于促进对知识的理解和掌握，有利于促进能力的提升，也有利于促进创新思维的形成和发展，更有利于激发学生的兴趣和探究精神.

第 1 节　求解压轴题可促进对知识的理解和掌握

数学高考压轴题，特别注重以现行数学教材为依据，从系统、整体、创新的角度设计，注重知识的相互交叉、渗透和综合，揭示知识的内在联系，考查考生把知识迁移到不同情境中的能力和创新思维的能力，主要体现在对知识点的准确理解和综合知识的灵活应用. 因而，对数学高考压轴题的求解，往往都离不开充分利用题设条件及其涉及的相关基本知识(概念、公式、定理)，进行综合分析、探究、猜想、加工整理，并推出所要求的结果. 当用不同的观点，从不同的角度去观察、分析问题，可获得多种不同的解法，进而深化对数学基本知识的理解和掌握，有时还可获得创新性的新命题.

【例 1】　(2013·全国卷Ⅱ) 已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$，直线 $l: y=ax+b(a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是　　(　　)

A. $(0,1)$　　B. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

解法 1　ⅰ. 当直线 $y=ax+b$ 与 AB，BC 相交时，如图 1-1-1 所示，

易知 $E\left(\dfrac{1-b}{a+1},\dfrac{a+b}{a+1}\right)$，$x_D=-\dfrac{b}{a}>-1$，所以 $|BD|=1+\dfrac{b}{a}$.

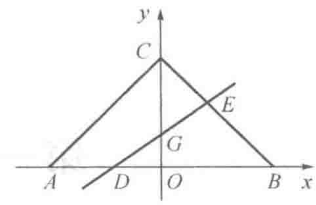

图 1-1-1

由 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}\cdot|BD|\cdot h_E=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{a+b}{a+1}=\dfrac{1}{2}$ 得，

$$b=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}+1}\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

ⅱ. 当直线 $y=ax+b$ 与 AC，BC 相交时，如图 1-1-2.

则 $-\dfrac{b}{a}<-1$，从而 $0<a<b<1$，

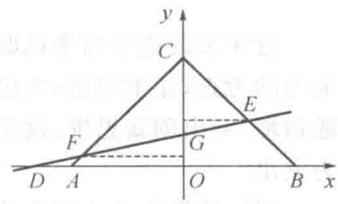

图 1-1-2

且点 F 的坐标为 $\left(\dfrac{1-b}{a-1},\dfrac{a-b}{a-1}\right)$.

由 $S_{\triangle FEC}=\dfrac{1}{2}(x_E-x_F)\cdot|CG|=\dfrac{1}{2}$ 得

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-b}{a+1}-\dfrac{1-b}{a-1}\right)(1-b)=\dfrac{1}{2}$，即 $(1-b)^2\dfrac{2}{1-a^2}=1$，

所以 $b=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-a^2}\in\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)(0<a<1)$.

综上，b 的取值范围为：$b\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cap\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

即 $b\in\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 故选 B.

解法 2　由 $y=ax+b$ 与 BC 方程 $x+y=1$ 联立，得 $y_E=\dfrac{a+b}{a+1}$，如图 1-1-2 所示.

又易知直线 $l:y=ax+b$ 与 x 轴的交点为 $D\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$，

由 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+b}{a+1}\cdot\left(1+\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=\dfrac{b^2}{1-2b}>0$，

由此可得　$b<\dfrac{1}{2}$.　①

又 $a=0$ 为 l 的极限位置，即 $y_G=b$，如图 1-1-3 所示.

由 $S_{\triangle CFE}=\dfrac{(1-b)|EF|}{2}=(1-b)^2=\dfrac{1}{2}$ 得 $b=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又题设 $a>0$，故 b 不可能为 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　②

综合 ①② 知，选 B.

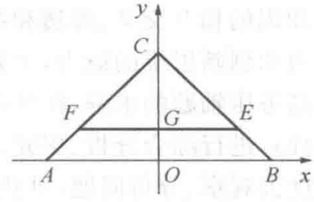

图 1-1-3

解法 3　当直线 l 与 AB，BC 相交时，如图 1-1-1，则 $-\dfrac{b}{a}>-1$，

从而 $a>b>0$.

所以 $S_{\triangle BDE}=\displaystyle\int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a+1}}(ax+b)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1-b}{a+1}}^{1}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{(1-b)^2}{2(a+1)}+\frac{b^2}{2a}=\frac{1}{2}$，

即 $a-2ab=b^2$. 故　$a=\dfrac{b^2}{1-2b}>0$.

又 $a>b$，则 $\dfrac{b^2}{1-2b}>b$，从而 $\dfrac{1}{3}<b<\dfrac{1}{2}$. ③

当直线 l 与 AC，BC 相交时，如图 1-1-2 所示，则 $-\dfrac{b}{a}<-1$，从而 $0<a<b<1$.

$$S_{\triangle CEF}=\int_{\frac{1-b}{a-1}}^{0}(1+x-ax-b)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1-b}{a+1}}(1-x-ax-b)\mathrm{d}x=\frac{(1-b)^2}{1-a^2}=\frac{1}{2},$$

所以 $(1-b)^2=\dfrac{1}{2}(1-a^2)\Rightarrow 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0<a<1)$.

又 $a<b$，所以 $(1-b)^2=\dfrac{1}{2}(1-a^2)>\dfrac{1}{2}(1-b^2)\Rightarrow b<\dfrac{1}{3}$,

故 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{1}{3}$. ④

整合③④，知 $b\in\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 故选 B.

解法 4 当 $a\to 0$ 时，直线 $y=ax+b$ 近似平行于 x 轴，当 $a=0$ 时，得直线方程 $y=b$，如图 1-1-4 所示，由直线 $y=b$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分得

$$S_{\triangle CFE}=\frac{(1-b)\,|EF|}{2}=(1-b)^2=\frac{1}{2}，故\ b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

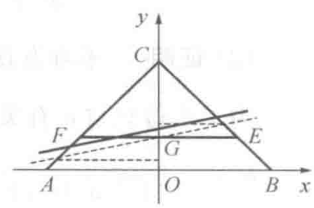

图 1-1-4

不难得知，将直线绕点 $G\left(0,1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 转动时，直线上方图形的面积增大，而下方图形的面积减小，再将直线 $y=ax+b$ 再向上平移一点，上下两部分才有可能相等，故 $b>1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $a\to+\infty$ 时，l 与 y 轴趋向平行，如图 1-1-5 所示. 不难发现，$b=\dfrac{1}{2}$ 是四个备选项的关键点. 将直线 $y=ax+b$ 绕点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 旋转时，S_1，S_2 无限小，但转动的过程中，S_2 永远大于 S_1.

若将直线 $y=ax+b$ 再向下平移一些，上下两部分才可能相等，故 $b<\dfrac{1}{2}$.

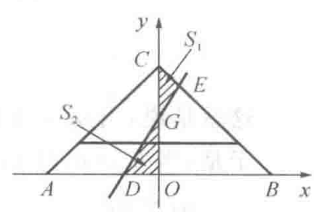

图 1-1-5

综上可得 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{1}{2}$.

由此可得，选 B.

点评 本题融通性通法于创新问题之中，是甄别考生数学素养，考查考生综合分析问题能力的好试题. 解法 1 与解法 3 侧重于计算，思路清晰，过程完整，是较常规的思路. 解法 2 侧重于图形思维，采用极端情形分析问题，过程简捷明了. 尤其是解法 4 注重了从"动"的角度出发研究，考查直线 $y=ax+b$ 的转动与平移，避开了大量的计算，是本题的最佳解法. 从这几种解法不难发现，注重挖掘信息，探究解题思路，可促进学生对直线方程、三角形面积的求解、定积分的几何意义等基本知识的深刻理解，对建模思想、分类讨论思想和数形结合思想方法的掌握.

【例 2】 (2009·江西)各项均为正数的数列$\{a_n\}$,$a_1=a,a_2=b$,且对满足$m+n=p+q$的正整数m,n,p,q,都有$\dfrac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\dfrac{a_p+a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}$.

(1) 当$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{4}{5}$时,求通项$a_n$;

(2) 证明:对任意a,存在与a有关的常数λ,使得对每个正整数n,都有$\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$.

解 (1) 由$\dfrac{a_m+a_n}{(1+a_m)(1+a_n)}=\dfrac{a_p+a_q}{(1+a_p)(1+a_q)}$,

得$\dfrac{a_1+a_n}{(1+a_1)(1+a_n)}=\dfrac{a_2+a_{n-1}}{(1+a_2)(1+a_{n-1})}$.

将$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{4}{5}$代入化简,得$a_n=\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}$,从而$\dfrac{1-a_n}{1+a_n}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$,

故数列$\left\{\dfrac{1-a_n}{1+a_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{3}$为公比,$\dfrac{1}{3}$为首项的等比数列,即$\dfrac{1-a_n}{1+a_n}=\dfrac{1}{3^n}$,

从而可得$a_n=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$.

(2) **证明** 不难发现$\dfrac{a_n+a_m}{(1+a_n)(1+a_m)}$的取值仅与$n+m$有关,记为$b_{n+m}$.

为了求得只与a有关的λ,不妨取$m=1$进行试探.易知,此时有

$$b_{n+1}=\frac{a_1+a_n}{(1+a_1)(1+a_n)}=\frac{a+a_n}{(1+a)(1+a_n)}=\frac{1}{1+a}\left(1+\frac{a-1}{1+a_n}\right).$$

故可构建函数:$f(x)=\dfrac{1}{1+a}\left(1+\dfrac{a-1}{1+x}\right)(x>0)$.

所以在定义域上,恒有$f(x)_{\min}=g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a}, & a>1,\\ \dfrac{1}{2}, & a=1,\\ \dfrac{a}{1+a}, & 0<a<1,\end{cases}$

这就是说,当$m=1$时,对$n\in\mathbf{Z}^+$,有$b_{n+1}\geqslant f(x)_{\min}=g(a)$恒成立.

于是,当$k\geqslant n$,且$k,n\in\mathbf{Z}^+$时,由题意可知:

$$\frac{a_1+a_k}{(1+a_1)(1+a_k)}=\frac{a_2+a_{k-1}}{(1+a_2)(1+a_{k-1})}=\frac{a_3+a_{k-2}}{(1+a_3)(1+a_{k-2})}=\cdots$$
$$=\frac{a_n+a_{k-n+1}}{(1+a_n)(1+a_{k-n+1})}.$$

对上式而言,当$k=2n-1$时,有

$$b_{2n}=\frac{a_n+a_{k-n+1}}{(1+a_n)(1+a_{k-n+1})}=\frac{2a_n}{(1+a_n)^2}.$$

故要找到符合题意的λ,a_n必须满足$b_{2n}=\dfrac{2a_n}{(1+a_n)^2}\geqslant g(a)\left(注意到0<g(a)\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$,

解之得$\dfrac{1-g(a)-\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}$. ※

于是,对任意 a,取 $\lambda=\dfrac{1-g(a)+\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}$,则有 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1-g(a)-\sqrt{1-2g(a)}}{g(a)}$.

故对每个正整数 n,都有 $\dfrac{1}{\lambda}\leqslant a_n\leqslant\lambda$.

点评　第(1)小题,取特例探究是求 a_n 的基本思想.第(2)小题,为了寻求与 a 有关的 λ,先取 $m=1$,从 $\dfrac{a_n+a_m}{(1+a_n)(1+a_m)}$ 中创建出 a,再视 a_n 为变量构建函数 $f(x)$ 进行分析,记函数 $f(x)$ 的最小者为 $g(a)$(与 n 无关),由"一般项 $b_{n+1}>g(a)$ 成立,则 $b_{2n}>g(a)$ 也成立"推出 a_n 与 $g(a)$ 的关系式(※),然后依结论要求,取极端情形为 λ,这是解题的基本策略.本例的求解,能使我们进一步领会特殊性与一般性的辩证关系,把握特称命题与全称命题的内涵,掌握函数与方程思想、等价转化思想在解题中的应用.

【例 3】　(2014·荆州模拟)在直角坐标系 xOy 中,以原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,已知直线 $l:\rho(\sqrt{2}\cos\theta-\sin\theta)-a=0$ 与曲线 $C:\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta,\\ y=1+\sin2\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)有两个不同的交点,则实数 a 的取值范围为________.

错解　由题设知,曲线 C 为:$y=1+\sin2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2=x^2$,$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

直线 l 的方程为:$y=\sqrt{2}x-a$,则 l 与 C 有两个不同的交点等价于方程:

$x^2-\sqrt{2}x+a=0$ 有两个不等的实数根,

由此可得 $\Delta=(-\sqrt{2})^2-4a>0\Rightarrow a<\dfrac{1}{2}$.

故所求 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.

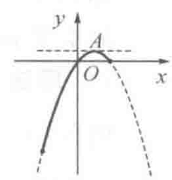

图 1-1-6

正解　易知 $a=-x^2+\sqrt{2}x=-\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$,

而 $y=-x^2+\sqrt{2}x$,$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 是开口向下的抛物线弧,如图 1-1-6 所示.

由此易知,$a_{\max}=\dfrac{1}{2}$,$a_{\min}=0$.故要使有两个不同的交点,则 a 不能等于 $\dfrac{1}{2}$,

所以 a 的取值为 $0\leqslant a<\dfrac{1}{2}$,故填 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$.

点评　对错解而言,很多人是这样做的,实际上这是一种错误的解法,因为它只顾及"两个不同的交点",而未考虑其存在的范围.一般地说,一个二次方程,要在指定的范围内有两个不等的实根,只用判别式分析是不妥的,要善于从函数图象的角度进行考查.对所推出的解析式,要注意标出它的定义域,并画图检验其真伪.如解法 2.

事实上,对解法 1 可更正为:

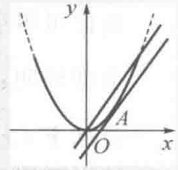

图 1-1-7

在坐标系中作出函数 $y=\sqrt{2}x-a$ 与 $y=x^2$,$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 的图象,如图 1-1-7 所示,当直线 l 与曲线 C 相切时,$a=\dfrac{1}{2}$,当直线过曲线的右端点 $A(\sqrt{2},2)$ 时,$a=0$.

于是,结合图形可得,所求 a 的取值范围为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$.

【例 4】 已知函数 $f(x)=a\ln(x+b)$，$g(x)=ae^x-1$，其中 $a\neq 0$，$b>0$，且函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(0,f(0))$ 处的切线与函数 $g(x)$ 的图象在点 $B(0,g(0))$ 处的切线重合.

(1) 求实数 a，b 的值；

(2) 若存在 x_0 满足 $\dfrac{x_0-m}{g(x_0)+1}>\sqrt{x_0}$，求实数 m 的取值范围；

(3) 若 $x_2>x_1>0$，试探究 $f(x_2)-f(x_1)$ 与 $g(x_2-x_1)$ 的大小，并说明你的理由.

解 (1) 由题意知 $f'(0)=\dfrac{a}{b}$，则过点 $A(0,a\ln b)$ 的切线方程为 $y=\dfrac{a}{b}x+a\ln b$.

又 $g'(0)=a$，则过点 $B(0,a-1)$ 的切线方程为 $y=ax+a-1$.

由两切线重合，得 $\begin{cases}\dfrac{a}{b}=a,\\ a\ln b=a-1,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=1$.

(2) 由 $\dfrac{x-m}{g(x)+1}>\sqrt{x}$，得 $\dfrac{x-m}{e^x}>\sqrt{x}$，即 $m<x-\sqrt{x}\cdot e^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上有解.

令 $h(x)=x-\sqrt{x}\cdot e^x$，则只需 $m<h(x)_{\max}$.

易知，当 $x>0$ 时，$h'(x)=1-\left(\dfrac{e^x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}e^x\right)=1-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)e^x$.

因为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\geqslant\sqrt{2}>1$，$e^x>1$，所以 $h'(x)<0$，

即 $h(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的减函数，所以 $h(x)<h(0)=0$.

故所求 m 的取值范围是 $(-\infty,0)$.

(3) **解法 1** 令 $u(x)=g(x)-f(x)=e^x-1-\ln(x+1)(x>-1)$，

则 $u'(x)=\dfrac{xe^x+e^x-1}{x+1}$.

对分子而言，令 $v(x)=xe^x+e^x-1(x>-1)$，

则 $v'(x)=e^x(x+2)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $v(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

所以当 $x>0$ 时，$v(x)>v(0)=0$ 成立. 从而 $u'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

故函数 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为递增的函数. 所以 $x>0$ 时，$u(x)>u(0)=0$ 恒成立.

由此可得，对于任意的 x_1，x_2，若 $x_2>x_1>0$，有 $g(x_2-x_1)>f(x_2-x_1)$.

又因为 $(x_2-x_1+1)-\dfrac{x_2+1}{x_1+1}=\dfrac{x_1(x_2-x_1)}{x_1+1}>0$，

于是，有 $\ln(x_2-x_1+1)>\ln\dfrac{x_2+1}{x_1+1}=\ln(x_2+1)-\ln(x_1+1)$.

所以 $f(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$，从而 $g(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$.

解法 2 由题设不难发现：函数 $g(x)$ 的图象恒在函数 $f(x)$ 的图象的上方.

由此可得引理：当 $x>0$ 时，恒有 $g(x)>f(x)$.

引理证明：设 $F(x)=e^x-1-\ln(x+1)(x>0)$，则 $F'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$.

显然 $F'(x)$ 是 x 的递增函数，且 $F(x)>F(0)=0$. 即 $e^x-1>\ln(x+1)$.

故引理得证.

由引理得，当 $x_2>x_1>0$ 时，有 $e^{x_2-x_1}-1>\ln(x_2-x_1+1)$.

故只需证 $f(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$.

由此希望　$\ln(x_2-x_1+1)>\ln(x_2+1)-\ln(x_1+1)$,

即希望$(x_2-x_1+1)(x_1+1)>(x_2+1)$,

也就是希望有 $x_2+1+(x_2-x_1)x_1>x_2+1$. ①

因为 $x_2>x_1>0$,故 ① 式恒成立.

从而可得 $g(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$.

解法 3　不妨设 $g(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$,则有 $e^{x_2-x_1}-1>\ln(x_2+1)-\ln(x_1+1)$.

记 x_2 为变量 x,则得引理:$e^{x-x_1}-1>\ln(x+1)-\ln(x_1+1)(x>x_1>0)$.

引理证明:设 $\varphi(x)=e^{x-x_1}-1-\ln(x+1)+\ln(x_1+1)$,则 $\varphi'(x)=e^{x-x_1}-\dfrac{1}{x+1}$,

显然 $\varphi'(x-x_1)>0$,故 $\varphi(x)$ 在$(x_1,+\infty)$ 上为递增的函数.

所以 $\varphi(x)>\varphi(x_1)=0$,即引理得证.

由此即可推得　$g(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$.

解法 4　由解法 3 知 $e^{x_2-x_1}-1>\ln(x_2+1)-\ln(x_1+1)$,$x_2>x_1>0$.

由于 $e^{x_2-x_1}>1+x_2-x_1$ 恒成立,

则希望 $x_2+1-(x_1+1)>\ln(x_2+1)-\ln(x_1+1)$ 成立,

即希望　$x_2+1-\ln(x_2+1)>x_1+1-\ln(x_1+1)$ 成立, ②

从而希望 $y=x-\ln(x+1)$ 为增函数.

故得引理:当 $x>0$ 时,函数 $y=x-\ln(x+1)$ 为递增函数.

引理证明:易知 $y'=1-\dfrac{1}{1+x}$,则当 $x>0$ 时,$y'>0$ 恒成立.

即引理成立.

于是,由引理知,② 式成立,故 $g(x_2-x_1)>f(x_2)-f(x_1)$.

点评　本例第(1)小题考查的是切线概念.第(2)小题考查的是转换化归思想.对存在性命题中的参数的取值范围的探究,常用的方法是转换与化归思想.第(3)小题考查的是利用导数研究函数不等式的问题.解决这类问题的关键是构建引理进行分析、探究.不难得知,本题的求解,可以促进我们对"切线"概念的深刻理解,对"存在性"命题的进一步认识,掌握根据题设条件构建引理解题的基本套路.

由此可见,注重对数学高考压轴题的解题思路的探究,不仅能加深我们对一些重要的概念、性质、公式、定理的深刻理解、融会贯通,而且还能提高我们的探究能力,丰富一题多解的思路,从而全面理解、掌握数学知识和数学思想方法.

第 2 节　求解压轴题可促进能力的提升

数学高考压轴题是展示学生数学能力(即空间想象能力、抽象概括能力、运算求解能力、推理论证能力和创新思维能力)的一个最特殊的平台.数学压轴题的编拟特别注重思维的发散性、灵活性与创新性,对能力以及应用意识和创新意识的考查要求非常之高,而数学的应用意识和创新意识是理性思维的高层次表现.

数学是思维的体操,是培养学生创新意识和实践能力的主要渠道.解答数学高考压轴题是一种创造性的思维活动,且解题的整个过程实质上就是不停地将命题转化,使之归结为已经解过的题.对一个数学命题的转化、引申、加强、整合的程度越高,展示能力的区域就越宽泛,显示出的创造意识也就越强.数学能力的增长,要通过对数学基本概念、公式、定理和数学思想方法的深入学习、完整理解、充分消化而自觉地完成,通过对一些具有创新思维的数学问题求解、研究的潜移默化来实现.

【例 5】　如图 1-2-1.已知点 F 是椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$ 的左焦点,直线 l 的方程为 $x=-\dfrac{a^2}{c}$,直线 l 与 x 轴交于 P 点,MN 为椭圆的长轴,且 $|MN|=8$,$|PM|=2|FM|$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 求证:对任意的割线 PAB 恒有 $\angle AFM=\angle BFN$;

(3) 求 $\triangle ABF$ 面积的最大值.

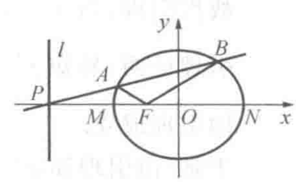

图 1-2-1

解　(1) 由题意知,线段 $|MN|=2a=8$,所以 $a=4$.

因为 $|PM|=2|FM|$,所以 $\dfrac{a^2}{c}-a=2(a-c)$,

即 $16-4c=8c-2c^2$,解之得 $c=2$,从而 $b^2=12$.

故椭圆的方程为　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.　①

(2) **证明**　当 $k_{AB}=0$ 时,显然 $\angle AFM=\angle BFM=0$ 满足题意.

当 AB 的斜率不为 0 时,设 AB 方程为 $x=my-8$.

将 $x=my-8$ 代入椭圆方程中,整理得 $(3m^2+4)y^2-48my+144=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\dfrac{48m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{144}{3m^2+4}$.

$$k_{AF}+k_{BF}=\frac{y_1}{my_1-6}+\frac{y_2}{my_2-6}=\frac{2my_1y_2-6(y_1+y_2)}{(my_1-6)(my_2-6)}=\frac{\dfrac{288m}{3m^2+4}-\dfrac{288m}{3m^2+4}}{(my_1-6)(my_2-6)}=0,$$

从而 $\angle AFM=\angle BFN$.

综上可知,恒有 $\angle AFM=\angle BFN$.

(3) **解法 1**　因为 $P(-8,0)$,$F(-2,0)$,所以 $|PF|=6$.

从而 $|y_2-y_1|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(\dfrac{48m}{3m^2+4}\right)^2-4\cdot\dfrac{144}{3m^2+4}}=\dfrac{24\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}$,

所以 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle PBF}-S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}\mid PF\mid\cdot\mid y_1\mid-\frac{1}{2}\mid PF\mid\cdot\mid y_2\mid=\frac{1}{2}\mid PF\mid\cdot\mid y_2-y_1\mid$

$$=\frac{72\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}=\frac{72\sqrt{m^2-4}}{3(m^2-4)+16}=\frac{72}{3\sqrt{m^2-4}+\frac{16}{\sqrt{m^2-4}}}$$

$$\leqslant\frac{72}{2\sqrt{3\cdot 16}}=3\sqrt{3}.$$

当且仅当 $3\sqrt{m^2-4}=\frac{16}{\sqrt{m^2-4}}$，即 $m^2=\frac{28}{3}$(此时适合 $\Delta>0$ 的条件)时取等号.

所以 $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $3\sqrt{3}$.

解法 2　设 AB 方程为 $y=k(x+8)$，代入椭圆方程 ① 中，得

$(3+4k^2)x^2+4\cdot 16k^2x+16\cdot 16k^2-16\cdot 3=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4\cdot 16k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{16(16k^2-3)}{3+4k^2}$，

且 $\Delta=(4\cdot 16k^2)^2-4(3+4k^2)\cdot 16(16k^2-3)=4\cdot 16(9-36k^2)=64\cdot 9(1-4k^2)$，

所以 $\mid AB\mid=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{3+4k^2}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\cdot 24\sqrt{1-4k^2}$.

又点 F 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{6\mid k\mid}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\mid k\mid}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{24}{3+4k^2}\cdot\sqrt{(1+k^2)(1-4k^2)}=\frac{72\mid k\mid\sqrt{1-4k^2}}{3+4k^2}$，　②

则 $S_{\triangle ABF}=\frac{72}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{16k^2(3-12k^2)}}{3+4k^2}\leqslant\frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{16k^2+3-12k^2}{3+4k^2}=3\sqrt{3}$($k^2=\frac{3}{28}$ 时取等号).

所以 $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $3\sqrt{3}$.

解法 3　由于 $k=0$ 时，面积为 0，不可取，不妨设 $k>0$，并记 $x=k^2$.

由 ② 式得 $S_{\triangle ABF}=\frac{72\sqrt{x-4x^2}}{3+4x}$，设 $f(x)=\frac{x-4x^2}{(3+4x)^2}\left(0<x<\frac{1}{4}\right)$，

所以 $f'(x)=\frac{(1-8x)\cdot(3+4x)^2-2(3+4x)\cdot 4\cdot(x-4x^2)}{(3+4x)^4}=\frac{3-28x}{(3+4x)^3}$，当 $x=\frac{3}{28}$ 时，$f'(x)=0$.

$x\in\left(0,\frac{3}{28}\right)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in\left(\frac{3}{28},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$. 故 $x=\frac{3}{28}$ 是最大值点.

所以 $S_{\triangle ABF}\leqslant 72\sqrt{f(x)_{\max}}=72\sqrt{f\left(\frac{3}{28}\right)}=72\sqrt{\frac{\frac{3}{28}\left(1-4\cdot\frac{3}{28}\right)}{\left(3+4\cdot\frac{3}{28}\right)^2}}=3\sqrt{3}$，

当且仅当 $k^2=\frac{3}{28}$ 时取等号.

此时满足 $\Delta>0$，所以 $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $3\sqrt{3}$.

点评　本题考查直线与椭圆的综合运用,考查运算能力、推理论证能力;考查化归与转化思想.综合性强,难度大.考生往往易在运算上卡壳,解题时要认真审题,注重探究.第1、第2两问的求解较为基本.第(3)问,解法1采用的是将分子常数化的策略;解法2注重局部用重要不等式法的思想,对$(1-4k^2)$变形,是瞄准分母$(3+4k^2)$中的"3"来凑系数的,由此产生将它配成$(3-12k^2)$的设想,进而得出还要配上"16",这是一种创造性的做法;解法3采用的是导数法思想,由于其表达式可视为以k^2为变量的函数,故须将k^2换成变元x,这是本解法的精巧之处.

【例6】　(2010·天津模拟)已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足:$S_n=a(S_n-a_n+1)$(a为常数,且$a\neq 0,a\neq 1$).

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设$b_n=a_n^2+S_n\cdot a_n$,若数列$\{b_n\}$为等比数列,求a的值;

(3) 在满足条件(2)的情况下,设$c_n=\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$,数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$,求证:$T_n>2n-\dfrac{1}{2}$.

解　(1) 当$n=1$时,$S_1=a(S_1-a_1+1)$,由此可得$a_1=a$.

当$n\geqslant 2$时,$S_n=a(S_n-a_n+1)$,$S_{n-1}=a(S_{n-1}-a_{n-1}+1)$,

两式相减,得$a_n=a\cdot a_{n-1}$.

即数列$\{a_n\}$是首项为a,公比为a的等比数列.

所以$a_n=a\cdot a^{n-1}=a^n$.

(2) 由(1)知$b_n=(a^n)^2+a^n\cdot\dfrac{a(a^n-1)}{a-1}=\dfrac{(2a-1)a^{2n}-a^{n+1}}{a-1}$.

若$\{b_n\}$为等比数列,则$b_2^2=b_1b_3$,

而$b_1=2a^2$,$b_2=a^3(2a+1)$,$b_3=a^4(2a^2+a+1)$.

故$[a^3(2a+1)]^2=2a^2\cdot a^4(2a^2+a+1)$,解得$a=\dfrac{1}{2}$.

再将$a=\dfrac{1}{2}$代入b_n,得$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,则数列$\{b_n\}$为等比数列,即结论成立.

由此可得,所求a的值为:$a=\dfrac{1}{2}$.

(3) **证法1**　由(2)得$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

所以$c_n=\dfrac{1}{\frac{1}{2^n}+1}-\dfrac{1}{\frac{1}{2^{n+1}}-1}=\dfrac{2^n}{2^n+1}+\dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}=2-\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

由此可得　$c_n>2-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$.(放缩变形)

$$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n>\left(2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(2-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots+\left(2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=2n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}>2n-\frac{1}{2}.$$

证法 2　因为 $c_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2^n}+1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{2^{n+1}}-1}=\dfrac{2^n}{2^n+1}+\dfrac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}>2-\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$,

所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$$>2n-\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}-\cdots-\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1},$$

$$=2n-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^{n+1}+1}>2n-\frac{1}{2}.$$

证法 3　先证引理:$\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}>\dfrac{1}{2^n+1}$,

即 $\dfrac{2^{n+1}-1+2^{n+1}}{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}>\dfrac{1}{2^n+1}\Leftrightarrow(2^{n+2}-1)(2^n+1)>2^{2n+2}-2^{n+1}$

$\Leftrightarrow 2^{2n+2}-2^n+2^{n+2}-1>2^{2n+2}-2^{n+1}\Leftrightarrow 2^{n+1}\cdot 3-1>-2^{n+1}$.

此式显然成立.

由引理得 $-\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}>-\dfrac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow 2-\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}>2-\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

由此可得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2-\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)>\sum_{k=1}^{n}\left(2-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=2n-\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$$=2n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}>2n-\frac{1}{2}.$$

即原不等式成立.

点评　本题考查数列与不等式的综合,考查运算、推理论证能力;考查化归与转化思想.第(1)、(2)两小问只要明确了等比数列的概念即可获得解决.第(3)小问,求解的关键在于瞄准所求结论巧作放缩.解法1是将两分式同时放缩;解法2是局部放缩;解法3是通过构建引理进行放缩的.易知这三种放缩都具有较大的探究性,体现了“创建引理”,“加强命题”的思想方法.因此,本题是提升数学素养与能力的好题.

【例 7】　已知函数 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}ax\right)+x^2-ax$($a$ 为常数,$a>0$).

(1) 若 $x=\dfrac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点,求 a 的值;

(2) 求证:当 $0<a\leqslant 2$ 时,$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是增函数;

(3) 若对任意的 $a\in(1,2)$,总存在 $x_0\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,使不等式 $f(x_0)>m(1-a^2)$ 成立,求实数 m 的取值范围.

解　(1) 因为 $f(x)=\ln(1+ax)-\ln 2+x^2-ax$,

所以 $f'(x)=\dfrac{a}{1+ax}+2x-a=\dfrac{2ax}{1+ax}\left(x-\dfrac{a^2-2}{2a}\right)$.

由 $x=\dfrac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点,得 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,

即 $a^2-a-2=0$,而 $a>0$,所以 $a=2$.

(2) **证明** 当 $0 < a \leqslant 2$ 时，要使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上递增，

则要 $f'(x) = \frac{2ax}{1+ax}\left(x - \frac{a^2-2}{2a}\right) > 0$，

即要 $x > \frac{a^2-2}{2a}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上恒成立，从而要 $x > \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{a}\right)_{\max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

显然，上式恒成立，且当 $a = 2$ 时，$f'(x) = \frac{4x^2-2x}{1+2x} > 0$ 亦成立.

故当 $0 < a \leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上是增函数.

(3) **解法 1** 因为 $a \in (1,2)$ 时，由(2)知，在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上，

$f(x)_{\max} = f(1) = \ln\left(\frac{1+a}{2}\right) + 1 - a$.

故问题等价于：对任意的 $a \in (1,2)$，不等式 $\ln\frac{1+a}{2} + 1 - a + m(a^2-1) > 0$ 恒成立.

记 $g(a) = \ln\frac{1+a}{2} + 1 - a + m(a^2-1)\ (1 < a < 2)$，则 $g'(a) = \frac{a}{1+a}[2ma - (1-2m)]$.

当 $m = 0$ 时，$g'(a) = \frac{-a}{1+a} < 0$，故 $g(a)$ 在区间 $(1,2)$ 上递减，此时 $g(a) < g(1) = 0$.

由于 $a^2 - 1 > 0$，故 $m \leqslant 0$ 时，不可能有 $g(a) > 0$ 的情形，故必有 $m > 0$.

由此可得 $g'(a) = \frac{2ma}{1+a}\left[a - \left(\frac{1}{2m} - 1\right)\right]$.

若 $\frac{1}{2m} - 1 > 1$，可知 $g(a)$ 在区间 $\left(1, \min\left\{2, \frac{1}{2m} - 1\right\}\right)$ 上递减，

则在此区间上，有 $g(a) < g(1) = 0$，这与 $g(a) > 0$ 恒成立相悖.

由此可得 $\frac{1}{2m} - 1 \leqslant 1$，此时 $g'(a) > 0$.

故 $g(a)$ 在 $(1,2)$ 上递增，且恒有 $g(a) > g(1) = 0$，满足题设要求，

所以 $\begin{cases} m > 0, \\ \frac{1}{2m} - 1 \leqslant 1, \end{cases}$ 由此可得 $m \geqslant \frac{1}{4}$.

综上知，m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

解法 2 因为 $a \in (1,2)$ 时，由(2)知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上的最大值 $f(1) = \ln\left(\frac{1+a}{2}\right) + 1 - a$.

故问题等价于：对任意的 $a \in (1,2)$，不等式 $\ln\frac{1+a}{2} + 1 - a + m(a^2-1) > 0$ 恒成立.

由此只需 $m > \left[\frac{a - 1 + \ln 2 - \ln(1+a)}{a^2-1}\right]_{\max}$，$a \in (1,2)$ 即可.

记 $h(a) = \frac{a - 1 - \ln\frac{1+a}{2}}{a^2-1}$，则 $h'(a) = \frac{2a\left[\ln\left(\frac{1+a}{2}\right) - \frac{a-1}{2}\right]}{(a^2-1)^2}$.

因为 $a > 1$ 时，恒有 $\ln\frac{1+a}{2} = \ln\left(1 + \frac{a-1}{2}\right) \leqslant \frac{a-1}{2}$ 成立，所以在 $(1,2)$ 上，$h'(a) < 0$.