苏 淳 汇编

数学奥林匹克

苏联数学奥林匹克试题汇编

1988—1991

大学出版社

数学奥林匹克

苏联数学奥林匹克试题汇编

(1988—1991)

苏 淳 汇编

北京大学出版社

新登字(京)159号

数 学 奥 林 匹 克

苏联数学奥林匹克试题汇编

(1988—1991)

苏 淳 汇编

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 9.125印张 200千字

1992年6月第一版 1992年6月第一次印刷

印数：00001—21,000册

ISBN 7-301-01929-7/G·123

定价：4.00元

汇编者的话

苏联①是国际上公认的数学大国，也是数学奥林匹克方面的强手。在国际数学奥林匹克(IMO)中，是多次团体总分第一的得主，也是我国的最主要的角逐对手之一。因此，研究苏联的数学奥林匹克试题具有重要的意义。

在苏联的国内数学竞赛中，全苏联数学奥林匹克是规格最高的竞赛，自1967年以来，每年举办一次，至今共举办了25届。在次一级的竞赛中，莫斯科和列宁格勒两市的数学奥林匹克是最富有特色的，它们分别由莫斯科大学和列宁格勒大学主办，每年都独立命题。与它们相当的数学竞赛，则是15个加盟共和国各自的数学奥林匹克。这类竞赛是受到苏联教委中学生竞赛指导中心指导的，其中的主要试题大多选自苏联教委指导中心的推荐试题。以1991年3月举办的第17届全俄罗斯数学奥林匹克的试题为例，在九年级和十年级的各自8道试题中，均有不少于5道试题选自苏联教委的推荐试题，而在十一年级的8道试题中则有7道选自推荐试题。尽管其中对各个年级的试题安排方面不完全遵从教委的意见，但入选试题比例之高是引人注目的。鉴于这一理由，我们在这本试题汇编中没有收录其它加盟共和国的数学奥林匹克试题，而仅仅收录了全俄数学奥林匹克的试题。

在全苏联数学奥林匹克之后，还有为选拔出征IMO选手

---

① 苏联已于1991年12月27日正式宣布解体，各加盟共和国分别成为主权国家，为保持本资料的历史原貌，本书仍称苏联和全苏联，请读者注意此点。

而举办的全苏联数学冬令营，和为培训这些选手而举办的数学夏令营。每年的数学冬令营都在元月举办，为时一周；数学夏令营则在6月初至7月初举办，为时一个月。1991年的数学冬令营和夏令营是分别在莫斯科大学附属数学物理学校和莫斯科大学数学力学系举办的。

1990年10月底至1991年6月上旬，笔者曾在莫斯科大学访问了七个多月，其间亦受中国数学会数学奥林匹克委员会的委托，同苏联从事数学竞赛工作的人士进行了广泛的接触，曾应邀参观了1991年全苏联数学冬令营和第25届全苏联数学奥林匹克，并观摩了第54届莫斯科数学奥林匹克。在这个过程中，笔者收集到了大量的数学竞赛资料，其中包括很少公诸于世的列宁格勒数学奥林匹克资料。这本试题汇编便主要是根据这些资料整理和翻译出来的。

当前，苏联正经历着空前的政治大变化。这本试题汇编的编译出版，可以说是对苏联数学奥林匹克活动史上的一个历史阶段的纪念。应当说，目前还很难对苏联今后的数学奥林匹克活动的发展作出预测。但是现在出版这本试题汇编，确实是具有阶段性的意义的。应当提到的是，尽管列宁格勒市已经宣布恢复旧名改称圣彼得堡市，但由于直到1991年3月为止的市数学奥林匹克都是以列宁格勒市的名义举办的，所以在这本试题汇编中仍然保留了列宁格勒的名称。

笔者在苏联期间的工作曾得到我国驻苏联大使馆教育处蒋妙瑞参赞以及杨贵仁、杨恕、汪立生等同志的大力支持和帮助；在整理、翻译和出版这本汇编的过程中，曾得到北京大学出版社以及单墫、胡大同、严镇军、余红兵、张君达等同志的支持和帮助，笔者愿借此机会，向他们表示诚挚的谢意。同时，笔者还要向自己的爱人万希仁同志表示感谢，如

果没有她的一贯理解、支持和关心，这本试题汇编是不可能如此快地同读者见面的。

苏　淳

一九九一年十月一日

于中国科技大学数学系

目　录

第一部分 第22—25届全苏联数学奥林匹克

（1988—1991年）

全苏联数学奥林匹克于每年的四月份举办，自1967年以来，未间断地举办了25届。除了为选拔和培训出征国际数学奥林匹克(IMO)的选手而举办的数学冬令营和夏令营外，这是全苏范围内层次最高的数学竞赛活动。这种竞赛的试题是分年级命题的，而且只在中学的最高三个年级举行。1989年以前，在八、九、十年级进行；自1990年起，由于学制延长了一年，改为在九、十和十一年级进行。鉴于第1—21届试题国内已有中译本，所以我们这里仅收录了第22—25届的试题(附解答)。

每届全苏联数学奥林匹克一般举行七天左右，其中有两天为考试时间，其余五天则安排各种参观，座谈和交流活动。这是苏联数学奥林匹克界的盛会，轮流在苏联的各地举办，同行们利用这一机会聚会，交流经验和商讨今后的工作。最为有趣的，是其间还有半天的“师生数学擂台赛”．教师为攻方，任务是不停地向学生发问，提出各种数学问题，其中有命题组和阅卷组的成员，以及各代表队的领队。参赛的学生为守方，任务是又快又正确地回答问题。擂台赛往往进行得紧张而热烈。

从第14届全苏联数学奥林匹克起，都有两天为考试，每天考5小时，各解答4道题。本部分中，各个年级的前四题都是第一天的试题，后四题都是第二天的试题。

第22届全苏联数学奥林匹克

（1988年，巴库）

八 年 级

1．一本故事书共载有30个故事，它们的篇幅分别为1，2，…，30面．自书的第 1 面起就刊载故事，后续的每一个故事都另起一面．试问，最多可能有多少个故事是从奇数编号的面起头的？

2．设$ABCD$为凸四边形．我们来考察两个新的凸四边形F_1和F_2，它们各有一组相对顶点是$ABCD$的对角线的中点，而另一对相对顶点则分别是$ABCD$两组对边的中点．现知四边形F_1和F_2的面积相等，证明，四边形$ABCD$的一条对角线平分其面积．

3．证明，方程

$$x-y+z=1$$

具有无穷多组满足如下条件的正整数解：其中x,y,z两两不同，而且它们中任何两者的乘积都可被第三者整除．

4．在第一行中写有19个不超过88的自然数，在第二行中写有88个不超过19的自然数．我们将一行中的一个或数个相连的数称为一段．证明，可以从上述两行数中各选出一段来，使得这两段数的和相等．

5．证明，内接于定圆的所有腰长为a的等腰梯形的高与中位线的长度之比为定值．

6．黑板上写着数 1 和 2 ．允许按照如下法则增写新数：即如果黑板上已写有数a和b，则可写上$ab+a+b$．试

问，能否按照这样的法则得到如下二数：

(a) 13121；　　(b) 12131。

7．设有理数x,y满足方程

$$x^5+y^5=2x^2y^2,$$

证明，$1-xy$是有理数的平方。

8．某国共有21个城市，由若干个航空公司担负它们之间的空运业务。每一个航空公司都在5个城市之间设有直通航线(无需着落，且在两个城市之间可以有数个航空公司的航线)，而每两个城市之间都至少有一条直通航线。试问，至少应有多少个航空公司？

九 年 级

9．求方程的整数解

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}.$$

10．设α,β,γ是任意一个三角形的3个内角，证明

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$$

11．学校每天安排一名9(A)班学生和一名9(B)班学生同时值日，但每天仅更换其中的一名学生。两班学生都按自己班内排好的顺序表依次参加值日，且当每人都轮过一遍之

后，又从表中的第一人轮起。现知9(A)班有29名学生，9(B)班有32名学生。试问，能否形成这样一种局面，即在某一段时间中，9(A)班的每一名学生都恰好同9(B)班的每一名学生同时值日过一天，而后又恰好轮到第一对学生同时值日？

12. $\triangle ABC$的$\angle C$为钝角，在BC边上取定一内点D。设$\triangle ABC$的外接圆为S，又点M是BC边上不与点D重合的又一内点。作直线AM，设其与圆周S相交于点N。过点M，D和N作一圆周，设其同S除了点N外还有一个交点P。现欲使线段MP的长度达到最小，试确定点M的位置。

13. 设数列的通项公式为

$$a_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n,$$

证明，数列中有无穷多项为奇数。

14. 设$\triangle ABC$为锐角三角形，作出其外接圆，再分别过A,B,C三点作外接圆的切线。现知过点A和点C的切线分别与过点B的切线相交于点M和N。再作出$\triangle ABC$中的高线BP(P点位于边AC上)。证明，直线BP是$\angle MPN$的平分线。

15. 设a与d为非负数，b与c为正数，且有$b+c\geqslant a+d$，试求下式的最小值：

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}.$$

16. $n\times n$方格表的每一小方格内都填有一个实数，且每一行、每一列所填之数的和都等于零。允许在表中进行如下的操作：任取一行数，将其逐个加到某一列数上去（即将该行的第一个数加到该列的第一个数上，将第二个数加到第二个数上，如此等等。对行中的数自左至右编号，对列中的数自上至下编号），并且从另一列数中逐个减去该行中的数。

证明，可以经过有限次这种操作，将表中的数全都变为零。

十 年 级

17．在锐角三角形ABC中引出高线BD和CE，并由顶点B和C分别向直线ED引垂线BF和CG。证明$EF=DG$。

18．设x,y,z为正数，并且

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

试求如下表达式的最小值：

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

19．今有一条折线，它的所有顶点全都位于某个棱长为2的正方体的表面上，它的每一段的长度都是3，它的两个端点刚好是正方体的两个距离最远的顶点。试问，该折线最少有多少段？

20．设n,m,k都是自然数，且$m\geqslant n$。证明，如果

$$1+2+\cdots+n=mk,$$

则可将数$1,2,\cdots,n$分成k个组，使得每一组数的和都等于m。

21．一条非封闭的折线内接于一条抛物线，折线共有有限段，它的起点位于抛物线的顶点上，它的任何相邻（即具有公共顶点）的两段都同抛物线的过它们公共顶点的切线交成相等的角。证明，该折线位于抛物线的对称轴的一侧。

22．当n至少为多大时，如下的方程组有解：

$$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=0,$$
$$\sin x_1+2\sin x_2+\cdots+n\sin x_n=0.$$

23．数列$\{a_n\}$由如下关系式所定义：

$$a_0=0,\ a_n=P(a_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $P(x)$ 为某正整数系数的多项式。证明，对于任何两个具有最大公约数 d 的自然数 m 和 k，数 a_m 和 a_k 的最大公约数都是 a_d。

24. 证明，对于任何四面体，都有如下的不等式成立：

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

其中 a 和 b 是四面体的一组相对棱的长度，r 是四面体内切球的半径。

第23届全苏联数学奥林匹克

（1989年，里加）

八 年 级

1. 星期天时，七个男孩都各去过同一个冰淇淋售货亭3次，而且其中每两人都曾在售货亭附近相遇。证明，一定有某个时刻，至少有三个男孩同时在售货亭附近相遇。

2. 今有77块尺寸为3×3×1的长方块。试问，能否将它们装进一个尺寸为7×9×11的长方体形状的带盖的盒子？

3. 设△ABC 的内切圆与 AB 边相切于点 M，而 T 是 BC 边上的任意一个内点。证明，△BMT，△MTA 和△ATC 的内切圆与同一条直线相切。

4. 自然数 N 恰有 12 个正约数(包括1和 N)，将它们依大小记为 $d_1<d_2<\cdots<d_{12}$。现知脚标为 d_4-1 的正约数等于乘积 $(d_1+d_2+d_4)d_8$。试求数 N。

5. 在国际象棋棋盘上放着 8 枚棋子，每一横行与每一

纵列中都恰有1枚。证明，在棋盘上的黑色方格里共放有偶数枚棋子(译者注：国际象棋棋盘是一个8×8的方格表，这些方格相间地涂为白色和黑色，棋子放在方格之中，每格至多1枚)。

6. 在$\triangle ABC$的边AB,BC和CA上分别用绿色标出点C_1,A_1和B_1，它们都不是这些边的端点。现知有$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}$及$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$。证明，以绿点为顶点的三角形同$\triangle ABC$相似。

7. 小树林里共有$n\geqslant 3$个椋鸟集，它们之间的距离互不相等，每一个椋鸟集里都住有一只椋鸟。有某一时刻，一些椋鸟放弃了原住所而迁入别的椋鸟集，不过在这种迁移之后，每一集中仍然恰好都住有一只椋鸟。但在这个过程中，如果一对椋鸟的原住处间的距离较之另一对的为小(同一只椋鸟可以在不同的对中出现)，那么这一对在迁移后的距离就变得比另一对新住处间的距离大。试问，对怎样的n，才有这种可能性？

8. 考虑由数字1,2,3,4,5所组成的所有没有重复数字的五位数。证明，可以把这些五位数分为两组，使得两组数的平方和相等。

九年级

9. 今有2000块硬币，其中有两块伪币，一块轻于真币，另一块重于真币。现有一架没有砝码的天平，试问，怎样利用这架天平称4次，以确定出：究竟是两块伪币的重量之和重，还是两块真币的重量之和重，还是两者一样重？

10. 设 a,b,c 是三角形的三边之长，且有 $a+b+c=1$，证明

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}.$$

11. 在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 上分别取点 K 和 M，设线段 AM 与 KD 相交于点 L，线段 KC 与 BM 相交于点 N。

(a) 证明，如果 K 和 M 分别是边 AB 和 CD 的中点，则有

$$S_{KLMN}<\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

(b) 证明，如果 $AK:KB=CM:MD=m:n$，则有

$$S_{KLMN}<\frac{mn}{m^2+mn+n^2}S_{ABCD}.$$

12. 用尺寸分别为 1×1，2×2 和 3×3 的小正方形拼成一个 23×23 的大正方形。如果要求尽可能少地使用 1×1 的单位正方形，那么最少可以只使用这种单位正方形多少块(译者注：拼接时，既不能重迭又不能有缝隙)？

13. 试问，是否存在实数 a 和 b，使得：

(a) 数 $a+b$ 为有理数，而对任何自然数 $n\geqslant2$，数 a^n+b^n 都是无理数？

(b) 数 $a+b$ 为无理数，而对任何自然数 $n\geqslant2$，数 a^n+b^n 都是有理数？

14. 在尺寸为1米×1米的正方形天花板上有一只蜘蛛和一只苍蝇．蜘蛛在1秒钟之内，可以移动到连接它和天花板的角的4条线段中的任何一条的中点处，苍蝇不动。证明，在8秒钟之内，蜘蛛可以进逼到距苍蝇不足1厘米的距离之

上。

15. 梯形 $ABCD$ 的两腰 AB 和 CD 相等，$\triangle A'B'C$ 由 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转某个角度后得到。证明，线段 $A'D$, BC 和 $B'C$ 位于同一条直线之上。

16. 设有一张无限大的方格纸，纸上小方格的边长为1. 证明，对任何自然数 n，都存在以方格线为边的多边形（不一定为凸多边形），使得恰好有 n 种不同的方法将其划分为一些尺寸为 2×1 的小矩形。

十 年 级

17. 当自然数 n 最小为多大时，方程

$$\left[\frac{10^n}{x}\right]=1989$$

具有整数解？此处 $[a]$ 表示实数 a 的整数部分，即不超过 a 的最大整数。

18. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 和 AC 上分别取点 D, E 和 F，使得 $DE=BE$, $FE=CE$。证明，$\triangle ADF$ 的外接圆的圆心位于 $\angle DEF$ 的平分线上。

19. 有两个给定的相交球面，在其中一个球面上取点 A 和 B，在另一个球面上取点 C 和 D。今知，线段 AC 经过两球面的一个公共点，线段 BD 经过两球面的另一个公共点，且 BD 与两球心的连线平行。证明，线段 AB 与 CD 在直线 AC 上投影的长度相等。

20. 两位登山者分别处于山脊两侧的 A 点和 B 点处，两处具有相同的(海拔)高度。连结这两点的翻山小路是一条折线，它的所有顶点的高度均高于端点 A 和 B。试问，在两位登山者沿着翻山小路向对方现在所在的位置走去时，能否在