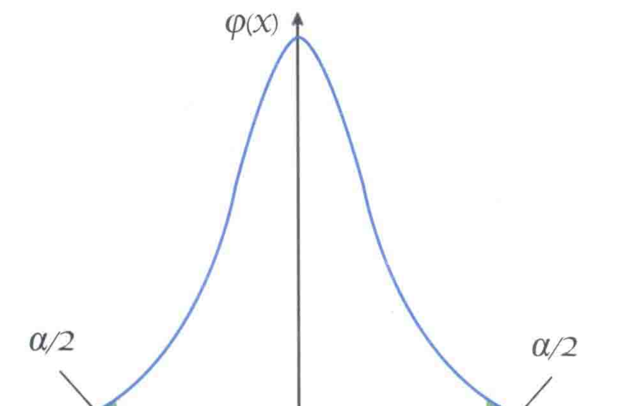
全国高等农林院校“十二五”规划教材

应用数理统计

黄龙生◎主编



中国农业出版社

全国高等农林院校"十二五"规划教材

应用数理统计

黄龙生　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用数理统计 / 黄龙生主编．—北京：中国农业出版社，2015.5
全国高等农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-20307-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 059139 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑 魏明龙
文字编辑 魏明龙

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：12
字数：280 千字
定价：25.00 元

内容简介

本教材主要内容包括概率论概要、数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。每章后面编排了较多的选择题和填空题，适量的应用计算题，且在数理统计部分每章最后配了一个案例分析。

本教材可作为普通高等学校本科非数学类应用型专业的概率论与数理统计课程的教材或参考书，也可用作专科或高职院校相关专业的概率论与数理统计课程的教材或参考书，同时也可作为工程技术人员和科技工作者的参考书。

编写人员名单

主　编　黄龙生

参　编　黄　敏　宋红凤

　　　　许芳忠　夏慧珠

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律性的一门学科，在各行各业中有大量的实际应用。在高校本科教学已出版的《概率论与数理统计》教材中，概率论部分占有很大的比重，高校中很多应用型专业，对概率论的要求不高，而对数理统计的要求较高，为了适应这种需要，我们编写了这本《应用数理统计》教材。与现已出版的《概率论与数理统计》教材相比较，本教材压缩了概率论部分的内容，此部分以在数理统计部分够用为原则，以求随机事件的概率及随机变量的数字特征为主线编排内容，在数理统计部分，以扩展内容的形式，增加了部分实用的统计工具与方法方面的介绍。本教材可作为高校非数学类专业的教材或参考书，也可供相关科技工作者参考。

全教材力求突出概率论与数理统计的基本思想和方法。本书用“引例(日常生产生活中的问题)”的方式导入新的概念、思想和方法，力求通俗易懂；对专业术语给出了相应的英语译文，为学生阅读外文资料提供便利；在例题和习题的选取上注重应用性和趣味性，以提高学生分析解决实际问题的能力。在教材的编写中，主要概念以定义的形式给出，主要结论以定理的形式给出，帮助学生抓住重点。每章的习题中编排了较多的选择题和填空题，适量的应用计算题，希望学生通过做这些选择题和填空题，加深对概率论与数理统计的基本概念的理解，掌握概率论与数理统计的基本方法和基本技能，提高学生的动手能力。在数理统计部分，扩展内容用“*”标注，可供学生自学或选学，相应的习题也用“*”标注。数理统计部分每章最后配了一个案例分析，供学生阅读，每个案例以一篇小论文的形式呈现，借以帮助学生提高分析解决实际问题的能力。

本教材第1章和第2章由黄龙生编写，第3章由黄敏编写，第4章由宋红凤编写，第5章由许芳忠编写，第6章由夏慧珠编写，全书由黄龙生统稿。

本教材在编写过程中，参考了大量的文献，在此向这些文献的编著者和出版社表示感谢和敬意。由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2014年10月

目　录

前言

第1章　概率论概要 …… 1

§1　随机试验与随机事件 …… 1

§1.1　随机现象与随机试验 …… 1

§1.2　样本空间与随机事件 …… 2

§1.3　随机事件间的关系与运算 …… 3

§1.3.1　包含关系 …… 3

§1.3.2　相等关系 …… 3

§1.3.3　互不相容(互斥)事件 …… 3

§1.3.4　事件的并(和) …… 3

§1.3.5　事件的交(积) …… 4

§1.3.6　差事件 …… 4

§1.3.7　对立事件 …… 4

§1.3.8　事件的运算律 …… 5

§2　随机事件的概率 …… 5

§2.1　概率的统计定义 …… 5

§2.2　概率的公理化定义 …… 5

§2.3　概率的性质 …… 6

§2.4　随机事件的独立性 …… 7

§3　随机变量及其分布 …… 8

§3.1　随机变量的概念 …… 8

§3.2　分布函数 …… 8

§3.3　离散型随机变量的概率分布 …… 9

§3.4　连续型随机变量及其分布 …… 10

§4　多维随机变量及其分布 …… 11

§4.1　多维随机变量的概念 …… 11

§4.2　二维离散型随机变量 …… 12

§4.3　二维连续型随机变量 …… 13

§4.4　随机变量的独立性 …… 14

§5　随机变量的数字特征 …… 16

§5.1　随机变量的数学期望 …… 16

§5.2　随机变量的方差 …… 18
§5.3　协方差与相关系数 …… 18
§6　常用随机变量的分布 …… 21
§6.1　两点分布与二项分布 …… 21
§6.2　泊松(Poisson)分布 …… 21
§6.3　均匀分布 …… 22
§6.4　指数分布 …… 22
§6.5　正态分布 …… 22
§7　大数定律与中心极限定理 …… 24
§7.1　大数定律 …… 24
§7.2　中心极限定理 …… 25
习题一 …… 26

第2章　数理统计基础 …… 31

§1　数理统计的基本概念 …… 31
§1.1　总体与个体 …… 31
§1.2　样本 …… 32
§1.3　统计量与常用统计量 …… 34
§2　数理统计中常用的三大分布 …… 36
§2.1　χ^2 分布 …… 36
§2.2　t 分布 …… 38
§2.3　F 分布 …… 39
§3　抽样分布 …… 39
§3.1　正态总体下的抽样分布 …… 39
§3.2　两个正态总体下的抽样分布 …… 41
*§4　数据整理 …… 43
§4.1　频率分布表与直方图 …… 43
§4.2　茎叶图 …… 45
§4.3　条形图 …… 46
§4.4　五数概括与箱线图 …… 46
习题二 …… 49
描述统计案例 …… 52

第3章　参数估计 …… 57

§1　参数估计的概念 …… 57
§1.1　点估计的概念 …… 57
§1.2　区间估计的概念 …… 57
§1.3　单侧置信区间 …… 58
§2　参数的点估计法 …… 59

§2.1 矩估计法 …… 59
§2.2 最大似然估计法 …… 61
§3 点估计优劣的评价标准 …… 65
§3.1 无偏性 …… 65
§3.2 有效性 …… 67
§3.3 一致性 …… 67
§4 正态总体参数的置信区间 …… 68
§4.1 总体方差已知情况下均值的置信区间 …… 69
§4.2 总体方差未知情况下均值的置信区间 …… 69
§4.3 正态总体方差与标准差的置信区间 …… 71
§5 两个正态总体参数的置信区间 …… 72
§5.1 两个正态总体均值差的置信区间 …… 73
§5.2 两个正态总体方差比的置信区间 …… 73
习题三 …… 75
参数估计案例 …… 78
第4章 假设检验 …… 81
§1 假设检验的基本概念 …… 81
§1.1 假设检验的概念 …… 81
§1.2 两类错误 …… 83
§1.3 假设检验的基本步骤 …… 84
§1.4 假设检验的三种基本形式 …… 85
§2 假设检验问题的 P-值 …… 86
§3 正态总体参数的假设检验 …… 88
§3.1 方差已知时均值的 Z 检验 …… 89
§3.2 方差未知时均值的 t 检验 …… 89
§3.3 正态总体均值检验问题小结 …… 91
§3.4 均值未知时方差的 χ^2 检验 …… 91
§3.5 均值已知时方差的 χ^2 检验 …… 92
§3.6 正态总体方差检验问题小结 …… 93
§4 两个正态总体参数的假设检验 …… 93
§4.1 方差已知时均值的 Z 检验 …… 93
§4.2 方差未知但相等时均值的 t 检验 …… 94
*§4.3 配对样本的 t 检验 …… 95
*§4.4 方差未知且不等时的 t 检验 …… 96
§4.5 两个正态总体均值的假设检验问题小结 …… 97
§4.6 两个正态总体方差的 F 检验 …… 98
§4.7 两个正态总体方差的假设检验问题小结 …… 99
*§5 正态性检验 …… 99

§5.1 正态概率纸 …… 99
§5.2 构造正态概率纸的原理 …… 99
§5.3 正态概率纸检验法 …… 100
§5.4 正态概率纸参数估计法 …… 101
*§6 独立性的列联表检验 …… 103
*§7 大样本检验 …… 106
习题四 …… 107
假设检验案例 …… 113

第5章 方差分析 …… 117

§1 单因素方差分析 …… 117
§1.1 基本假定条件 …… 117
§1.2 统计假设 …… 118
§1.3 平方和分解 …… 118
§1.4 方差分析 …… 119
§2 无交互作用的双因素方差分析 …… 123
§2.1 无交互作用的双因素方差分析模型 …… 123
§2.2 平方和分解 …… 124
§2.3 方差分析 …… 125
§3 有交互作用的双因素方差分析 …… 128
习题五 …… 132
方差分析案例 …… 137

第6章 回归分析 …… 141

§1 一元线性回归方程 …… 141
§1.1 相关分析与回归分析 …… 141
§1.2 总体回归函数 …… 142
§1.3 样本回归函数 …… 144
§1.4 回归系数的最小二乘估计 …… 145
§2 一元线性回归方程的显著性检验 …… 147
§2.1 平方和分解 …… 147
§2.2 F 检验 …… 148
§2.3 t 检验 …… 150
§2.4 相关系数检验 …… 150
§3 估计与预测 …… 152
§3.1 均值 $E(Y_0)$ 的点估计 …… 152
§3.2 均值 $E(Y_0)$ 的区间估计 …… 152
§3.3 随机变量 Y_0 的预测区间 …… 153
§4 可线性化的一元非线性回归 …… 155

§4.1　模型的确定 …… 155
§4.2　系数的估计 …… 157
习题六 …… 159
回归分析案例 …… 162

附表 1　标准正态分布函数表 …… 169
附表 2　t 分布表 …… 170
附表 3　χ^2 分布表 …… 171
附表 4　F 分布表 …… 173
附表 5　相关系数检验表 …… 178

参考文献 …… 179

第1章 概率论概要

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科．概率论与数理统计的理论和方法，在工业、农业、军事、天文、医学、金融、保险、试验设计等人类活动的各个领域，产生着越来越重要的作用．在理论联系实际方面，可以说概率论与数理统计是当今世界上发展最为迅速也是最为活跃的数学分支之一．概率论是研究随机现象中数量规律的数学分支，是数理统计的理论基础．

§1 随机试验与随机事件

§1.1 随机现象与随机试验

在自然界和人类社会活动中，人们所观察到的现象大致可分为必然现象和随机现象两类.

定义 1-1 在一定条件下，必然出现的现象，即只有一个结果，因而可以事先准确预知的现象，称为**必然现象**或**确定性现象**(Certain phenomenon).

例如：

◆ 每天早晨太阳从东方升起；

◆ 同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引；

◆ 在自然状态下，水从高处流向低处等．

定义 1-2 在一定条件下，人们不能事先准确预知其结果的现象，即在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为**随机现象**(Random phenomenon).

随机现象在日常生活中也是广泛存在的．例如：

◆ 向上抛一枚硬币，落地后可能正面朝上也可能反面朝上，就是说，“正面朝上”这个结果可能出现也可能不出现；

◆ 掷一枚骰子，可能出现 1，2，3，4，5，6 点，至于将掷出哪一点，也是不能事先准确预知的；

◆ 在股市交易中，某只股票的价格受到国家金融政策、上市公司业绩、股民的炒作行为及其他国家股市的涨跌等许多不确定因素的影响，下一个交易日该股票的股价可能上升也可能下跌，而且这只股票的最高价和最低价也不能事先确定；

◆ 在射击比赛中，运动员用同一支步枪向一个靶子射击，打出的环数可能不同；

◆ 在某一条生产线上，使用相同的工艺生产出来的产品寿命也可能会有较大差异等．

虽然随机现象在相同的条件下可能的结果不止一个，且不能事先准确预知将会出现什么样的结果，但是经过长期的、反复的观察和试验，人们逐渐发现了所谓结果“不能事先准确预知”只是对一次或几次观察或试验而言，在相同条件下进行大量重复观察或试验时，试验的结果就会呈现出某种规律性，这就是所谓的统计规律性．

为了研究随机现象的数量规律，需要对随机现象进行一些重复观察或试验．在这里，试验作为一个含义广泛的术语，它可以是各种各样的科学试验，也可以是对自然现象或社会现象进行的观察．例如：

◆ 在一批笔记本电脑中任意抽取一台，检测它的寿命；

◆ 向上抛一枚硬币三次，观察其落地后出现正面的次数；

◆ 记录某市火车站售票处一天内售出的车票数等．

定义 1-3 具有下述三个特点的试验称为**随机试验**(Random experiment)，简称为试验，用大写英文字母 E 表示．

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行．

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，但事先可以明确知道试验的所有可能结果．

(3) 不确定性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现．

以后本书中所提到的试验均指随机试验．

§1.2 样本空间与随机事件

由于随机试验具有可观察性，因此，虽然事先不能确定试验将会出现哪一个结果，但试验的所有可能的基本结果所构成的集合却是已知的．

定义 1-4 将随机试验 E 的每个可能的基本结果称为一个**样本点**(Sampling point)，全体样本点组成的集合称为 E 的**样本空间**(Sampling space)，记为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 表示试验的样本点．

例 1-1 设 E_1：向上抛掷一枚硬币，观察其落地后正面朝上还是反面朝上，则 $\Omega_1=$ {正面，反面}；

E_2：将一枚硬币连续向上抛掷两次，依次观察其落地后正面朝上还是反面朝上，则 $\Omega_2=$ {正正，正反，反正，反反}；

E_3：将一枚硬币连续向上抛掷两次，观察其反面朝上的次数，则 $\Omega_3=\{0, 1, 2\}$；

E_4：记录某市火车站售票处一天内售出的车票数，则 $\Omega_4=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

E_5：在某型号电脑中任取一台检测其使用寿命，则 $\Omega_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

写出试验的样本空间，是描述随机现象的基础．值得注意的是：即使是相同的试验，由于研究目的不同，其样本空间也可能不同．如 Ω_2 和 Ω_3. 也就是说，样本空间的样本点取决于随机试验和它的研究目的．

定义 1-5 随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**(Random event)，简称事件(Event). 常用大写英文字母 A、B、C 等表示事件．

◆ 随机现象中的某些基本结果组成的集合就是随机事件．

◆ 任何一个样本点 ω 构成的单点集 $\{\omega\}$ 也都是随机事件，称为**基本事件**(Basic event).

◆ 任何事件可看成是由基本事件复合而成．

◆ 样本空间 Ω 称为**必然事件**(Certain event). 因为 Ω 本身也是 Ω 的一个子集，故也是事件，在每次试验中必然会出现 Ω 中的某一样本点，所以在任何一次试验中 Ω 必然会发生，故称其为必然事件．

◆ 空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**(Impossible event). 空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，故也是事件．因为

空集不包含任何样本点，在任何一次试验中$\varnothing$都不可能发生，所以称其为不可能事件．

◆ 在一次随机试验中，事件 A 发生是指当且仅当 A 所包含的某一样本点出现．

§1.3　随机事件间的关系与运算

因为样本空间 Ω 就是全体样本点所组成的集合，随机事件是 Ω 的子集，所以事件间的关系和运算也可按集合间的关系和运算来处理．为了简化以后的概率计算，下面的讨论总是假定在同一个样本空间 Ω(即同一个随机现象)中进行，下面来了解事件间关系和运算所代表的概率意义．

§1.3.1　包含关系

定义 1-6　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含(Inclusion relation)事件 A，或事件 A 包含于事件 B，记为 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$.

◆ $A\subseteq B$，也就是事件 A 中的每一个样本点都是事件 B 的样本点，如图 1-1 所示．

◆ 对于任意事件 A，必有：$\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

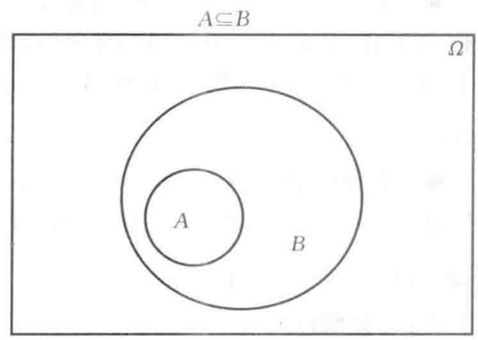


图 1-1　包含关系维恩(Venn)图

§1.3.2　相等关系

定义 1-7　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，同时事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 A 与 B **相等**(Equivalent relation)，记为 $A=B$.

◆ $A=B$，也就是事件 A 的样本点与事件 B 的样本点完全相同，即 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 同时成立．

§1.3.3　互不相容(互斥)事件

定义 1-8　若事件 A 与 B 不可能同时发生时，则称事件 A 与事件 B **互不相容**(或互斥)(Incompatible events).

◆ 事件 A 与事件 B 互斥，即 $A\cap B=\varnothing$，事件 A 与 B 没有相同的样本点，如图 1-2 所示．

◆ 任意两个不同的基本事件是互不相容的．

◆ 当 $i\neq j(i, j=1, 2, \cdots)$时，$A_iA_j=\varnothing$，则称事件 A_1，A_2，…，A_n，…**两两互不相容**．

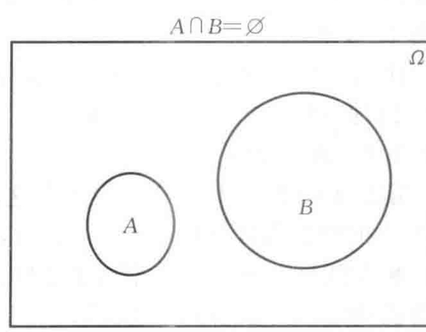


图 1-2　互斥关系维恩图

§1.3.4　事件的并(和)

定义 1-9　“事件 A 与 B 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(或和)(Union of events)，记为 $A\cup B$.

◆ $A\cup B$ 就是由事件 A 和 B 的所有样本点(相同的只计入一次)所组成的新事件，即$A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$，如图 1-3 所示．

◆“事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的并(或和)，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，也可简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

◆“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生”这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n，…的可列并(或和)，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

§1.3.5 事件的交(积)

定义 1-10 “事件 A 与 B 同时发生”，这一事件称为事件 A 与事件 B 的交(或积)(Product of events)，记为 $A\cap B$，或简记为 AB.

◆ $A\cap B$ 就是由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件，这与集合的交集定义完全相同，即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$，如图 1-4 所示.

◆“事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生”这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的交(或积)，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或 $A_1A_2\cdots A_n$，也可简记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

◆“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生”这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n，…的可列交(或积)，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

§1.3.6 差事件

定义 1-11 “事件 A 发生但 B 不发生”，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**(Difference of events)，记为 $A-B$.

◆ $A-B$ 就是由事件 A 中不属于 B 的样本点组成的新事件，即 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$，如图 1-5 所示.

例如，掷一枚骰子，$A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现点数不超过 4$\}$，则 $A-B=\{6\}$.

§1.3.7 对立事件

定义 1-12 “事件 A 不发生”这一事件称为事件 A 的**对立事件**(Opposite events)，记为 $\overline{A}$.

◆ $\overline{A}$ 就是由所有 Ω 中不属于事件 A 的样本点组成的新事件，如图 1-6 所示.

对立事件也可采用如下定义：若事件 A 与 B 满足：

$$A\cap B=\varnothing,\ A\cup B=\Omega,$$

则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，记为 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$.

◆ $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

◆ $A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$.

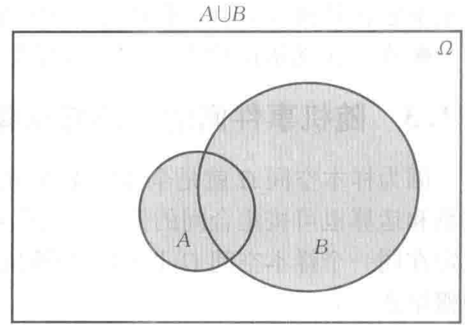


图 1-3 并事件维恩图

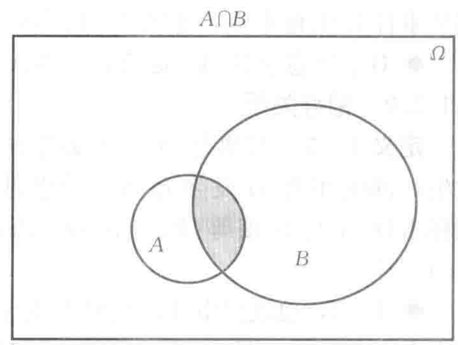


图 1-4 交事件维恩图

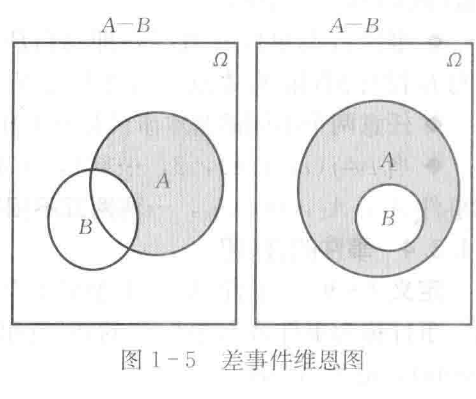


图 1-5 差事件维恩图

§1.3.8　事件的运算律

与集合运算一样，事件的运算也满足下列运算规律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 对偶律(De Morgan 公式)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$.

(6) 事件 A 与 B 的差：$A-B=A\cap\overline{B}$.

上面的运算律对有限个或可列个事件的情况也同样成立．

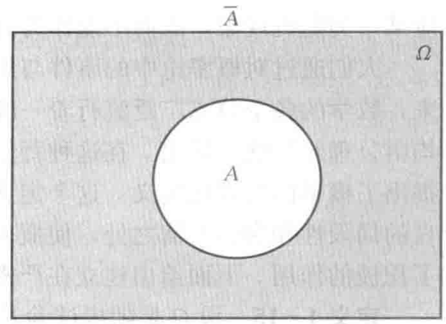


图 1-6　对立事件维恩图

§2　随机事件的概率

§2.1　概率的统计定义

在同一个试验中，不同随机事件发生的可能性也可能不同．例如，在掷骰子的例子中，显然“出现 6 点”发生的可能性小于“出现偶数点”．为了度量事件在一次试验中发生的可能性大小，引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度．

定义 1-13　在相同条件下重复进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 出现的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**(Frequency)，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

容易证明频率具有下述基本性质：

(1) 非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$.

(3) 有限可加性：若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i).$$

定义 1-14　在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率随着试验次数 n 的增大而稳定到某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，则称数值 p 为事件 A 的**概率**(Probability)，记作

$$P(A)=p.$$

§2.2　概率的公理化定义

根据概率的统计定义，可以用试验次数很大时的频率来估计事件的概率．但是，在现实生活中某些试验由于成本太高或具有破坏性等原因而不能大量重复进行，这时不能利用频率来估计概率．加上概率的统计定义只是一个模糊定义，不能作为严格的数学定义，因而存在严重的不足．

历史上还出现过概率的古典定义、概率的几何定义和概率的主观定义，这些定义只能适应某一类随机现象，因而不能作为概率的一般定义.

人们通过对概率论中的事件与集合及概率与测度之间联系的研究，再加上19世纪末以来，数学的各个分支广泛流行着一股公理化潮流，即把最基本的事实假定为公理，其他结论均由公理经过演绎导出.在这种背景下，1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出了概率的公理化定义.这个定义概括了前人所定义的各种概率的共同特征，又避免了各自的局限性和含糊不清之处，使概率论成为一门严谨的数学分支，对概率论的迅速发展起到了积极的作用.下面给出建立在严密的逻辑基础上的概率的公理化定义.

定义1-15 设Ω是随机试验E的样本空间，对于E的每一个事件A，将其对应于一个实数$P(A)$，如果$P(A)$满足下列三个条件，则称$P(A)$为事件A的**概率**(Probability).

(1) 非负性：对任意事件A，有$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：若A_1，A_2，…，A_n，…是两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

§2.3 概率的性质

利用概率定义的三条公理，可以推出概率的另外一些重要性质：

性质1 $P(\varnothing)=0$.

性质2(有限可加性) 若A_1，A_2，…，A_n是两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

性质3 对任何事件A，有$P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质4 对任意两个事件A与B，有$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

◆ 若$A\supseteq B$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$，$P(A)\geqslant P(B)$.

性质5 对任意事件A，有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质6(加法公式) 对任意事件A，B，C，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

例1-2 设$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，就下列三种情况求$P(B-A)$：

(1) A与B互不相容； (2) $A\subseteq B$； (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由于A与B互不相容，即$AB=\varnothing$，所以

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

(2) $A\subseteq B$，则有$P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{4}$.

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{8}$.