

~ 考研数学命题人土豪金系列丛书 ~

2016

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人 历年真题精析

(数学二)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授
北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn

获超多增值服务



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人土豪金系列丛书

2016

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人 历年真题精析

(数学二)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授
北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

本书每章习题答案与详解

+2

篇北大、清华
数学满分秘笈

+2

套原命题组成
员密押试卷

+5

大考研命题人
快速解题方法

+8

小时命题人数
学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn
获超多增值服务



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在 10 多年收集、整理考研数学资料 and 进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心研究和分析,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书收录了 1998—2015 年考研数学二历年真题,并进行了详细的解析;精辟阐明解题思路,全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还将 1987—1997 年的相关典型真题作为习题提供,以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家,以及一线教师共同编写而成。通过本书考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,进一步把握考试的特点及命题的思路,从而从容应考,轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2016 考研数学命题人历年真题精析. 数学二 / 全国
硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京: 北
京航空航天大学出版社, 2015. 3

ISBN 978-7-5124-1696-3

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030225 号

版权所有,侵权必究。

2016 考研数学命题人历年真题精析(数学二) 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 王 实

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpess@263.net 邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本: 787×1 092 1/16 印张: 26.5 字数: 615 千字

2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-1696-3 定价: 42.80 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

编 委 会

总主编 刘学元

编 委	徐 荣	尤承业	刘德荫	童 武
	刘 佩	李春艳	叶 青	欧阳少波
	张晓燕	张 孜	黄 艳	王 宁
	张 杰	李 征	李智忠	黎兴刚
	汪 华	任丽娟	董 亮	王 欢
	陈冬冬	张飞飞	赵 娜	王光福
	郝显纯	高晓琼	李铁红	涂振旗
	姜宝静	杨 勇	王 宇	陈 娟
	王新会	崔杰凯	孟 楠	陈昌勇
	江海波	苗红宜	张永艳	潘小春
	王 静			

前 言

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,已有 29 载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料,也是命题组专家智慧的结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题,则是广大准备考研的同学们的期盼。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写,对历年考研真题逐题给出了详细解答,并尽量做到一题多解。只要认真分析研究,了解消化和掌握历年试题,便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性,也可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢,事半功倍。

本书包括两部分内容:

一部分是 1998—2015 年的完整真题,旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象,从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中,精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题,分值较高。编者分考点归纳习题,总结各类题型的解题思路和方法,并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析,我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解,还在逐题解析历年考研数学试题的基础上,给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点,还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过列举具体题目,分析常犯的错误,使考生引以为戒;各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点:

1. 内容全面 汇集了 1998 年以来的所有真题,以便考生对历年真题有大致的了解并可研究真题。

2. 题型丰富 本书按考点对历年真题分类,对每种题型都进行了归纳和总结,方便考生复习。

3. 解析详尽 首先给出本题相应考点,再分析解题思路,给出详解,并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注,点出本题应注意之处。

基础复习阶段,考生可以利用第二部分内容,体会各知识点和题型的命题形式和特点。模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题速度及准确率。如此复习,既能加深和巩固知识点,又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏,源于自信。

我们深信,考生仔细研读本书后,必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

编者 于清华园

目 录

第一篇 2015 年考研数学二试题及答案与解析

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	3
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案与解析	6

第二篇 1998—2014 年考研数学二试题

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	17
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	20
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	23
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	26
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	29
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	32
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	36
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	39
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	43
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	47
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	51
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	55
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	59
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	62
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	66
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	69
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	73

第三篇 1998—2014 年考研数学二试题分类解析

第一部分 高等数学	79
第 1 章 函数、极限、连续	79
第 2 章 一元函数微分学	111
第 3 章 一元函数积分学	166
第 4 章 多元函数微分学	213
第 5 章 重积分	228
第 6 章 微分方程	241
第二部分 线性代数	267
第 1 章 行列式	267
第 2 章 矩 阵	272
第 3 章 向 量	284
第 4 章 线性方程组	295
第 5 章 矩阵的特征值与特征向量	312
第 6 章 二次型	325



第一篇

2015年考研数学二试题及答案与解析



2015 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 ()

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ (D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

(2) 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x} \right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

- (A) 连续 (B) 有可去间断点
(C) 有跳跃间断点 (D) 有无穷间断点

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则为

- (A) $\alpha - \beta > 1$ (B) $0 < \alpha - \beta \leq 1$
(C) $\alpha - \beta > 2$ (D) $0 < \alpha - \beta \leq 2$

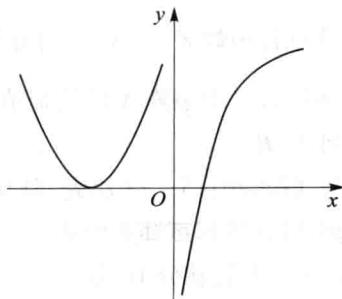
(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如下图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(5) 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$,

则 $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 与 $\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 依次是 ()

- (A) $\frac{1}{2}, 0$ (B) $0, \frac{1}{2}$
(C) $-\frac{1}{2}, 0$ (D) $0, -\frac{1}{2}$



(6) 设 D 是第一象限曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与

直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

()

$$(A) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$(B) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$(C) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$$

$$(B) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$$

(7) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无

穷多解的充分必要条件为

()

$$(A) a \notin \Omega, d \notin \Omega$$

$$(B) a \notin \Omega, d \in \Omega$$

$$(C) a \in \Omega, d \notin \Omega$$

$$(D) a \in \Omega, d \in \Omega$$

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$, 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f = (x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

()

$$(A) 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$$

$$(B) 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

$$(C) 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$(B) 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} x = \arctan t, \\ y = 3t + t^3, \end{array} \right. \text{ 则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) \text{ 函数 } f(x) = x^2 \cdot 2^x \text{ 在 } x=0 \text{ 处的 } n \text{ 阶导数 } f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(11) \text{ 设 } f(x) \text{ 连续, } \varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t) dt, \text{ 若 } \varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5, \text{ 则 } f(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值为 3, 则 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$(13) \text{ 若函数 } Z = z(x, y) \text{ 由方程 } e^{x+2y+3z} + xyz = 1 \text{ 确定, 则 } \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(14) 若三阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 则行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

设 $A > 0$, D 是由曲线段 $y = A \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区

域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积, 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

(17) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$, $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$, $f(0, y) = y^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数是多少?

(20) (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比. 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30 min 后该物体降至 30°C , 若要将该物体的温度继续降至 21°C , 还需冷却多长时间?

(21) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数, $f(a) = 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 设 $b > a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ 且 $A^3 = O$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, E 为三阶单位矩阵, 求 X .

(23) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 的相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

2015 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题答案与解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考点提示】 反常积分的收敛判别法

【解题分析】 $\int \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x}$, 则 $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = 3e^{-2}$.

2. 【答案】 B

【考点提示】 函数的间断点

【解题分析】 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x} \right)^{\frac{x^2}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{x} \cdot \frac{x^2}{t}} = e^x, x \neq 0$, 故 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$.

因此, 本题选 B.

3. 【答案】 A

【考点提示】 函数的连续性

【解题分析】 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 0, f'_-(0) = 0$,

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta}.$$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + (-1)x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} (-\beta) \frac{1}{x^{\beta+1}} \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}. \end{aligned}$$

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 可得

$$f'_-(0) = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = 0,$$

因此, $\alpha-1 > 0$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right) = 0,$$

得 $\alpha - \beta - 1 > 0$, 本题选 A.

4. 【答案】 C

【考点提示】 函数的拐点

【解题分析】 由右图可以看出, $x > 0$ 时存在一点, 使二阶导数变号, 因此拐点个数为 2 个. 本题选 C.

5. 【答案】 D

【考点提示】 二元复合函数偏导数的求解

【解题分析】 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$ 则 $x = \frac{u}{1+v}, y =$

$\frac{uv}{1+v}$, 则 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ 变为

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

所以 $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2u(1-v)}{1+v}, \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2u^2}{(1+v)^2}$, 因而 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = -\frac{1}{2}.$

所以本题选 D.

6. 【答案】 B

【考点提示】 二重积分极坐标变换

【解题分析】 根据曲线表达式绘出右图所示图形, 在极坐标系下该二重积分的积分区域为

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right\},$$

所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

因此本题选 B.

7. 【答案】 D

【考点提示】 线性方程组求解

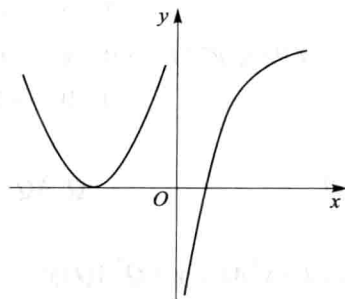
【解题分析】 对矩阵进行行变换,

$$(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{bmatrix},$$

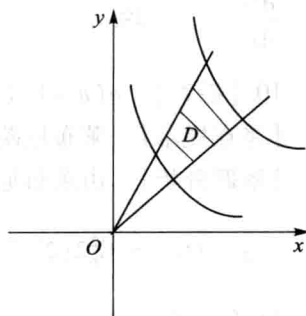
$r(A) = r(A, b) < 3$, 所以 $a = 1$ 或 $a = 2$, 相应的, $d = 1$ 或 $d = 2$. 因此本题选 D.

8. 【答案】 A

【考点提示】 二次型的标准形



4 题图



6 题图

【解题分析】 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, 因此 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

又因为 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 得 $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{C}$.

所以 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

所以 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}) \mathbf{y} = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. 故本题选 A.

二、填空题

9. 【答案】 48

【考点提示】 对参数方程所确定的函数求导

【解题分析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{3+3t^2}{1+t^2} = 3(1+t^2)^2$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [3(1+t^2)^2] = \frac{d[3(1+t^2)^2]}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{12t(1+t^2)}{1+t^2} = 12t(1+t^2)^2,$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = 48.$$

10. 【答案】 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

【考点提示】 莱布尼茨公式

【解题分析】 由莱布尼茨公式有,

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 2(2^x)^{n-2} \Big|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2} 2(\ln 2)^{n-2} = n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

11. 【答案】 2

【考点提示】 复合函数求导

【解题分析】 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$, 对其两边同时求导得

$$\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2),$$

因此 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1$, $\varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$, 则 $f(1) = 2$.

12. 【答案】 $e^{-2x} + 2e^x$

【考点提示】 二阶齐次线性微分方程通解结构

【解题分析】 函数 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值为 3, 所以 $y(0)=3, y'(0)=0$, 解特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$.

微分方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

把 $y(0) = 3, y'(0) = 0$ 代入通解, 得 $C_1 = 2, C_2 = 1$.

因此, $y = 2e^x + e^{-2x}$.

13. 【答案】 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$

【考点提示】 符合函数求偏导

【解题分析】 当 $x=0, y=0$ 时, $z=0$, 对该式两边同时求偏导, 得

$$(3e^{x+2y+3z} + xy) \frac{\partial z}{\partial x} = -yz - e^{x+2y+3z},$$

$$(3e^{x+2y+3z} + xy) \frac{\partial z}{\partial y} = -xz - 2e^{x+2y+3z}.$$

把 $(0, 0, 0)$ 代入方程, 有

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{所以 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

14. 【答案】 21

【考点提示】 矩阵的特征值

【解题分析】 A 的所有特征值为 $2, -2, 1$. $B = A^2 - A + E$, 则 B 的所有特征值为 $3, 7, 1$.

所以 $|B| = 3 \times 7 \times 1 = 21$.

三、解答题

15. 【考点提示】 等价无穷小

【解题分析】 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2}.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} 3kx^2 = 0$, 则分子 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+a) = 0, a = -1$.

于是

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b(1+x) \sin x + bx(1+x) \cos x}{3kx^2(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b(1+x) \sin x + bx(1+x) \cos x}{3kx^2} \end{aligned}$$