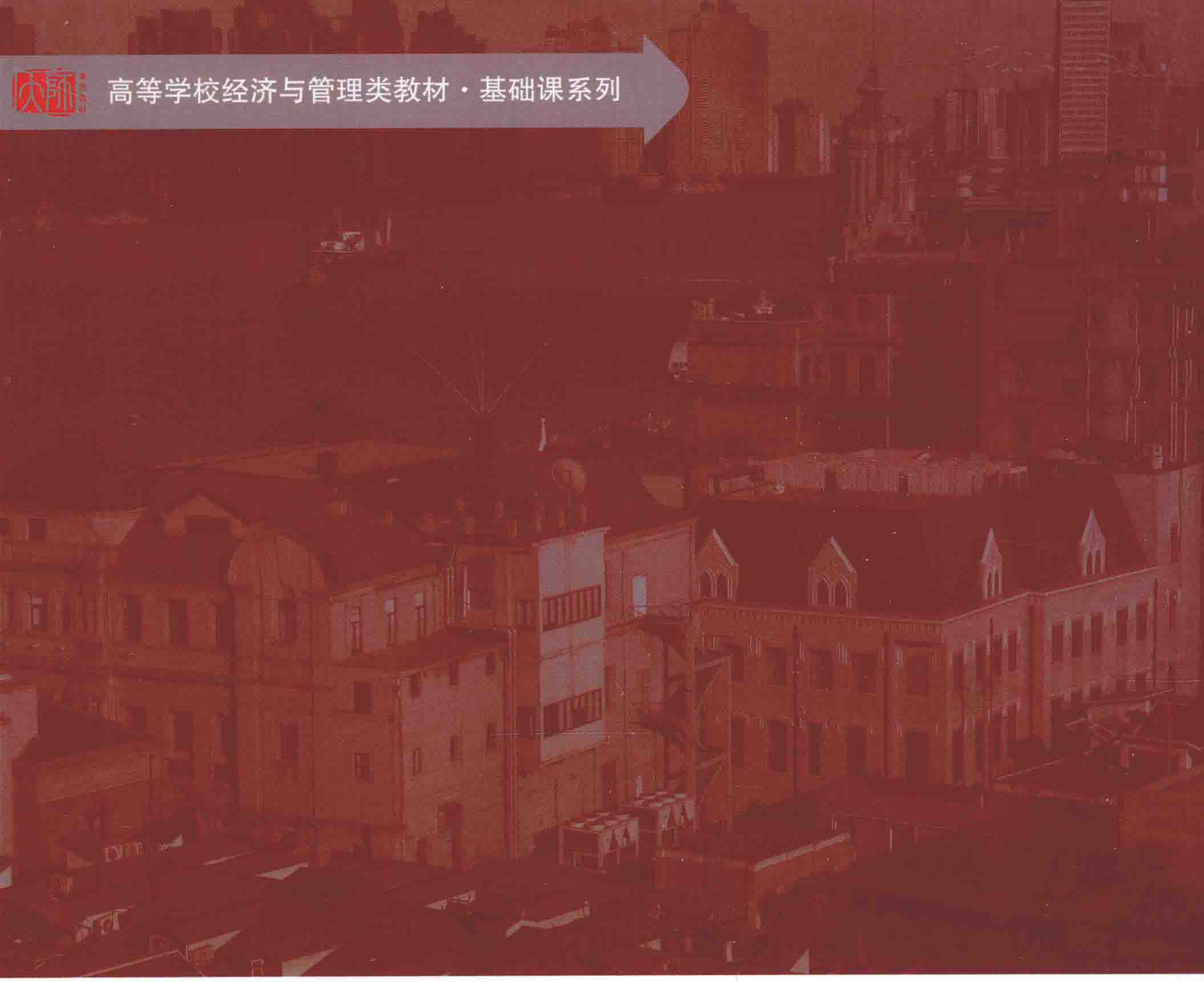
高等学校经济与管理类教材·基础课系列



概率与统计

学习指导

主编◇胡　珂　尧雪莉

华东师范大学出版社

高等学校经济与管理类教材·基础课系

概率与统计

学习指导

主　编◇胡　珂　尧雪莉

副主编◇蒲爱民　郭　赟　程宗钱

图书在版编目(CIP)数据

概率与统计学习指导/胡珂,尧雪莉主编.—上海:华东师范大学出版社,2014.10
ISBN 978-7-5675-2669-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①胡…②尧… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 241330 号

概率与统计学习指导

主　　编　胡　珂　尧雪莉
副 主 编　蒲爱民　郭　赟　程宗钱
项目编辑　孙小帆
审读编辑　王小双
装帧设计　卢晓红

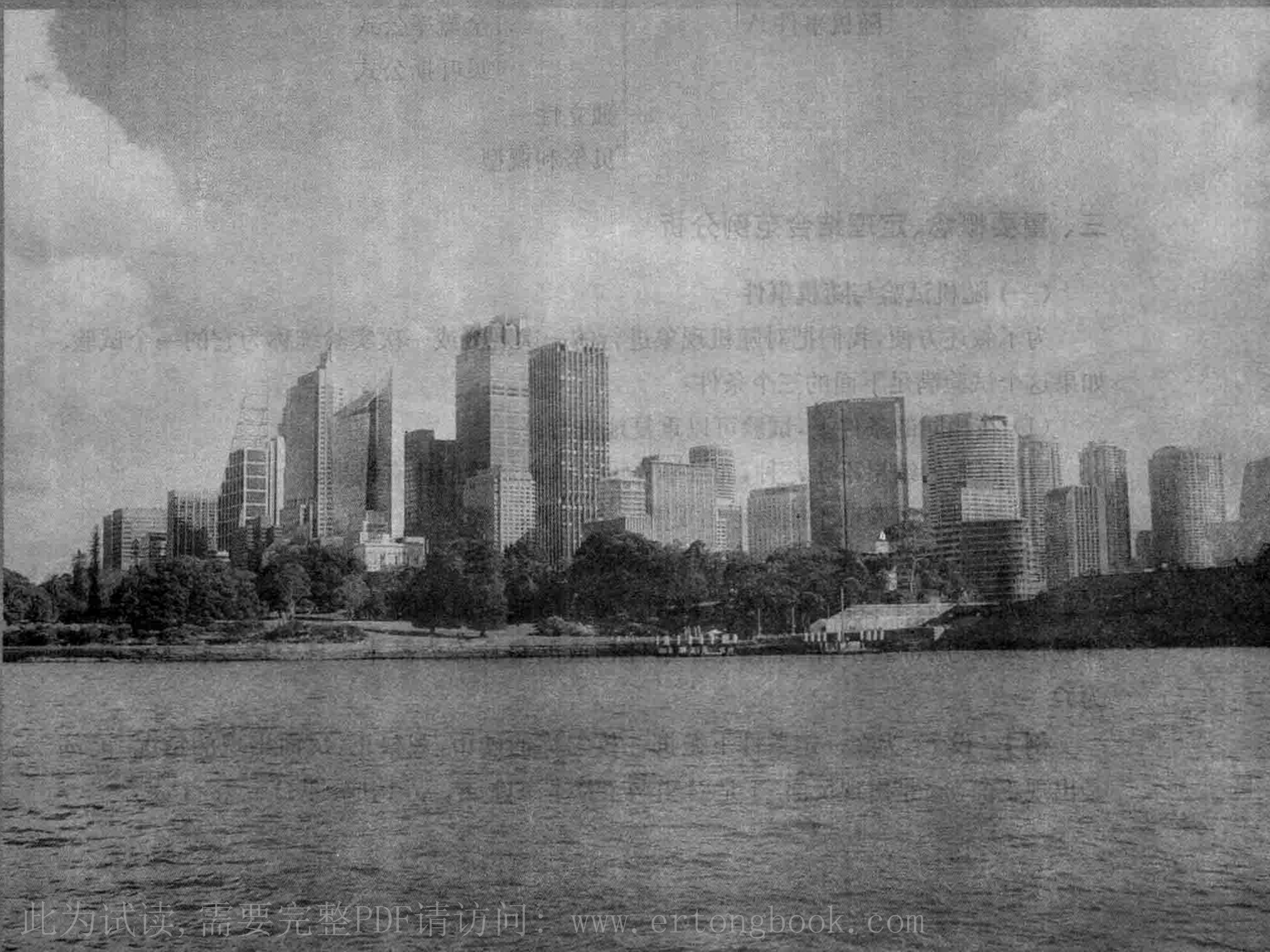
出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟市大宏印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　14.25
字　　数　285 千字
版　　次　2015 年 5 月第 1 版
印　　次　2015 年 5 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5675-2669-3/O·255
定　　价　27.00 元

出 版 人　王　焰

目 录

第 1 章 随机事件及其概率



一、学习要求

1. 理解随机事件及样本空间的概念，掌握随机事件间的关系及运算.

2. 了解概率的统计定义及公理化定义. 理解古典概率和几何概率的定义. 会计算古典概率和几何概率.

3. 掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行概率计算.

4. 理解条件概率的概念，掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式. 会用这些公式进行概率计算.

5. 理解事件的独立性概念，掌握用事件独立性进行概率计算，理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

二、概念网络图

$$\text{随机试验 }E\to\left\{\begin{array}{l}\text{基本事件 }\omega\\ \text{样本空间 }\Omega\\ \text{随机事件 }A\end{array}\right\}\to P(A)\left\{\begin{array}{l}\text{古典概型}\\ \text{几何概型}\\ \text{五大公式}\left\{\begin{array}{l}\text{加法 }B+C\\ \text{减法 }B-C\\ \text{条件概率 }B|C\text{ 和乘法公式 }BC\\ \text{全概率公式}\\ \text{贝叶斯公式}\end{array}\right\}\\ \text{独立性}\\ \text{贝努利概型}\end{array}\right\}$$

三、重要概念、定理结合范例分析

(一) 随机试验与随机事件

为了叙述方便，我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的三个条件：

(1) 在相同的条件下，试验可以重复地进行；

(2) 试验的结果不止一种，而且事先可以确知试验的所有结果；

(3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果，

那么我们就称它是一个**随机试验**，以后简称为**试验**. 一般用字母 E 表示.

在随机试验中，每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件或样本点**，用 ω 表示；由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间或样本空间**，记为 Ω.

例 1 设 E_1 为在一定条件下抛掷一枚匀称的硬币，观察正、反面出现的情况. 记 ω_1 是出现正面，ω_2 是出现反面. 于是 Ω 由两个基本事件 ω_1、ω_2 构成，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

例 2　设 E_2 为在一定条件下掷一粒骰子，观察出现的点数. 记 ω_i 为出现 i 个点 ($i = 1, 2, \cdots, 6$). 于是 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$.

所谓**随机事件**就是样本空间 Ω 的一个子集，随机事件简称为**事件**，用字母 A、B、C 等表示. 因此，某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生，记为 $\omega \in A$.

在例 2 中，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$，而 E_2 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合. 例如，设事件 $A = \{$出现偶数点$\}$，$B = \{$出现的点数大于 4$\}$，$C = \{$出现 3 点$\}$，可见它们都是 Ω 的子集. 显然，如果事件 A 发生，那么子集 $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ 中的一个样本点一定发生，反之亦然，故有 $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$；类似地有 $B = \{\omega_5, \omega_6\}$ 和 $C = \{\omega_3\}$. 一般而言，在例 2 中，任一由样本点组成的 Ω 的子集也都是随机事件.

(二) 事件之间的关系与运算

事件之间的关系有："包含"、"等价(或相等)"、"互不相容(或互斥)"以及"独立"四种.

事件之间的基本运算有："并"、"交"以及"逆".

如果没有特别的说明，下面问题的讨论我们都假定是在同一样本空间 Ω 中进行的.

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A、B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B，那么称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，那么称事件 A 与事件 B **等价或相等**，记为 $A = B$.

在下面的讨论中，我们经常说"事件相同、对应概率相等"，这里的"相同"指的是两个事件"等价".

2. 事件的并与交

设 A、B 为两个事件. 我们把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的并或和，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$.

设 A、B 为两个事件. 我们把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的交或积，记为 $A \cap B$ 或 AB.

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设 A、B 为两个事件，如果 $AB = \varnothing$，那么称事件 A 与 B 是**互不相容**的(或**互斥**的).

对于事件 A，我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的逆(或 A 的**对立事件**)，记为 $\overline{A}$. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生(即 $A\overline{A} = \varnothing$，称它们具有互斥性)，而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生(即 $A + \overline{A} = \Omega$，称它们具有完全性). 这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 满足：

$$\begin{cases} A\overline{A} = \varnothing, \\ A + \overline{A} = \Omega. \end{cases}$$

问题　(1) 事件的互不相容关系如何推广到多于两个事件的情形？

(2) 三个事件 A、B、C，$ABC=\varnothing$ 与

$$\begin{cases} AB=\varnothing, \\ AC=\varnothing, \\ BC=\varnothing \end{cases}$$

关系如何?

根据事件的基本运算定义，这里给出事件之间运算的几个重要规律：

(1) $A(B+C)=AB+AC$(分配律).　　(2) $A+BC=(A+B)(A+C)$(分配律).

(3) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$(德·摩根律).　　(4) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$(德·摩根律).

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算. 例如，我们称事件 $A\overline{B}$为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$. 可见，事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

例 3　在数学系学生中任选一名学生. 设事件 A={选出的学生是男生}，B={选出的学生是三年级学生}，C={选出的学生是科普队的}.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的含义;

(2) 在什么条件下，$ABC=C$ 成立?

(3) 在什么条件下，$C\subset B$ 成立?

解　(1) 事件 $AB\overline{C}$ 的含义是，选出的学生是三年级的男生，但不是科普队员.

(2) 由于 $ABC\subset C$，故 $ABC=C$ 当且仅当 $C\subset ABC$. 这又当且仅当 $C\subset AB$，即科普队员都是三年级的男生.

(3) 当科普队员全是三年级学生时，C 是 B 的子事件，即 $C\subset B$ 成立.

4. 事件的独立性

设 A、B 是某一随机试验的任意两个随机事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，那么称事件 **A 与 B 是相互独立**的.

可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性，即当 $P(B)\neq 0$ 时，A 与 B 相互独立也可以用

$$P(A\mid B)=P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义，我们可以得到：若事件 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

如果事件 A、B、C 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 **A、B、C 相互独立**.

注意,事件 A、B、C 相互独立与事件 A、B、C 两两独立不同,两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立. 因此,相互独立一定是两两独立,但反之不一定.

例 4　将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A=\{$掷第一次出现正面$\}$, $B=\{$掷第二次出现正面$\}$, $C=\{$正、反面各出现一次$\}$,则事件 A、B、C 是相互独立,还是两两独立?

解　由题设,可知 $P(AB)=P(A)P(B)$, 即 A、B 相互独立. 而

$$P(AC)=P(A(A\overline{B}+\overline{A}B))=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} P(A)P(C) &= P(A)P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)(P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)) \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

故 A、C 相互独立,同理 B、C 也相互独立. 但是

$$P(ABC)=P(\varnothing)=0,$$

而
$$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

所以
$$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C),$$

因此事件 A、B、C 两两独立,但不是相互独立.

问题　(1) 两个事件的"独立"与"互斥"之间有没有关系? 在一般情况下,即 $P(A)>0$, $P(B)>0$ 时,两者之间有关系吗? 为什么?

(2) 设 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$, $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$. 问 A 与 B 是否独立,为什么? 由此可以得到什么结论?

(三) 概率的定义与性质

1. 概率的公理化定义

定义　设 E 是一个随机试验,Ω 为它的样本空间,以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域,定义一个函数 $P(A)$(其中 A 为任一随机事件),且 $P(A)$满足以下三条公理,则称函数 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

公理 1 (非负性)　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2（规范性） $P(\Omega)=1$.

公理 3（可列可加性） 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

由上面三条公理可以推导出概率的一些基本性质.

性质 1（有限可加性） 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 2（加法公式） 设 A、B 为任意两个随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 3 设 A 为任意随机事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4 设 A、B 为两个任意的随机事件，若 $A \subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

由于 $P(B-A) \geqslant 0$，根据性质 4 可以推得，当 $A \subset B$ 时，

$$P(A) \leqslant P(B).$$

例 5 设 A、B、C 是三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(CB)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A、B、C 中至少有一个发生的概率.

解 设 $D=\{A、B、C$ 中至少有一个发生$\}$，则 $D=A+B+C$，于是

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A+B+C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

又因为

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\ P(AB)=P(CB)=0,\ P(AC)=\frac{1}{8},$$

而由 $P(AB)=0$，有 $P(ABC)=0$，所以

$$P(D)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

问题　怎样由 $P(AB)=0$ 推出 $P(ABC)=0$?

提示　利用事件的关系与运算导出.

例 6　设事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=a$，$P(B)=b$. 若事件 C 发生，必然导致 A 与 B 同时发生，求 A、B、C 都不发生的概率.

解　由于事件 A 与 B 相互独立，因此

$$P(AB)=P(A)P(B)=ab.$$

考虑到 $C\subset AB$，故有

$$\overline{C}\supset\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}\supset\overline{A}\,\overline{B},$$

因此

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-a)(1-b).$$

2. 概率的统计定义

定义　在一组不变的条件 S 下，独立地重复做 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数，当试验次数 n 很大时，如果 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**，记作

$$P(A)=p.$$

问题　(1) 试判断下式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu}{n}=p$$

成立吗? 为什么?

(2) 野生资源调查问题　池塘中有鱼若干(不妨假设为 x 条)，先捞上 200 条作记号，放回后再捞上 200 条，发现其中有 4 条带记号. 用 A 表示事件{任捞一条带记号}，问下面两个数

$$\frac{200}{x}、\frac{4}{200}$$

哪个是 A 的频率? 哪个是 A 的概率? 为什么?

3. 古典概型

古典型试验:(Ⅰ)结果为有限个;(Ⅱ)每个结果出现的可能性是相同的.

等概完备事件组:(Ⅰ)完全性;(Ⅱ)互斥性;(Ⅲ)等概性.(满足(Ⅰ)、(Ⅱ)两条的事件组称为完备事件组)

定义　设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成，即 $\Omega=\{\omega_1,$

$\omega_2, \cdots, \omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成，那么称事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1-1}$$

所谓**古典概型**就是利用式(1-1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

根据概率的古典定义可以计算古典概型随机试验中事件的概率. 在古典概型中确定事件 A 的概率时，只需求出基本事件的总数 n 以及事件 A 包含的基本事件的个数 m. 为此弄清随机试验的全部基本事件是什么以及所讨论的事件 A 包含了哪些基本事件是非常重要的.

例 7 掷两枚匀称的硬币，求它们都是正面的概率.

解 设 $A=\{$出现正正$\}$，其基本事件空间可以有下面三种情况：

(Ⅰ) $\Omega_1=\{$同面、异面$\}$, $n_1=2$;

(Ⅱ) $\Omega_2=\{$正正、反反、一正一反$\}$, $n_2=3$;

(Ⅲ) $\Omega_3=\{$正正、反反、反正、正反$\}$, $n_3=4$.

于是，根据古典概型，对于(Ⅰ)来说，由于两个都出现正面，即同面出现，因此，$m_1=1$，于是有

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

而对于(Ⅱ)来说，$m_2=1$，于是有

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

而对于(Ⅲ)来说，$m_3=1$，于是有

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

问题 以上讨论的三个结果哪个正确，为什么？

例 8 把 n 个不同的球随机地放入 $N(N \geqslant n)$ 个盒子中，求下列事件的概率：

(1) 某指定的 n 个盒子中各有一个球；

(2) 任意 n 个盒子中各有一个球；

(3) 指定的某个盒子中恰有 $m(m<n)$ 个球.

分析 这是古典概率的一个典型问题，许多古典概率的计算问题都可归结为这一类型. 每个球都有 N 种放法，n 个球共有 N^n 种不同的放法. “某指定的 n 个盒子中各有一个球”相当于 n 个球在 n 个盒子中的全排列；与(1)相比，(2)相当于先在 N 个盒子中选 n 个盒子，再放球；(3)相当于先从 n 个球中取 m 个放入某指定的盒中，再把剩下的 $n-m$ 个球放入 $N-1$ 个盒中.

解 样本空间中所含的样本点数为 N^n.

(1) 该事件所含的样本点数是 $n!$,故 $p=\dfrac{n!}{N^n}$;

(2) 在 N 个盒子中选 n 个盒子有 C_N^n 种选法,故所求事件的概率为:$p=\dfrac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$;

(3) 从 n 个球中取 m 个有 C_n^m 种选法,剩下的 $n-m$ 个球中的每一个球都有 $N-1$ 种放法,故所求事件的概率为:$p=\dfrac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}$.

例 9　从一副扑克牌的 13 张梅花中,有放回地取 3 次,求三张都不同号的概率.

解　这是一个古典概型问题. 设 $A=\{$三张都不同号$\}$. 由题意,有 $n=13^3$, $m=P_{13}^3$,则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{132}{169}.$$

问题　如果我们进一步问三张都同号,三张中恰有两张同号如何求出? 另外,本题可否使用二项概型计算?

例 10　在 20 枚硬币的背面分别写上 5 或 10,两者各半,从中任意翻转 10 枚硬币,这 10 枚硬币背面的数字之和为 100, 95, 90, …, 55, 50,共有十一种不同情况. 问出现"70, 75, 80"与出现"100, 95, 90, 85, 65, 60, 55, 50"的可能性哪个大,为什么?

答案是:出现"70, 75, 80"可能性大,约为 82%.

分析　这是一个古典概型问题. 设 $A=\{$出现"70, 75, 80"$\}$,由题意,有

$$n=C_{20}^{10},\ m=C_{10}^5C_{10}^5+2C_{10}^4C_{10}^6,$$

则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{151\,704}{184\,756}\approx 0.82.$$

4. 几何概型

几何型试验:(Ⅰ)结果为无限不可数;(Ⅱ)每个结果出现的可能性是均匀的.

定义　设 E 为几何型的随机试验,其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述,而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件,则称事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)},\tag{1-2}$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的**几何度量**.

所谓**几何概型**就是利用式(1-2)来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意,上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关,而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

例 11 候车问题 某地铁每隔 5 min 有一列车通过，在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下，求每一个乘客到站等车时间不多于 2 min 的概率.

解 设 $A=\{$每一个乘客等车时间不多于 2 min$\}$. 由于乘客可以在接连两列车之间的任何一个时刻到达车站，因此每一乘客到达站台时刻 t 可以看成是均匀地出现在长为 5 min的时间区间上的一个随机点，即 $\Omega=[0, 5)$. 又设前一列车在时刻 T_1 开出，后一列车在时刻 T_2 到达，线段 T_1T_2 长为5(见图1-1)，即 $L(\Omega)=5$；T_0 是 T_1T_2 上一点，且 T_0T_2 长为2. 显然，乘客只有在 T_0 之后到达(即只有 t 落在线段 T_0T_2 上)，等车时间才不会多于 2 min，即 $L(A)=2$. 因此

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{2}{5}.$$

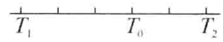


图 1 - 1

问题 (1) 例 11 可否使用一维均匀分布来计算？

(2) 举例说明：

(Ⅰ) 概率为 0 的事件不一定是不可能事件.

(Ⅱ) 概率为 1 的事件不一定是必然事件.

例 12 会面问题 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，如果甲船和乙船停泊的时间都是两小时，那么它们同日到达时会面的概率是多少？

解 这是一个几何概型问题. 设 $A=\{$甲船与乙船会面$\}$. 又设甲乙两船到达的时刻分别是 x、y，则 $0\leqslant x\leqslant 24$，$0\leqslant y\leqslant 24$. 由题意可知，若要甲乙会面，必须满足

$$|x-y|\leqslant 2,$$

即图中阴影部分. 由图 1 - 2 可知：$L(\Omega)$ 是由 $x=0$，$x=24$，$y=0$，$y=24$. 所围图形的面积 $S=24^2$，而 $L(A)=24^2-22^2$，因此

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{24^2-22^2}{24^2}=1-\left(\frac{22}{24}\right)^2=\frac{23}{144}.$$

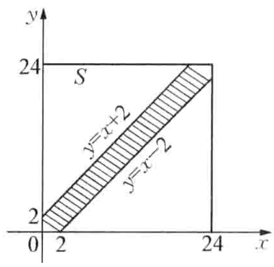


图 1 - 2

问题 例 12 可否使用二维均匀分布来计算？

(四) 条件概率与概率的乘法公式

1. 条件概率

前面我们所讨论的事件 B 的概率 $P_S(B)$，都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率(但是为了叙述简练，一般不再提及条件组 S，而把 $P_S(B)$ 简记为 $P(B)$). 在实际问题中，除了考虑概率 $P_S(B)$ 外，有时还需要考虑“在事件 A 已发生”这一附加条件下，事件 B 发生的概率. 与前者相区别，称后者为**条件概率**，记作 $P(B|A)$，读作在 A 发生的条件下事

件 B 的概率.

在一般情况下,如果 A、B 是条件 S 下的两个随机事件,且 $P(A)\neq 0$,那么在 A 发生的前提下 B 发生的概率(即条件概率)为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, \tag{1-3}$$

并且满足下面三个性质:

(1)(非负性)　$P(B\mid A)\geqslant 0$;

(2)(规范性)　$P(\Omega\mid A)=1$;

(3)(可列可加性)　如果事件 B_1, B_2, …互不相容,那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A).$$

问题　(1) 条件概率在原样本空间 Ω 中是某一个事件的概率吗?

(2) 如何判断一个问题中所求的是条件概率还是无条件概率?

(3) 在一个具体问题中条件概率如何获得?

例 13　设随机事件 B 是 A 的子事件,已知 $P(A)=1/4$, $P(B)=1/6$,求 $P(B\mid A)$.

分析　这是一个条件概率问题.

解　因为 $B\subset A$,所以 $P(B)=P(AB)$,因此

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{2}{3}.$$

2. 概率的乘法公式

在条件概率公式(1-3)的两边同乘以 $P(A)$,即得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A). \tag{1-4}$$

例 14　在 100 件产品中有 5 件是不合格的,无放回地抽取两件,问第一次取到正品而第二次取到次品的概率是多少?

解　设事件

$$A=\{\text{第一次取到正品}\},\ B=\{\text{第二次取到次品}\}.$$

用古典概型方法求出

$$P(A)=\frac{95}{100}\neq 0.$$

由于第一次取到正品后不放回,那么第二次是在 99 件中(不合格品仍是 5 件)任取一件,所以

$$P(B\mid A)=\frac{5}{99}.$$

由公式(1-4)，

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \frac{95}{100} \times \frac{5}{99} = \frac{19}{396}.$$

问题 (1) 例 14 中，问两件产品为一件正品、一件次品的概率是多少？

(2) 例 14 中，将“无放回地抽取”改为“有放回地抽取”，答案与上题一样吗？为什么？

例 15 抓阄问题 五个人抓一个有物之阄，求第二个人抓到的概率.

分析 (1) 什么是“抓阄”问题，如何判断它？

(2) 例 15 中“求第二个人抓到的概率”是指“在第一人没有抓到的条件下，第二个人抓到的概率”吗？

解 这是一个乘法公式的问题. 设 $A_i=\{$第 i 个人抓到有物之阄$\}(i=1, 2, 3, 4, 5)$，有

$$A_2 = A_2\Omega = A_2(A_1 + \overline{A}_1) = A_1A_2 + \overline{A}_1A_2 = \varnothing + \overline{A}_1A_2 = \overline{A}_1A_2.$$

根据事件相同对应概率相等，有

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1).$$

又因为

$$P(A_1) = \frac{1}{5},\ P(\overline{A}_1) = \frac{4}{5},\ P(A_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{1}{4},$$

所以

$$P(A_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

问题 (1) 本题还有其他方法解决吗？

(2) 若改成 n 个人抓 m 个有物之阄 $(m < n)$，下面的结论

$$P(A_k) = \frac{m}{n}(k = 1, 2, \cdots, n)$$

还成立吗？

例 16 设袋中有 4 个乒乓球，其中 1 个涂有白色，1 个涂有红色，1 个涂有蓝色，1 个涂有白、红、蓝三种颜色. 今从袋中随机地取一个球，设事件 $A=\{$取出的球涂有白色$\}$，$B=\{$取出的球涂有红色$\}$，$C=\{$取出的球涂有蓝色$\}$. 试验证事件 A、B、C 两两相互独立，但不相互独立.

证 根据古典概型，我们有 $n = 4$，而事件 A、B 同时发生，只能是取到的球是涂有白、红、蓝三种颜色的球，即 $m = 1$，因而

$$P(AB) = \frac{1}{4}.$$

同理，事件 A 发生，只能是取到的球是涂红色的球或涂三种颜色的球，因而

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

因此，有
$$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

所以
$$P(AB)=P(A)P(B);$$

即事件 A、B 相互独立.

类似可证，事件 A、C 相互独立，事件 B、C 相互独立，即 A、B、C 两两相互独立，但是由于

$$P(ABC)=\frac{1}{4},$$

而
$$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{4},$$

所以 A、B、C 并不相互独立.

例 17　加工某一零件共需经过四道工序，设一、二、三、四这四道工序的次品率分别是 2%、3%、5%、3%，假定各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率.

答案是：0.124（或 $1-0.98\times0.97\times0.95\times0.97$）.

问题　本题使用加法公式还是乘法公式较为简便？

例 18　一批零件共 100 个，其中有次品 10 个. 每次从中任取一个零件，取出的零件不再放回去，求第一次、第二次取到的是次品，第三次才取到正品的概率.

答案是：0.0084$\left(\text{或}\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\right)$.

问题　本题若改为“已知第一次、第二次取到的是次品，求第三次取到正品的概率”，答案与原题相同吗？为什么？（应为$\frac{90}{98}$）.

例 19　用高射炮射击飞机，如果每门高射炮击中飞机的概率是 0.6，试问：(1)用两门高射炮分别射击一次击中飞机的概率是多少？(2)若有一架敌机入侵，至少需要多少架高射炮同时射击才能以 99%的概率命中敌机？

分析　本题既可使用加法公式，也可使用乘法公式.

解　(1) 令

$$B_i=\{\text{第 } i \text{ 门高射炮击中敌机}\}(i=1,2),\ A=\{\text{击中敌机}\}.$$

在同时射击时，B_1 与 B_2 可以看成是互相独立的，从而$\overline{B}_1$、$\overline{B}_2$ 也是相互独立的，且有

$$P(B_1)=P(B_2)=0.6,\ P(\overline{B}_1)=P(\overline{B}_2)=1-P(B_1)=0.4.$$