高等学校教学用书

南通大学理学院数学系　编

线性代数

练习册

第二版

化学工业出版社

高等学校教学用书

线性代数练习册

第二版

南通大学理学院数学系　编

化学工业出版社
·北京·

线性代数是理工、经济管理及医学各专业都必须开设的公共基础课程，是全国研究生入学考试必考的课程之一。

线性代数练习册（第二版）与同济大学编写的《线性代数》（第六版）教材相配套。每章配有内容小结、常用方法小结、练习题、自测题及参考答案。最后配有8套模拟试题和参考答案，其中1～6套是为学生总复习时练习使用；7套、8套有一定难度，为学有余力希望进一步提高的学生提供，也可以作为考研复习时练习使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数练习册/南通大学理学院数学系编．—2版．—北京：化学工业出版社，2015.9
高等学校教学用书
ISBN 978-7-122-24665-3

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①南…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-习题集　Ⅳ．①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第165774号

责任编辑：唐旭华
责任校对：边　涛　　　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京永鑫印刷有限公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 $7\frac{3}{4}$　字数194千字　2015年9月北京第2版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：18.00元

前　　言

线性代数是高等学校理工、经济、管理等学科的相关专业必修的一门公共基础课程，也是全国硕士研究生入学考试科目“高等数学”中的必考课程．线性代数的理论与方法被广泛应用于科学技术的各个领域，因而它在代数分支中占据重要的基础地位．在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数为其理论和算法基础的一部分．在实际问题中，研究多个变量之间的关系大多数情况下可以线性化，而由于计算机的发展，线性化了的问题又可以计算出来．线性代数正是解决这些问题的有力工具．

线性代数概念多、抽象，而且逻辑性很强，为了学生能够更好地理解线性代数的概念，掌握线性代数的思想方法，我们编写了《线性代数练习册》．本书第一版根据同济大学编写的《线性代数》教材章节内容对各部分知识和方法作了小结，并配备相应的习题，每章都配备自测题，最后提供 8 套模拟试题．

《线性代数练习册》是南通大学理学院数学系所有教授线性代数课程的教师共同提供素材编写而成的，并得到学院和学校的大力支持．经过五年的使用，本书对学生学习和掌握线性代数知识以及考研都帮助很大．

本次再版主要做了以下修订：

（1）为了与同济大学编写的《线性代数》（第六版）教材配套，对部分章节内容顺序进行了调整；

（2）为了更好地适应教学需要，对部分内容进行了完善；

（3）增加和修改了部分习题．

《线性代数练习册》为学生提供了大量练习题，能够帮助学生更好地学习线性代数知识，同时也为上课教师提供习题课和试题素材．

由于水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请批评指正．

编者

2015 年 6 月

目　录

第一章 行 列 式

二、三阶行列式及 n 阶行列式的定义部分知识概要

一、内容提要

1. 二阶行列式的定义：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

2. 三阶行列式的定义：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

（1）n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；（2）每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（$p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列）；（3）当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 带正号，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 带负号.

二、常用解题方法及注意事项

1. 求排列的逆序数：（按自然数的从小到大次序为标准次序）

$1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$. 其中 $m_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是 i 前面比 i 大的数的个数.

2. 确定行列式 $D_n = |a_{ij}|_n$ 中的项及符号：

（1）$D_n = |a_{ij}|_n$ 中的项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是取自不同行不同列的 n 个数的乘积，因此，行下标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都没有重复数字；（2）将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的因子交换顺序使行下标是自然顺序，即 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，该项符号为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$.

二、三阶行列式及 n 阶行列式的定义部分习题

1. 计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

3. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1) 3214；　　　　(2) 614235.

4. 确定 i,j，使 6 元排列 $2i316j$ 为奇排列.

5. 写出 4 阶行列式中含有 $a_{13}a_{21}$ 的项.

6. 按定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

7. 求 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 和 x^3 的系数.

行列式的性质与展开部分知识概要

一、内容提要

（一）行列式的性质

1. 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等（即 $D^{\mathrm{T}}=D$）.

2. 交换行列式的两行（或列），行列式改变符号（即 $D\xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j}-D$ 或 $D\xlongequal{c_i\leftrightarrow c_j}-D$）.

3. 行列式中某行（或列）的公因子可以提到行列式符号外面做因子

（即 $D\xlongequal{r_i\times\frac{1}{k}(k\neq 0)}kD_1$ 或 $D\xlongequal{c_i\times\frac{1}{k}(k\neq 0)}kD_1$）.

4. n 阶行列式 D 可以按第 i 行（或列）拆成两个行列式 D_1 与 D_2 的和，即 $D=D_1+D_2$. 其中 D 的第 i 行（或列）为 D_1 与 D_2 的第 i 行（或列）的和；D,D_1,D_2 的其余各行（或列）对应元素则同的完全一样.

5. 把行列式某一行（或列）的元素同乘一数后加到另一行（或列）的对应位置元素上，行列式的值不变$\left(\text{即 } D\xlongequal{r_i+kr_j}D_1 \text{ 或 } D\xlongequal{c_i+kc_j}D_1\right)$.

（二）行列式的展开 $D=|a_{ij}|_n$

1. n 阶行列式 D 的某行（或列）元素与对应元素的代数余子式乘积之和为 D.

2. 行列式的某行（或列）元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式乘积之和为 0，

即
$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases};$$
$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D, & j=t\\ 0, & j\neq t\end{cases}.$$

3. $a_1A_{i1}+a_2A_{i2}+\cdots+a_nA_{in}=d_1$，其中 d_1 是用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 换 $D=|a_{ij}|_n$ 的第 i 行元素得到的行列式；

$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=d_2$，其中 d_2 是用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 换 $D=|a_{ij}|_n$ 的第 j 列元素得到的行列式 .

二、常用的解题方法及注意事项

1. 行列式的计算：

（1）利用性质将行列式化为三角形行列式（三角形行列式的值等于对角线元素之积）；

（2）利用依行、依列展开转化为低阶行列式的计算（或给出递推公式、或利用数学归纳法）；

（3）化简与展开同时进行（先化简，再按零较多的行（或列）展开）.

2. 行列式化简时注意：

（1）尽量避免分数运算；（2）展开时注意代数余子式与余子式相差的符号$(-1)^{i+j}$.

行列式的性质与展开部分习题

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2008 & 1986 & 1964 \\ 2009 & 1987 & 1965 \\ 2010 & 1988 & 1966 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix}$；

(3) $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$；

(4) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $D=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

(6) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 证明：

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}=0$；

（2）$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

（3）$D_n=\begin{vmatrix} 2a & a^2 & & \\ 1 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & 1 & 2a \end{vmatrix}$.

3. 计算 n 阶行列式：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2+a_2 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

4. 利用范德蒙德行列式计算：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

5. $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+2A_{44}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式．

第一章自测题与参考答案

第一章自测题

一、判断题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. (　　)

2. 在四阶行列式 $D_4 = |a_{ij}|$ 中，a_{23} 的余子式 M_{23} 与代数余子式 A_{23} 互为相反数 . (　　)

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = -1$，则 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = 0$. (　　)

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{vmatrix} = 1$. (　　)

5. $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{2r_2+r_1}{=\!=\!=} \dfrac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 7 & 18 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. (　　)

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -1$，则 $\begin{vmatrix} a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 4a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ __________.

2. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，则 $a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$ _____,

$a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$ __________.

3. 由行列式确定的多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 4x & 3x & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4, x^3 的系数分别为________.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ________.

三、计算下列行列式（各 10 分，共 50 分）：

1. $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

2. $\begin{vmatrix} (a-1)^2 & a^2 & (a+1)^2 & 1 \\ (b-1)^2 & b^2 & (b+1)^2 & 1 \\ (c-1)^2 & c^2 & (c+1)^2 & 1 \\ (d-1)^2 & d^2 & (d+1)^2 & 1 \end{vmatrix}$；

3. $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$；

4. $D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda \end{vmatrix}$；

5. $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

四、（10 分）设 $D=|a_{ij}|_n$ 为 n 阶行列式，$B=|-a_{ij}|_n$，$G=|ka_{ij}|_n$（k 为非零数）.

（1）讨论 B,D 的关系； （2）讨论 G,D 的关系.

五、（9 分）$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，求 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$.

第一章自测题参考答案

一、1. 错.　2. 对.　3. 错.　4. 错.　5. 对.

二、1. 4.　2. 0，-2.　3. 8，-6.　4. -18.

三、1. 23；2. 0；

3. $D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2(n-1)}=(a^2-b^2)^n$；

4. 各列加到第一列上，然后提取公因式

$$D_n=(\lambda+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+\lambda & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_n-a_nc_1]{c_2-a_2c_1,\ \cdots}\lambda^{n-1}(\lambda+a_1+a_2+\cdots+a_n);$$

5. $n+1$.

四、(1) $B=|-a_{ij}|_n=(-1)^n|a_{ij}|_n=(-1)^nD$；(2) $G=|ka_{ij}|_n=k^n|a_{ij}|_n=k^nD$.

五、$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-7$.