普通高等院校高等数学系列规划教材

线性代数

丛书主编 朱家生 吴耀强
主编 赵士银 周 坚

中国建材工业出版社

普通高等院校高等数学系列规划教材

线性代数

丛书主编　朱家生　吴耀强
主　　编　赵士银　周　坚

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/赵士银，周坚主编．—北京：中国建材工业出版社，2015.8

普通高等院校高等数学系列规划教材/朱家生，吴耀强主编

ISBN 978-7-5160-1213-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①赵…②周… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第085138号

内 容 简 介

本书是根据教育部颁布的本科“线性代数课程教学基本要求”，结合现阶段非重点高校经管类、理工科学生的数学基础，并同时汇集了编者多年的教学心得和体会而形成的一本改革教材。

本书共分为四章，主要介绍行列式、矩阵、线性方程组和相似矩阵及二次型。在每章最后均配备了习题，并给出答案可供参考。

本书适合作为普通三本院校经济与管理类、理工类等各专业的教材，也可作为考研学生自学、复习用书。

线性代数

主　编　赵士银　周　坚

出版发行：中国建材工业出版社

地　　址：北京市海淀区三里河路1号

邮　　编：100044

经　　销：全国各地新华书店

印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司

开　　本：787mm×1092mm　1/16

印　　张：10.5

字　　数：262千字

版　　次：2015年8月第1版

印　　次：2015年8月第1次

定　　价：36.00元

本社网址：www.jccbs.com.cn　　微信公众号：zgjcgycbs

本书如出现印装质量问题，由我社网络直销部负责调换。联系电话：(010) 88386906

普通高等院校高等数学系列规划教材
编写委员会

序 言

高等数学课程作为高等学校的公共基础课，为学生的专业课程学习和解决实际问题提供了必要的数学基础知识及常用的数学方法，开设这门课程的目的除了把初等数学中一些未解决好的问题（如函数的性质、增减性等）重新认识并彻底解决外，还要通过学习其他的知识（如极限、微分、积分等），为学习专业课程打下坚实的基础。通过该课程的学习，可以逐步培养学生的数学思想、抽象概括问题的能力、逻辑推理能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力，其对于应用型人才培养的重要程度是毋庸置疑的。

2008 年，受扬州大学委派，我来到苏北一座新兴的城市——宿迁，参与宿迁学院的援建工作。作为一名长期在高校数学专业从教的教师，第一次有针对性地接触到一些无数学专业背景的教师和非数学专业的学生，有机会亲耳聆听他们对于高等数学教学改革的诉求与建议，感触颇深。宿迁学院是江苏省新创办的一所本科院校，办学之初就定位于应用技术型人才的培养，如何适应不同专业和不同学业水平学生的需求，成为我与从事数学教学的同事们常常讨论的话题。围绕普通高校高等数学教学改革，我们先后开展了多个课题的研究，并在不同的专业进行了一些改革尝试。

为了能把我们这几年来教学改革的体会和感悟总结出来，与同行交流与分享，我们历经 2 年，编写了这套“普通高等院校高等数学系列规划教材”，本系列教材共有三个分册：《微积分（上/下册）》，《线性代数》和《概率论与数理统计》。

为了保证本系列教材的教学适用性，在编写过程中，我们对国内外近年来出版的同类教材的特点进行了比较和分析。从教材体系、内容安排和例题配置等方面充分吸取优点，尤其是在内容的安排上，根据大多数本科院校教学时数设置的情况，进行了适当取舍，尽可能避免偏多、偏难、偏深的弊端，同时也为在教学过程中根据不同专业的需要和学生的具体情况给教师补充、发挥留有一定的空间。此外，我们还参考了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，力求教材体系、内容在适应高等院校各专业应用型人才培养对数学知识需求的同时，又能兼顾报考研究生的需求。

本书的主要特点如下：

1. 遵循“厚基础，宽口径”的原则，在内容安排上，力争基础不削弱，重要部分适当加强。尽可能做到简明扼要，深入浅出，语言准确，易于学生学习。在引入概念时，注意以学生易于接受的方式叙述。略去大多数教材中一些定理的证明，只保存了一些重要定理和法则，更突出有关理论、方法的应用和数学模型的介绍，重在培养这些专业的学生掌握用这些知识解决实际问题的能力。

2. 我们充分考虑各专业后继课程的需要和学生继续深造的需求，将本系列教材配备了A、B两组习题，达到A组水平，即已符合本课程的基本要求；而B组则是为数学基础要求较高的专业或学生准备的，当然也适当兼顾部分学生报考研究生的需求。

3. 照顾到入学时的学生数学水平参差不齐，尤其是考虑到与中学数学相关内容的衔接，尽量让不同背景、不同层次的学生学有所获。

本系列教材的出版，得到了中国建材工业出版社的大力支持，特别是胡京平编辑的帮助，也得到宿迁学院和教务处的关心和支持，在此一并表示衷心感谢！

虽然我们希望能够编写出版一套质量较高、适合当前教学实际需要的丛书，但限于水平与能力，教材中仍有不少未尽如人意之处，敬请读者不吝指正。

朱家生

2015年7月

前　　言

线性代数理论有着悠久的历史和丰富的内容，尤其是随着现代科学技术的迅猛发展，其相关理论已被广泛用于自然科学、社会科学、工程技术、信息安全、生命科学、生物技术、航天、航海、经济管理等各个领域。线性代数课程所体现的几何观念与代数方法之间的内在联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等知识体系，对于普通高等院校培养应用型人才具有重要的作用。

本书是根据教育部颁布的本科“线性代数课程教学基本要求”，结合现阶段非重点高校经管类、理工科学生的数学基础，并同时汇集了编者多年的教学心得和体会而形成的一本改革教材。整本教材力求体现以下特点：

（1）基本概念和定理叙述上，力图做到由浅入深，循序渐进，注意突出重点。在保证科学严谨性的前提下，尽量用简单明了的思路和语言阐述这些内容，略去了一些深奥的理论证明。

（2）例题选取上，多以具有代表性，能体现课程的基本方法和理论的例题为主，部分例题给出了多种解法。

（3）以注记的形式对每一章节的重要概念、定理等内容给出了详细的分析和说明。

（4）为了便于学生的预习和课后更好地复习，在每一章节内容开始之前，都给出了本章节的基本学习要求。

（5）教材的每一章节基本内容之后，都配备了一些同步基本习题。同时为了使学生更好地掌握所学基本知识，又配备了相关的总复习题。在书末给出了习题的参考答案。

（6）结合非重点高校经管类、理工科学生的特点和课时要求，对于教学大纲基本要求之外的内容，用小一号的字体标出。

本书共分为四章。第一章主要介绍了行列式的概念和性质。第二章介绍了矩阵的代数运算、可逆矩阵、方块矩阵、矩阵的初等变换、矩阵的秩等概念和相关性质。第三章首先讨论了线性方程组的求解问题，给出了方程组有解的判别定理，接着介绍了向量的线性关系和向量组的秩等知识。最后，研究了齐次和非齐次线性方程组解的结构。第四章研究了矩阵的特征值和特征向量、相似矩阵等内容后，探讨了方阵的对角化问题。在

此基础之上，给出了二次型概念，并研究了化二次型为标准形与规范形的一般方法，最后介绍了正定二次型的相关性质。

本书适合作为普通三本院校经济与管理类、理工类等各专业的教材，也可作为考研学生自学、复习用书。

本书由赵士银、周坚担任主编，其中赵士银负责编写第1、2、3章，周坚负责编写第4章、各章节习题及参考答案。朱家生负责统稿，并审定了全稿。本教材的编写和出版，得到了宿迁学院教务处、文理学院和中国建材工业出版社的大力支持，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，书中不妥甚至谬误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

2015年7月

目　录

第 1 章　行列式 ………… 1

§1.1　预备知识 ………… 1

§1.2　n 阶行列式 ………… 3

§1.3　n 阶行列式的性质与计算 ………… 6

习题 1 ………… 18

第 1 章　总复习题 ………… 20

第 2 章　矩阵 ………… 22

§2.1　矩阵的概念 ………… 22

§2.2　矩阵的运算 ………… 25

§2.3　逆矩阵 ………… 32

§2.4　分块矩阵 ………… 37

§2.5　矩阵的初等变换 ………… 42

§2.6　矩阵的秩 ………… 52

习题 2 ………… 59

第 2 章　总复习题 ………… 63

第 3 章　线性方程组 ………… 66

§3.1　求解线性方程组 ………… 66

§3.2　n 维向量及其线性相关性 ………… 75

§3.3　向量组的秩 ………… 83

§3.4　线性方程组解的结构 ………… 88

§3.5　向量空间 ………… 94

习题 3 ………… 100

第 3 章　总复习题 ………… 103

第 4 章　相似矩阵及二次型 ………… 106

§4.1　向量的内积及正交性 ………… 106

§4.2　方阵的特征值与特征向量 ………… 111

§4.3　相似矩阵 ………… 118

§4.4 实对称矩阵的对角化 …… 123
§4.5 二次型及其标准形 …… 128
§4.6 化二次型为标准形 …… 133
§4.7 正定二次型 …… 139
习题 4 …… 141
第 4 章 总复习题 …… 143

习题参考答案 …… 147

参考文献 …… 158

第1章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，不仅在数学中有广泛的应用，在其他学科中也经常遇到.

本章首先介绍一些今后学习中常用的基本知识，接着介绍 n 阶行列式的理论：n 阶行列式的定义、性质和计算方法.

§1.1 预备知识

一、数域

当我们在处理一个与数有关的问题时，常常需要明确规定所考虑的数的范围. 例如，求方程 $x^2-2=0$ 的根. 若在实数范围内，这个方程有两个根：$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$. 但是在有理数范围内此方程却无根. 此外，经常在研究某些代数问题时，不但要考虑一些数，而且往往要对这些数作加减乘除四种运算. 因此所考虑的数集还必须满足条件：该数集中任两个数的和、差、积、商仍在这个集合内.

为此，我们引入数域的概念.

定义 1.1 设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 若 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个数域.

由定义不难看出：全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域，分别称为有理数域、实数域、复数域，分别记作 $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$. 但是全体整数 $\boldsymbol{Z}$ 不构成数域，因为任意两个整数的商不一定都是整数.

我们可以证明：任何数域都包含有理数域. 即有理数域是最小的数域.

二、全排列及其逆序数

定义 1.2 由数字 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

显然，n 级排列共有 $n!$ 个，其中唯一一个排列 $12\cdots n$ 是按照数字由小到大的顺序排列而成，称其为自然排列（或标准排列）.

定义 1.3 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若有较小的数 i_t 排在较大的数 i_s 后面，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序，一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 如果排列的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数（偶数），则称此排列为奇（偶）排列.

注 （1）显然，自然排列的逆序数为 0，它为偶排列.

(2) 对于一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$，其逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1\text{ 后比 }i_1\text{ 小的数的总数}+i_2\text{ 后比 }i_2\text{ 小的数的总数}+\cdots+i_{n-1}\text{后比 }i_{n-1}\text{小的数的总数},$$

$$\text{或者}=i_2\text{ 前面比 }i_2\text{ 大的数的总数}+\cdots+i_{n-1}\text{前面比 }i_{n-1}\text{大的数的总数}+i_n\text{ 前面比 }i_n\text{ 大的数的总数}.$$

例 1.1 求排列的逆序数.

(1)32154；(2)$n(n-1)\cdots 321$.

解 (1) 在排列 32154 中，3 的逆序数为 2；2 的逆序数为 1；1 的逆序数为 0；5 的逆序数为 1；于是排列的逆序数为 $\tau(32154)=2+1+0+1=4$.

$$(2)\ \tau[n(n-1)\cdots 321]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个**对换**，记作$(i_s,i_t)$.

如在排列 34125 中，将 4 与 2 对换，得到新的排列 32145. 并且我们看到：偶排列 34125 经过 4 与 2 的对换后，变成了奇排列 32145. 反之，也可以说奇排列 32145 经过 2 与 4 的对换后，变成了偶排列 34125.

一般地，有以下结论：

定理 1.1 任一 n 级排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

证明 首先讨论对换相邻两个数的情况.

设排列为 $a_1\cdots a_lcdb_1\cdots b_m$，对换 c 与 d，则排列变为 $a_1\cdots a_ldcb_1\cdots b_m$. 显然，$a_1$，$a_2$，…，$a_l$；$b_1$，$b_2$，…，$b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 c 与 d 两元素的逆序数改变为：当 $c<d$ 时，经对换后，c 的逆序数增加 1 而 d 的逆序数不变；当 $c>d$ 时，经对换后 c 的逆序数不变而 d 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_lcdb_1\cdots b_m$ 与排列$a_1\cdots a_ldcb_1\cdots b_m$ 的奇偶性不可能相同.

再讨论一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_l$，对它施行 m 次相邻对换，则原排列就变为 $a_1\cdots a_labb_1\cdots b_mc_1\cdots c_l$，再施行 $m+1$ 次相邻对换，原排列就变为 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_l$. 也就是说，经过 $2m+1$ 次相邻对换后，排列 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_l$ 变为排列 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_l$，所以这两个排列的奇偶性恰好相反. 证毕

定理 1.2 在所有的 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证明 设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列施以同一个对换，如都对换(1,2)，则由定理 1.1 知 p 个奇排列全部变为偶排列，由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理将全部的偶排列施以同一对换(1,2)，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $q=p$，即奇排列与偶排列的个数相等.

又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以 $q+p=n!$，$q=p=\frac{n!}{2}$. 证毕

定理 1.3 任一 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 级自然序排列 $12\cdots n$ 互变，且所作对换的次数与这个 n 级排列有相同的奇偶性.

证明 对排列的级数用数学归纳法证明.

对于 2 级排列，结论显然成立.

假设对 $n-1$ 级排列，结论成立. 现在证明对于 n 级排列，结论也成立.

对于任一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$，若 $i_n=n$，则根据归纳假设 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是 $n-1$ 级排列，可经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换就把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$. 若 $i_n\neq n$，则先施行 i_n 与 n 的对换，使之变成 $j_1j_2\cdots j_nn$，这就归结成上面的情形. 相仿地，$12\cdots n$ 也可经过一系列对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$，因此结论成立.

因为 $12\cdots n$ 是偶排列，由定理 1.1 可知，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列时，必须施行奇(偶)数次对换方能变成偶排列，所以，所施行对换的次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性. 证毕

§1.2　n 阶行列式

行列式起源于求解线性方程组，是研究线性代数的基本工具之一. 它在数学、工程技术、物理学等诸多领域都具有重要的应用. 本节主要介绍行列式的定义、性质及其计算.

本节要求重点掌握行列式的定义，会计算一些简单或特殊的行列式.

定义 2.1　由 n^2 个数 a_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的 n 行 n 列的符号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为一个 n 阶行列式. 其结果为：所有取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积的代数和. 各项的符号为：每一项中各元素按照行标排成自然序排列后，如果列标构成的排列为偶（奇）排列，则取正号（负号）. 即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{2.1}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是某个 n 级排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和（共有 $n!$ 项）.

注　(1) n 阶行列式中横着写的称为行，纵着写的称为列. 数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素，其中第一个下标表示其所在的行，第二个下标表示其所在的列. 从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线；另一个是从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线.

(2) 特别地

① 当 $n=1$ 时，一阶行列为 $|a_{11}|=a_{11}$. 注意该记号与绝对值符号的区别.

② 当 $n=2$ 时，二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

该结果也可简记为对角线法则：主对角线上元素乘积与副对角线上元素乘积之差.

③ 当 $n=3$ 时，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+ (-1)^{\tau(132)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(321)} a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这六项和也可用对角线法则来记忆，主对角线以及平行于主对角线上元素的乘积冠以正号，副对角线以及平行于副对角线上元素的乘积冠以负号.

(3) 三阶以上的行列式的计算不再遵循类似于二、三阶行列式的对角线法则.

为了熟练掌握 n 阶行列式的定义，我们来看下面几个典型问题.

例 2.1　在五阶行列式 $D_5=\det(a_{ij})$ 中，$a_{11}a_{32}a_{24}a_{53}a_{45}$ 这一项应取什么符号？

解　先把 $a_{11}a_{32}a_{24}a_{53}a_{45}$ 中各元素按照行标的自然顺序改写为 $a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}$，而此时列标的排列为 14253.

因　$\tau(14253)=3$，故这一项 $a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}$ 应取负号.

例 2.2　写出四阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})$ 中包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解　包含因子 $a_{11}a_{23}$ 项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(13j_3j_4)} a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

按定义，上述乘积中的每一项必须取自不同行不同列，故 j_3 可取 2 或 4，j_4 可取 4 或 2，因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

又
$$\tau(1324)=1, \tau(1342)=2.$$

所以结果中包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

例 2.3　利用行列式定义计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　四阶行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

D 中第 1 行的非零元素只有 a_{14}，因而 j_1 只能取 4，同理由 D 中第 2，3，4 行知，$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$，即行列式 D 中的非零项只有一项，即

$$D=(-1)^{\tau(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^{\tau(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24.$$

例 2.4　计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，其中 a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n).$$

分析　由于该行列式中元素为零的项比较多，所以由行列式的定义，只需要找出 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中任一个数都不为零的项.

解 由于当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$. 故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} 其下标必有 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，…，$p_n\leqslant n$.

在所有 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^0=1$，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

同理，可求得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上（下）三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积.

在 n 阶行列式中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素的行标排成自然序排列，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 事实上，数的乘法是满足交换律的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的. 一般地，n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{2.2}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列，它的符号由下面的定理来决定.

定理 2.1 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$ 的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{2.3}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

证明 若根据 n 阶行列式的定义来决定式（2.2）的符号，就要把这 n 个元素重新排一下，使得它们的行标变成自然排列，也就是排成

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}, \tag{2.4}$$

于是由行列式的定义，式（2.4）的符号是 $(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$.

现在来证明式（2.1）与式（2.3）是一致的. 我们知道从式（2.2）变到式（2.4）可经过一系列元素的对换来实现. 每作一次对换，元素的行标与列标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 就同时作一次对换，也就是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它的和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性不改变. 这就是说，对式（2.2）作一次元素的对换不改变式（2.3）的值，因此在一系列对换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')},$$

这就证明了式（2.1）与式（2.3）是一致的. 证毕

由定理 2.1，我们也可以把行列式的一般项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 改写为 $a_{l_11}a_{l_22}\cdots a_{l_nn}$（即元素的列标按照自然顺序 $123\cdots n$ 排列），而此时相应的行标的 n 级排列为 $l_1l_2\cdots l_n$，则行列式定义又可叙述为

定理 2.2 n 阶行列式 $D_n=\det(a_{ij})$ 也可定义为

$$D=\sum_{l_1 l_2\cdots l_n}(-1)^{\tau(l_1 l_2\cdots l_n)}a_{l_1 1}a_{l_2 2}\cdots a_{l_n n}.$$

证明 按行列式定义有

$$D=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

记

$$D_1=\sum_{l_1 l_2\cdots l_n}(-1)^{\tau(l_1 l_2\cdots l_n)}a_{l_1 1}a_{l_2 2}\cdots a_{l_n n}.$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^{\tau(q_1 q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^{\tau(l_1 l_2\cdots l_n)}a_{l_1 1}a_{l_2 2}\cdots a_{l_n n}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并且相等，从而 $D=D_1$. 证毕

§1.3 n 阶行列式的性质与计算

当行列式的元素为一般数时，直接根据定义计算 n 阶行列式的值可能是非常困难的，本节将介绍行列式的一些常用性质，以便用它们来简化行列式的计算.

本节要求重点掌握行列式的性质及展开定理，并能利用行列式相关性质来简化常见类型行列式的计算.

一、n 阶行列式的性质

定义 3.1 将行列式 D 的行列互换后得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

反之，行列式 D 也是行列式 D^{T} 的转置行列式，即行列式 D 与行列式 D^{T} 互为转置行列式.

性质 3.1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 行列式 D 中的元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在 D^{T} 中位于第 j 行第 i 列上，也就是说它的行标是 j，列标是 i. 因此，将行列式 D^{T} 中各项按列标排成自然排列来展开，得

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

上式正是行列式 D 中各项按行标排成自然排列的展开式. 所以 $D=D^{\mathrm{T}}$. 证毕

注 该性质表明，行列式中的行与列的地位是对等的. 即对于“行”成立的性质，对“列”也同样成立，反之亦然.

性质 3.2 互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号.

证明 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & q_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (p\text{ 行}) \\ \\ (q\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array},$$

将第 p 行与第 q 行($1\leqslant p<q\leqslant n$)互换后，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (p\text{ 行}) \\ \\ (q\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array},$$

显然，乘积 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$ 在行列式 D 和 D_1 中，都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，根据定理 2.1，对于行列式 D，这一项的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots p\cdots q\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)},$$

而对行列式 D_1，这一项的符号由

$$(-1)^{\tau(1\cdots q\cdots p\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$$

决定. 而排列 $1\cdots p\cdots q\cdots n$ 与排列 $1\cdots q\cdots p\cdots n$ 的奇偶性恰好相反，所以

$$(-1)^{\tau(1\cdots p\cdots q\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(1\cdots q\cdots p\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$$

即 D_1 中的每一项都是 D 中的对应项的相反数，所以 $D=-D_1$. 证毕

注 若以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 则常用记号 $r_i\leftrightarrow r_j$（或 $c_i\leftrightarrow c_j$）表示行列式中交换第 i，j 两行（或两列）对应的元素.

推论 3.1 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 把完全相同的两行（列）互换，有 $D=-D$，故 $D=0$. 证毕

性质 3.3 用数 k 乘此行列式，等于用数 k 乘行列式的某一行（列）的所有元素. 即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$