普通高等教育“十二五”规划教材·经济管理类数学基础系列

线性代数

（第二版）

李振东　王国兴　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
经济管理类数学基础系列

线性代数

（第二版）

李振东　王国兴　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材·经济管理类数学基础课系列”其中一本。全书共7章，内容包括行列式、矩阵、n维向量与线性方程组、线性方程组解的存在性与解的结构、向量空间、矩阵的对角化、二次型。

本书体系完整，逻辑清晰，深入浅出，便于自学，既可作为高等学校经济类、管理类专业和其他相关专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可供报考研究生者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李振东，王国兴主编. —2版. —北京：科学出版社，2015
普通高等教育“十二五”规划教材. 经济管理类数学基础系列
ISBN 978-7-03-044458-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李…②王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114495号

责任编辑：相 凌 焦惠丛/责任校对：胡小洁
责任印制：赵 博/封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
文林印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015年6月第 二 版 印张：13
2015年6月第十次印刷 字数：262 000

定价：26.00元

第二版前言

2010 年《线性代数》第一版出版，按照全国高等学校教学研究中心研究项目“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的要求，进行了五年的教学实践. 五年中，读者和使用本书的同行提出了许多宝贵的意见和建议，这些意见和建议除了在平时的教学实践中不断吸纳外，借这次修订机会，对本书的部分内容也作了相应调整，使其更符合先易后难、循序渐进的教学规律，本书也是兰州财经大学“质量工程”——“经济数学基础系列课程教学团队（2013 年度）”教材建设的阶段性成果.

本书习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如 1998 考研真题用（1998）表示，2009 考研真题用（2009）表示. 教材每章后的习题均为（A）（B）两组，其中（A）组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，（B）组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习.

各章中标有“ * ”的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学用.

本书由李振东、王国兴主编. 其中，第 1、2 章由王国兴编写，第 3 章由李振东编写，第 4、5 章由李金林编写，第 6、7 章由李凌编写，全书由主编统稿定稿.

希望通过这次修订，本书能够更符合现代教育教学规律，更符合大学数学教学的实际，更容易被读者所接纳，书中不当之处在所难免，恳请读者和同行继续批评指正.

编　者

2015 年 4 月

第一版前言

本书是“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”教材之一，是全国高等学校教学研究中心“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的研究成果.本书由多年从事数学教学实践的教师，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学(三)》考试大纲的要求，按照继承与改革的精神编写而成.

线性代数是研究有限维空间中线性关系的理论和方法的数学，是代数学的分支.与“微积分”、“概率论与数理统计”等基础数学课相比，“线性代数”课内容抽象，定义、定理较多，是教与学的难点.但从经济应用模型的建立、运行与分析等方面看，线性代数知识又有着广泛的应用，是经济管理类专业学生必修的基础课程.

为了使学生更好地掌握线性代数知识，本书在编写中着重解决了以下三方面的问题：

(1)注意知识前后衔接，以激发学生的学习兴趣.如线性方程组、向量的概念都是在中学所学知识的基础上逐步引入的.

(2)强调基本概念、基本方法之间的关系，强调知识的贯通性，以加深对概念的深入理解和应用.如对矩阵的秩与向量组的秩、线性方程组与向量组的线性组合之间的关系等，作了综合阐述.

(3)尽可能的利用几何直观和应用实例，解决概念理解和方法使用的问题，以提高学习质量.

本书由李振东教授、李金林副教授主编.第1、2章由王国兴编写，第4、5、6章由李金林编写，第3、7章由李振东编写，全书由主编统稿定稿.

由于编者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2010年3月

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式是研究线性代数及其他数学分支的一个重要工具.本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质与计算方法,以及利用 n 阶行列式解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的克拉默法则.

1.1　n 阶行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

1. 二阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}. \tag{1.1}$$

用加减消元法解方程组(1.1),得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,得到方程组(1.1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{1.2}$$

为便于记忆,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

称为二阶行列式.其中 a_{ij} 称为行列式的元素,其第一下标 i 为行标,表示该元素位于第 i 行,第二下标 j 为列标,表示该元素位于第 j 列,a_{ij} 表示该元素为行列式第 i 行第 j 列的元素.二阶行列式可用对角线法则来记忆.如图 1-1 所示,把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线,把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

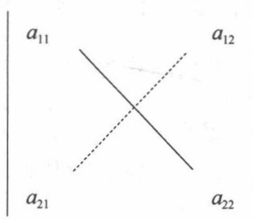

图 1-1

利用二阶行列式的记法,式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也

可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果行列式 $D\neq0$，则方程组(1.1)的唯一解(1.2)可表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，分母 D 是由方程组(1.1)的系数构成的二阶行列式(称为系数行列式)；x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第一列元素 a_{11},a_{21} 得到的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第二列元素 a_{12},a_{22} 得到的二阶行列式.

2. 三阶行列式

类似于二阶行列式，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为**三阶行列式**. 三阶行列式有 6 项，每项均是由不同行不同列的三个元素的乘积冠以正负号得到的，其规律遵循图 1-2 所示的**对角线法则**. 图中三条实线看成平行于主对角线的连线，三条虚线看成平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

二、排列与逆序数

定义 1.1　由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 **n 级排列**，简称为**排列**. 构成排列的数称为排列的元素.

例如，1234 和 3421 都是 4 级排列，25314 是一个 5 级排列. 由数 1,2,3 共可构成 6 种不同的排列：123,132,213,231,312,321.

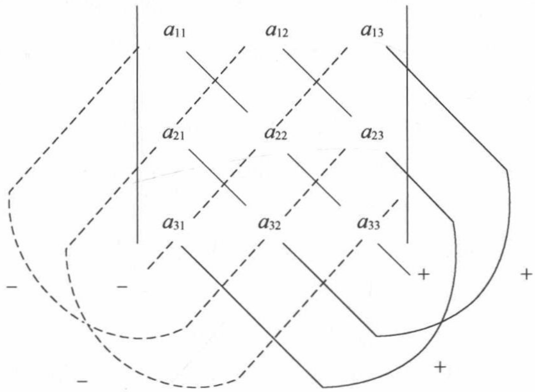

图 1-2

由数 1,2,…,n 构成的不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若数 $i_s>i_t$,则称数 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**.一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例 1 计算 5 级排列 25314 的逆序数.

解 因为 2 排在首位,故其逆序的个数为 0;在 5 前面且比 5 大的数有 0 个,故其逆序的个数为 0;在 3 前面且比 3 大的数有 1 个,故其逆序的个数为 1;在 1 前面且比 1 大的数有 3 个,故其逆序的个数为 3;在 4 前面且比 4 大的数有 1 个,故其逆序的个数为 1,即

$$\tau(25314)=0+0+1+3+1=5.$$

对于 n 级排列 $n(n-1)\cdots321$,有

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

在 n 级排列 $12\cdots(n-1)n$ 中,各数是按照由小到大的自然顺序排列的.这一排列称为 n 元**自然序排列**.由于其中任何一个数对都不构成逆序.因此 $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$.

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如,排列 25314 的逆序数是 5,为奇排列;$12\cdots(n-1)n$ 的逆序数是零,为偶排列.

定义 1.4 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果将它的两个元素 i_s 与 i_t 互换位置,而其余元素不动,得到另一个排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$.这样的变换称为一次**对换**,记为 (i_s,i_t).

例如,$31542\xrightarrow{(5,2)}31245$.

定理 1.1　任意一个排列经过一次对换后，奇偶性改变.

证　用 s 表示排列 $i_1i_2\cdots i_i\cdots i_j\cdots i_n$，将 i_i 与 i_j 对换后得排列 s' 为 $i_1i_2\cdots i_j\cdots i_i\cdots i_n$.

(1) $j=i+1$，即 i_i 与 i_j 处于相邻的位置，此时，当 $i_i<i_{i+1}$ 时，$\tau(i_1i_2\cdots i_ii_{i+1}\cdots i_n)=\tau(i_1i_2\cdots i_{i+1}i_i\cdots i_n)-1$；而当 $i_i>i_{i+1}$ 时，$\tau(i_1i_2\cdots i_ii_{i+1}\cdots i_n)=\tau(i_1i_2\cdots i_{i+1}i_i\cdots i_n)+1$，所以 s 与 s' 的奇偶性相反.

(2) $j=i+k$，在排列 s 中 i_j 与 i_{j-1} 对换，再把 i_j 与 i_{j-2} 对换，这样用相邻两数对换的方法，经 k 次对换后，得到排列 s''

$$i_1i_2\cdots i_ji_ii_{i+1}\cdots i_{i+k-1}i_{j+1}\cdots i_n,$$

然后将排列 s'' 中 i_i 与 i_{i+1} 对换，再把 i_i 与 i_{i+2} 对换，这样用相邻两数对换的方法，经 $k-1$ 次对换后，就将 s 化为了 s'. 由于 $2k-1$ 是奇数，所以 s 与 s' 这两个排列的奇偶性相反.

定理 1.2　n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个 n 级排列中，奇偶排列各占一半.

证　假设在 $n!$ 个 n 级排列中，共有 k 个奇排列，l 个偶排列. 若对每个奇排列都作同一对换，则由定理 1.1，k 个奇排列均变为偶排列，故 $k\leqslant l$；同理对每个偶排列都作同一对换，则 l 个偶排列均变为奇排列，故 $l\leqslant k$. 所以 $k=l$，从而 $k=l=\frac{n!}{2}$.

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，首先研究三阶行列式的结构. 给出三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见以下三条规律：

(1) 三阶行列式展开式是 3! 项的代数和.

(2) 三阶行列式展开式的每一项都是其不同行不同列的三个元素的乘积. 每一项除正负号外都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里第一下标成自然序 123，而第二下标恰为一个 3 级排列 $j_1j_2j_3$.

(3) 三阶行列式的正项与负项各占一半. 当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号，因此各项所带的正负号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

这样，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

下面把三阶行列式的结构特点加以推广，定义 n 阶行列式.

定义 1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列组成的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

称为 n **阶行列式**，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项. 式(1.4)也称为 n 阶行列式的展开式. a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的**元素**. n 阶行列式(1.4)可简记为 $\det(a_{ij})$.

n 阶行列式表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因此 n 阶行列式共有 $n!$ 项；当组成项的各元素的行标按自然序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 例如，六阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中符号为 $(-1)^{\tau(645312)}$ 的项是 $a_{16}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}a_{62}$.

更一般地，可以将 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ \text{或} j_1j_2\cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.5}$$

其中 $\sum\limits_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ \text{或} j_1j_2\cdots j_n}}$ 表示对行标构成的所有的 n 级排列或列标构成的所有的 n 级排列求和.

显然这个定义与定义 1.5 是一致的. 当行标的 n 级排列取自然序排列 $12\cdots n$ 时，即是定义 1.5.

例如，四阶行列式 $\det(a_{ij})$ 是 $4!=24$ 项的代数和，$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ 是其中一项，其行标、列标对应的排列分别为 1234，3142，所以该项前的符号为 $(-1)^{\tau(1234)+\tau(3142)}=(-1)^3=-1$，取负号.

例 2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 根据定义 1.5 知 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

在 D 中,只有当 $j_1=1,j_2=2,j_3=3,\cdots,j_n=n$ 时一般项不等于零,因此

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的行列式称为**下三角行列式**. 下三角行列式等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上的元素的乘积.

下三角行列式的特殊情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中主对角线以外的元素都是零,称为**对角行列式**,它也等于主对角线上的元素的乘积.

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 这是一个 n 阶行列式,有 $n!$ 项,不为零的项只有

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

因此

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.2 行列式的性质

由 n 阶行列式的定义知,行列式展开式是 $n!$ 项的代数和. 每一项都是取自行列式不同行不同列的 n 个元素的乘积,同时还要确定各项前的正负号. 因此,对于较高阶数的行列式,直接按定义计算是比较困难的,为了简化行列式的计算,有必要研究行列式的性质.

定义 1.6　将 n 阶行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T},即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与其转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　由定义 1.5,D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,由于 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 这 n 个元素位于 D 的不同的行不同的列,从而也位于 D^{T} 的不同的列不同的行,故这 n 个元素的乘积在 D^{T} 中应为 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$,易知其符号也是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 因此,$D$ 与 D^{T} 是具有相同符号的相同项的代数和,即有 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 表明,行列式中的行与列有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有.

例 1　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解　因 $D=D^{\mathrm{T}}$,故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

行列式 D 称为**上三角行列式**. 此例说明:上三角行列式也等于主对角线上元素的乘积.

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式变号.

证　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } s \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

交换行列式 D 的第 i 行与第 s 行，得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } s \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

行列式 D 与 D_1 的项数相同，都是 $n!$ 项，D 的一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n},$$

这 n 个元素在行列式 D 和 D_1 中都位于不同的行不同的列，而 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行得到的. 各元素所在的列并没有改变，所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)},$$

在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

由于排列 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 是排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 经对换 (i,s) 得到的，因此两个排列的奇偶性相反，从而一般项在 D 与 D_1 中符号相反，故 $D_1=-D$.

推论　若一个行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

证　交换行列式这两行后，有 $D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

证　D 的第 i 行乘以数 k 后，行列式为

$$D_1=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD.$$

性质 3 也可以叙述为:若行列式某一行(列)所有元素有公因子 k,则 k 可以提到行列式符号的外面. 由此性质可以得到以下推论.

推论 1 若行列式有一行(列)的元素全为零,则行列式等于零.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于零.

例 2 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$,求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -3a_{12} & -15a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -3a_{12} & -15a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} -2a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$$=-3\times(-2)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-3\times(-2)\times5\times2=60.$$

性质 4 若行列式的某一行(列)各元素都是两数之和,即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 $D=\sum\limits_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$