

浙江省重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

大学数学与数学文化

唐明成 敏 谢聪聪 编著



科学出版社

浙江省重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

大学数学与数学文化

唐明成敏 谢聪聪 编著



浙江工业大学重点教材建设项目基金资助

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为偏文类大学生量身定制的高等数学教科书,有别于普通的高等数学教材,其特点是:针对偏文类专业的思维特点和学生特点进行了重新设计,一方面以尽可能简洁的方式介绍高等数学的基础知识(包括函数与极限、微积分、概率论与数理统计、线性代数等部分的基本知识体系),另一方面则以较多篇幅介绍了数学的成长历程和思想演进,强调了数学的思维、理念和精神,并相当宽泛地介绍了数学对人文社科类各学科的影响与渗透。这样设计,是希望偏文类专业的大学学生能从思维科学和人文关怀的视角,对高等数学有一些起码的了解,见识数学发展与人类文明各领域的密切关系和深刻作用,从而理解大学偏文类专业为什么要开设高等数学课程,并关注于学习和领悟高等数学的思想精华。

由于在较大的历史和社会背景下介绍了数学的思想、发展和影响,本书对偏理工类各专业的大学学生学好高等数学也会有所帮助,还可以在高等学校的通识教育课上用作介绍数学文化的教材。此外,对于讲授高等数学相关课程的教师们和其他对高等数学有兴趣的人们,也会是开卷有益的。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学与数学文化/唐明,成敏,谢聪编著. —北京:科学出版社,2015
(浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书)

ISBN 978-7-03-044721-0

I. ①大… II. ①唐… ②成… ③谢… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第124368号

责任编辑:石悦 / 责任校对:胡小洁
责任印制:赵博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中华美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年6月第一版 开本:720×1000 1/16

2015年6月第一次印刷 印张:22 1/4

字数:449 000

定价:45.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

“浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书”

编 委 会

主任委员：邱继征 邬学军 王定江

编 委：(按姓名拼音排序)

陈剑利	成 敏	程小力	邓爱珍	狄艳媚	邱继征
丁晓冬	丁 盈	方 兴	方照琴	冯 鸣	何敏勇
胡 娟	胡晓瑞	黄纪刚	姜丽亚	金建国	金永阳
李素兰	李永琪	练晓鹏	刘 震	陆成刚	陆建芳
罗和治	马 青	孟 莉	缪永伟	潘永娟	沈守枫
寿华好	宋军全	唐 明	王定江	王金华	王理同
王 勤	王时铭	王为民	王雄伟	邬学军	吴 超
夏治南	谢聪聪	徐利光	许红娅	颜于清	杨爱军
原俊青	张冬梅	张 隽	张素红	周佳立	周明华
周 南	朱海燕	卓文新			

总 序

近年来,关于数学的各种新观点不断出现。

有一种观点认为,随着数学的发展,数学已经从自然科学中分离出来,成为独立的科学门类——数学科学。

持这种观点的学者的依据是:①从现代数学的发展情况可以看出,数学的许多内容和方法的产生,不再是基于研究自然界中存在的物质运动规律的需要,而是基于数学自身的需要。例如, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=5+5=3+7$,等等,即每一个大于等于6的偶数都可以表示为两个奇素数的和,这就是哥德巴赫猜想,至今没有证明。但是,这样一个在数学中显得十分重要的著名的猜想,其结果的对与否,不会对数学之外的任何学科产生影响,证明它不是自然科学的需要,而仅仅是数学科学的需要。②数学不仅具有应用功能,而且具有其他学科不能比拟的教育功能。数学的应用功能表现在:没有数学,现代科技无从谈起;任何一种学科,只有应用了数学,才能成为科学学科。数学的教育功能表现在:在中国,语文、数学、英语被认为是初等教育中最重要三门课程;在世界范围内,有不学中文的学生,有不学英语的学生,但没有不学数学的学生。

我们同意这种观点,希望在数学教学改革和科学研究中体现这种观点。

数学教学改革,首先需要的是教材的改革,而教材的改革,涉及的只有两个方面:一是内容,二是方法。

如何在—本数学教材中以数学科学的观点选取内容、介绍方法?

我的认识是:无论是选取内容方面,还是介绍方法方面,都要关注数学的应用功能和教育功能的展现。

在内容的选取方面,既不是不管数学的教育功能,狭隘地全部以目前生产活动的实际应用为目的,打乱系统,什么“有用”就选什么,什么“没用”就跳过什么,也不是完全从数学的需要出发,一点也不考虑所选取的内容和实际应用的联系。本套丛书采取有实际应用背景的内容优先选取的原则。我们的考虑是:没有迹象表明,没有实际应用背景的内容在体现数学的教育功能时强于有实际应用背景的内容,既然如此,后者更有利于同时展现数学的应用功能和教育功能。

在方法的介绍方面,既不完全采用公理化体系的做法,让读者在接受严格数学训练的基础上自然地受到数学科学的熏陶;也不完全摒弃数学特有的推理过程,以急功近利的方式只讲结果,只讲计算公式。我们知道,公理化体系的做法是将数学的训练目的不直接说出来,而是藏起来,藏在严密的过程背后,让学生不知不觉得到严格的数学训练。这种体系在介绍内容时,不交代前因后果,一上来就是莫名其妙的定义、公理,然后一步步以极其严密的方式展开讨论。这种做法在知识门类相对少的过去

是有效的,但在知识爆炸、课程门类不断增加、学生同时要有做学问和实际应用两手准备的现在,没有时间这样做。训练要有,但训练目的不是藏起来,而是尽可能直接讲出来。例如,数学书籍中一定会用到归纳法、演绎法、反证法,这些方法不是数学特有的,但可以被数学最为有效地传授给学生,这一事实恰好可以说明数学的教育功能的强大。但是,如果我们去问一下数学系的毕业生什么是演绎法,恐怕很少有人能说周全,究其原因,是我们的教材没有明确地告诉学生演绎法的基本内容和过程。本套丛书将致力于改变这种状况。

本套丛书注意到:根据课程和授课对象的不同,数学的应用功能和教育功能的展现需分层次,两种功能的展现要有机配合。例如,有的数学分支本来就属于应用数学,所以,对这样的课程,在选取内容和介绍方法时必须首先保证应用方面的需要,其次才考虑教育功能的融入;有的授课对象是文科学生,对这些学生,在编写教材时就要充分注意他们的基础、兴趣、思维方式和希望通过数学的学习要达到的目的,因此要首先考虑数学的教育功能,其次才考虑应用功能的融入。

现代化的标志是数字化,也就是要在所有的领域尽最大可能地使用计算机技术,因此,在数学教学中,对数字化的配合和适应是必需的。这样,为了展现数学的应用功能,在数学教学的每个环节,都应该关注计算机技术,包括有意考虑内容的计算机实现,如算法问题,内容与几个成功的数学软件的结合问题。我们知道,介绍如何应用数学软件的最好环境,当为相应的数学课程。因此,本套丛书中的教材,特别注意介绍与主要内容配套的软件的应用,例如,介绍相应的 MATLAB 软件包的使用。

科学研究成果整理成学术著作,可以总结和条理化研究问题,这对于传播研究成果、深化研究工作是有利的,这些著作还可以作为研究生教材使用。

本套丛书中学术著作的撰写遵循了如下的原则:

首先,作为介绍学术成果的学术著作要有新内容、新观点,学术系统应是明显的,不是杂乱的、拼凑的,特别是著作中作者的成果应有重要的分量。

其次,本套丛书中的学术著作特别注意内容的系统性、完备性。

再次,也是最重要的,本套丛书中的学术著作,和教材一样注意展现数学的应用功能和教育功能,在必要时,还考虑内容的计算机实现,如算法问题,内容与几个成功的数学软件的结合问题。

最后,在写作细节上,本套丛书要求作者以严格的科学态度对待自己的著作,概念和符号应明确,推导和介绍要细致,避免突然出现翻遍全书都找不到介绍的概念和符号,避免用显然、易知等词语掩盖困难的证明过程。

教学改革涉及的问题很多,有些问题需要一步步解决,有的还需要根据形势的变化调整解决方案。我们仅做了初步的尝试,加之水平有限,本套丛书中的问题一定很多,迫切希望读者批评指正。

邱继征

2013年3月8日

前 言

本书是专为大学偏文类专业的学生而写的。所谓“偏文类专业”，是指所有人文社科类学科的各专业，以及理工类学科中的一些偏人文、偏艺术的专业，例如，建筑学、城市规划、工业设计等。在大学所有的偏文类专业开设数学课，已成为全国高校的普遍做法，在全世界的教育界也基本成为常态。但仍然有一些问题至今困扰着相关的人们，比如说：大学偏文类学生为什么要学数学？偏文类大学生需要学哪些数学？偏文类大学生应该怎样学数学（或者说：怎样向偏文类大学生讲授数学）？等等。伴随着对这些问题的思考和探索，近年来陆续出现了多种不同的偏文类高等数学教材，包括本书。

作为一种探索性的教材，本书希望尽可能贴近偏文类大学生的特点，尽可能体现本书绪论中的思想——在保持高等数学基础体系相对完整的前提下，弱化“术”与“理”而强化“魂”。我们认为，这应该是偏文类高等数学教材有别于一般理工科高等数学教材的基本特色，因而也是探寻偏文类高等数学教材未来发展的方向。

基于上述想法，本书内容可分为两个单元：第1单元属于数学文化的内容，包括绪论、第1章、第2章和第9章，其中没有专门的数学内容，而是着重阐述数学的基本思想，并介绍一些相关的背景和知识。第2单元属于高等数学的基础内容，包括微积分（第3、4、5章）、概率统计（第6、7章）和线性代数（第8章）三个部分，虽然比较具体，但我们也尽可能地弱化技巧而注意讲述思想。限于学时，第1单元可以不作课堂讲授，而让学生自行阅读领会。前三章都安排了若干思考题，教师可以用适当的方式考察学生的阅读效果。第9章仅作为学生的阅读材料，不再安排思考题。第2单元的三部分内容则以课堂讲授为主，教师可以根据不同专业的学时要求灵活取舍。我们希望课程考试也能尽量适合偏文类学生的特点，弱化对计算技巧的考察，而强化对数学思想的理解和感悟的考察。

本书第1单元由唐明执笔，第2单元的前两部分（第3~7章）由成敏执笔、第8章由谢聪聪执笔。由于我们水平有限、对相关问题的研究还不够深入，本书在整体设计和具体叙述上难免会有许多考虑不当和疏漏甚至错误之处，祈望得到关心探索大学偏文类数学教材的同行们批评指教，以帮助我们不断改进。

本书由浙江工业大学2014年度校级重点教材建设项目（项目编号JC1416）资助。在本书策划、编写和试用过程中，浙江工业大学的邬学军教授、邱继征教授、罗国勋教授、冯玮博士等都给予了深切的关心、指导和参与，科学出版社也给予了积极的支持和帮助，专此鸣谢！

编者

2015年3月于杭州屏峰理学楼

目 录

绪论:偏文类大学生与高等数学	1
0.1 偏文类大学生为什么要学高等数学	1
0.1.1 为“用”而学:数学工具已在人文社科类各领域广泛应用	1
0.1.2 为“育”而学:数学教育对偏文类大学生有重要的训育作用	2
0.2 偏文类大学生怎样学高等数学	5
0.2.1 浅析数学的“层次”	5
0.2.2 浅析数学之“魂”	7
0.2.3 偏文类学生学习数学应该是“轻其技而重其魂”	11
思考题 0	12
第 1 章 数学成长的崎岖历程	14
1.1 数学史的分期	14
1.1.1 史前数学期(数学萌芽期)	14
1.1.2 初等数学期(古典数学期,常量数学期)	15
1.1.3 高等数学期(近代数学期,变量数学期)	16
1.1.4 现代数学期	17
1.2 数系和数集	18
1.2.1 数与进位制	18
1.2.2 复数系和其他的“数”	20
1.2.3 实数系的连续性	22
1.2.4 集合论简介	24
1.3 古希腊文明与第一次数学危机	28
1.3.1 古希腊文明——现代西方文明的源头	29
1.3.2 新生的数学学科遭遇第一次危机	30
1.3.3 第一次数学危机的历史意义	32
1.4 文艺复兴与第二次数学危机	33
1.4.1 文艺复兴:初等数学走到了变革的门槛	33
1.4.2 第一个决定性的步骤:创立解析几何,变量进入了数学	35
1.4.3 第二个决定性的步骤:建立微积分,开启了近代数学的主流	37
1.4.4 第三个决定性的步骤:克服第二次数学危机,奠定了数学大厦的 底层基础	40

1.5 公理化情结与第三次数学危机	45
1.5.1 源于古希腊的“公理化传统”	45
1.5.2 近代的“公理化运动”	47
1.5.3 罗素给了数学界一记闷棍	51
1.5.4 永远的“不完全性”	53
简短的小结	56
思考题 1	56
第 2 章 概念、命题与推理	60
2.1 概念与定义	60
2.1.1 概念	60
2.1.2 定义	62
2.2 命题与定理	63
2.2.1 判断与命题	63
2.2.2 公理与公设	64
2.2.3 定理与“定理群”	65
2.2.4 充分条件与必要条件	67
2.3 几种常用的数学推理	68
2.3.1 演绎与类比	68
2.3.2 化归与映射-反演	70
2.3.3 分析与综合	72
2.3.4 一般归纳法与数学归纳法	73
2.3.5 合情推理与猜想	75
简短的小结	75
思考题 2	76
第 3 章 函数与极限	77
3.1 直角坐标系	77
3.1.1 实数轴与邻域	77
3.1.2 平面直角坐标系	78
3.1.3 三维空间中的直角坐标系	79
3.2 函数及其图形	79
3.2.1 函数的概念	79
3.2.2 函数的图形	80
3.2.3 函数的性质	82
3.2.4 复合函数与反函数	84
3.3 初等函数简介	85

3.3.1 基本初等函数	85
3.3.2 初等函数	91
3.4 极限与连续	91
3.4.1 极限的思想与表达	91
3.4.2 极限的性质与计算	97
3.4.3 函数的连续性	101
简短的小结	104
习题 3	105
第 4 章 微分学	108
4.1 导数的概念	108
4.1.1 两个问题“殊途同归”	108
4.1.2 导数的概念	110
4.2 导数的运算	113
4.2.1 导数的运算法则	113
4.2.2 基本初等函数的求导公式	115
4.2.3 高阶导数	115
4.2.4 隐函数的导数	116
4.3 微分	117
4.3.1 微分的概念	117
4.3.2 微分的简单应用	118
4.4 导数的应用	119
4.4.1 中值定理	119
4.4.2 洛必达法则	121
4.4.3 函数的单调性和凹凸性	124
4.4.4 极值与最值	127
4.4.5 简单图形的绘制	129
简短的小结	132
习题 4	132
第 5 章 积分学	136
5.1 不定积分	136
5.1.1 逆运算与原函数	136
5.1.2 不定积分的概念	136
5.1.3 基本积分表	137
5.1.4 不定积分的线性性质	138
5.2 定积分	139

5.2.1	求曲边图形的面积	139
5.2.2	定积分的概念	141
5.2.3	定积分的性质	142
5.3	微积分基本定理	143
5.3.1	微积分基本定理	143
5.3.2	牛顿-莱布尼茨公式	144
5.4	各类积分方法简介	146
5.4.1	第一类换元法	146
5.4.2	第二类换元法	147
5.4.3	分部积分法	149
5.4.4	奇偶函数与周期函数的定积分	151
5.5	反常积分	153
5.6	定积分的一些应用	154
	简短的小结	156
	习题 5	156
第 6 章	概率论初步	159
6.1	随机事件及其概率	159
6.1.1	随机事件与样本空间	159
6.1.2	概率的三个定义	161
6.1.3	概率加法定理	163
6.1.4	条件概率和概率乘法定理	164
6.1.5	全概率公式和贝叶斯公式	166
6.2	随机变量及其整体描述	168
6.2.1	随机变量的概念	169
6.2.2	离散型随机变量的整体描述	170
6.2.3	连续型随机变量的整体描述	173
6.3	随机变量的特征描述	178
6.3.1	随机变量的数学期望	178
6.3.2	随机变量的方差	181
6.3.3	几种常用随机变量的期望与方差	183
	简短的小结	185
	习题 6	186
第 7 章	数理统计初步	189
7.1	总体与样本	189
7.2	统计量	190

7.2.1 统计量及其观测值	190
7.2.2 几个常用统计量	190
7.3 参数估计	191
7.3.1 参数的点估计	192
7.3.2 参数的区间估计	193
7.4 假设检验	194
7.4.1 假设检验的思想	194
7.4.2 正态总体参数的假设检验	195
7.4.3 假设检验可能犯的错误	196
简短的小结	197
习题 7	197
第 8 章 多元线性方程组	199
8.1 线性方程组与高斯消去法	200
8.1.1 问题的提出	200
8.1.2 矩阵的概念	203
8.1.3 高斯消去法的矩阵形式	205
8.2 矩阵的代数运算	207
8.2.1 矩阵的线性运算	207
8.2.2 矩阵的转置	208
8.2.3 矩阵的乘法	209
8.3 矩阵的初等变换与秩	214
8.3.1 矩阵的初等变换	214
8.3.2 矩阵的秩	217
* 8.3.3 逻辑的延伸	219
8.4 线性方程组的分类与解的表达	220
8.4.1 线性方程组的类型识别	220
8.4.2 用行初等变换求线性方程组的解	223
8.4.3 解的结构	225
* 8.4.4 不相容方程组的近似解	232
简短的小结	235
习题 8	236
第 9 章 数学的文化影响面面观	243
9.1 数学的文化地位	243
9.2 数学与天文学和历法	244
9.2.1 简单连分数	245

9.2.2	连分数与历法	247
9.2.3	开普勒的故事	250
9.2.4	牛顿：“站在巨人的肩上”	256
9.3	数学与美术	257
9.3.1	美哉“黄金分割”!	258
9.3.2	焦点透视体系与射影几何学	265
9.3.3	分形几何与绘画	273
9.4	数学与音乐	278
9.4.1	音乐是多维的宇宙语言	278
9.4.2	音律之谜	279
9.4.3	黄金分割与音乐	292
9.4.4	简谐振动与傅里叶分析	294
9.5	数学与语言学	300
9.5.1	索绪尔与现代语言学	300
9.5.2	数学和计算机对语言学的影响	301
9.5.3	我国现代语言学的发展	303
9.6	数学与经济学	305
9.6.1	数学与经济学的相互渗透和促进	305
9.6.2	两个例子	307
9.7	数学与其他人文社会学科	313
9.7.1	数学与人文精神	313
9.7.2	数学与宗教、哲学	315
9.7.3	数学与政治学、法学	316
9.7.4	数学与人口学、历史学	321
9.7.5	数学与诗歌、文学	324
	习题参考答案	330
	参考文献	340
	附表 标准正态分布表	342

纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要的钥匙,世界需要这把钥匙,文科也不可缺少这把钥匙。

——里约热内卢宣言

绪 论

在大学偏文类专业开设高等数学,始于美国,慢慢遍及世界,已经走过了近半个世纪的历程。

20世纪后半叶,随着计算机和网络的飞速发展,世界逐渐进入信息时代,数学、尤其是应用数学发展很快,并向包括人文社科类学科在内的各个学科广泛渗透,这就对包括理、工、文各专业的所有当代大学生都提出了数学素养的要求。1992年,联合国教科文组织宣布2000年为“世界数学年”,为此发布的《里约热内卢宣言》指出:“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要的钥匙,世界需要这把钥匙,文科也不可缺少这把钥匙。”于是,在大学偏文类专业开设高等数学逐渐成为国际性大趋势。

在我国,为偏文类大学生开设高等数学的探索始于1979年(北京大学),1997年国家教委高教司文科处就提出了一般性要求:1~2年内全国绝大部分人文社会学科本科专业都要开设高等数学,5年内(1998~2003)配套改革要有明显效果。由此开始,我国也逐渐普及了大学偏文类数学课,并涌现出许多相关的论文和教材,还进行过若干次全国性的交流。

但是,关于如何开设大学偏文类高等数学,总体上还处在摸索中,有一些问题还需要深入思考、统一认识,尤其是以下三个问题:

(1) 学习目的性:偏文类大学生为什么要学高等数学?高等数学对人文社会科学究竟有什么意义?

(2) 学习内容选择:偏文类大学生需要学哪些数学内容?需要安排多少学时?

(3) 学习方法:偏文类大学生应该怎样学高等数学?教材和教学方法怎样体现偏文类的特色?

作为绪论,我们就问题(1)和问题(3)谈一点想法(问题(2)则还需作更广泛深入的研究,本书便是一个探索)。

0.1 偏文类大学生为什么要学高等数学

0.1.1 为“用”而学:数学工具已在人文社科类各领域广泛应用

“为什么要学高等数学”?最浅显的解释是:过去文科大学生不学数学,是因为

“文科用不到数学”。如今数学对理工农各学科的渗透早已是不争的事实，“数学有用”了，自然就要学了。

自文艺复兴开始，数学的蓬勃发展催生了现代科学，而各门科学的发展也都伴随着、甚至依赖于数学的发展，“数学化”成了学科进步的标志之一。伽利略曾说：“宇宙是永远放在我们面前的一本大书，……这本书是用数学写成的，……不借助于数学就一个字也看不懂，没有它我们只会在黑暗的迷宫中踟躅。”培根形象地比喻说：“数学是科学的大门和钥匙。”马克思则断言：“一种科学只有成功地运用数学时，才算是真正达到了完善的程度。”今天的科学进展，雄辩地印证了大师们的话。

在人文社科类的各学科中，经济学最早运用数学，1838年法国经济学家魁奈发表的著作《财富理论的数学原理的研究》就已有清晰的供求与价格模型。发展了一百多年，如今的经济学科已经高度数学化，形成了包括数理经济学、计量经济学、金融学、精算学、经济控制论、博弈论、不动点算法理论，乃至集值映射的微积分学、非光滑分析等分支的庞大家族。

数理统计是目前应用得最广泛的数学工具之一，在社会调查与管理、侦查与审判、语言词汇管理、文学风格辨识、历史数据处理等方面，都显示了巨大的功能。近年还陆续诞生了计量语言学、数量社会学、数量历史学等学科，产生了“新经济史”、“新政治史”、“新社会史”等学派，1980年还成立了“历史数量方法国际委员会”，他们所用的数学方法，有的已经超出了数理统计的范畴，如现代语料库语言学就用上了群论和数理逻辑。

在绘画与雕塑、建筑设计、园林景观设计、产品与包装设计、视觉传播、影视特效制作和后期处理等追求视觉效果的艺术领域，解析几何、微分几何、射影几何、分形几何、计算机辅助设计，乃至拓扑变换、保形变换，都已成了必不可少的数学工具。那些比较先进的图形处理软件，都构筑在空间变换的基础上，不但需要娴熟的数学技能，而且需要高度的空间理解力和想象力。

至于现代的安全、信息、网络和数码技术，更是完全建立在现代数学基础之上。

总之，数学已经无处不在、无人不用，所以，为用而学，顺理成章。在一些学科前沿的学术交流中可以发现，中国人文学科与世界前沿的差距，有许多就在于数学方面。

0.1.2 为“育”而学：数学教育对偏文类大学生有重要的训育作用

数学本身也充满着深刻的人文精神，数学教育深刻地影响着大学生的综合素质。

数学史学家 M·克莱因指出：“音乐能激发和抚慰情怀，绘画能使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学能使人获得智慧，科学可以改善生活，但数学却能提供以上的一切。”他还说：“数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家都十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说；满足了人类探索宇宙的好奇心和

对美妙音乐的冥想;有时甚至可能以难以觉察到的方式但无可置疑地影响着现代历史的进程。”布柔德本认为:“作为我们当今如此众多科技的首要基础,作为如同一门伟大创造艺术那样重要的分支,作为一个万能语言以及一个基本的思维方式,我们很难对数学是现代文化的完整部分这一断言提出什么争议。”中国学者姚孟臣也说:“人们早已习惯于把数学看作科学的工具和语言,却往往忘记了数学也是一种十分重要的思维方式和文化精神。对于一个合格的大学文科毕业生,这种思维方式不仅是十分基本的,而且是无法通过其他途径获得的。”

确实,在学校学的数学知识,毕业后若没有什么机会去用,很快就会忘掉。然而不管大学生们将来从事什么工作,唯有深深铭刻在头脑中的数学的精神、数学的思维方式、研究方法、推理方法和看问题的着眼点等,却随时随地发生作用,使他们受益终生。

数学的训育作用,主要体现在精神培育和思维训练两个方面。

1. 培育理性精神:数学是人类文明中理性精神的重要源头

人类之所以能从动物界脱颖而出,在于人有了理性、有了思想。早在公元前5世纪苏格拉底就指出:“人是有思想的动物”,“人之所以为人不在于他有感觉,而在于他有灵魂、有思想。”正如理性水平是衡量一个人成熟水平的尺度一样,一种文明发展水平的基本标识就是理性的高度和深度。而人类理性的崛起和成长,就与数学有着密切的关系。

从人类起源直到公元前7世纪,各远古文明都已积累了许多经验和技能,但那些知识只是感性体验和经验技能,即便能解决一些实际问题,但零散而乏序,没有理论、更没有科学。公元前6世纪,古希腊学者泰勒斯首次用逻辑演绎证明了当时已有的若干几何结论,并推演出几个新的结论,数学学科由此发端,成为最早萌生的学科。也是由泰勒斯开始,希腊人追问世界的本源、思考人的本质,开启了哲学的源头。公元前5世纪发生于古希腊的第一次数学危机,使人们看到了直觉和经验的肤浅,认识到推理和逻辑的重要,开始懂得人的认识不能止于感性和经验,而要上升到理性才更接近真理,这大大推进了希腊人的理性化观念。这个推进后来结出了两大硕果:一是亚里士多德创立的逻辑学体系和公理化思想,二是欧几里得《几何原本》所代表的公理化理论架构和严谨的逻辑论证模式。这两大硕果以后逐渐成长为人类文明的核心理念,延续至今。古希腊人凭借他们崇尚理性思维和逻辑演绎的特质,慢慢地把前人积累的经验 and 知识系统化、理论化,逐渐创立起数学、哲学、伦理学、逻辑学、政治学、美学、文学(包括诗歌、戏剧)、修辞学、音乐、美术(包括绘画、雕塑)以及建筑学、物理学、天文学、医学、植物学、动物学等现代最重要的学科。罗素说:“古希腊屹立于我们大部分学术的最前端,他们的思想至今影响着我们,……”因此可以说,古希腊是现代文明的发祥地。古希腊文明的勃兴,标志着人类理性的崛起,古希腊人的理性精神和逻辑思维赋予了现代文明以崭新的基本特征。无疑,学习并了解这样一个过程,对培育大学生的

理性精神有重要作用。

有人认为,理工科学生才需要理性,而偏文类学生更需要感性,这是把理性与感性割裂了。应该知道:感性必须有理性内核,才会更坚实、更深刻、更有品位,而有了丰富的感性,理性也才会有本源、接地气,才会有血有肉、有情有味、多姿多彩。所以,理性与感性应该共同发展、交相辉映。对偏文类大学生加强数学教育,和对理工类大学生加强人文艺术教育,同样都很重要。

2. 训练数学思维:数学思维也是偏文类大学生所必需的

古希腊人十分推崇数学的思维训育功能。柏拉图于公元前4世纪兴办的阿卡德米学院(欧洲历史上第一所综合性学校)虽然教授许多不同的科目,却都要求以数学作为基础训练,学院大门上赫然写着“不懂几何者请勿入内”。柏拉图的学生亚里士多德更加强数学的思维和推理(在他那里,数学和逻辑学是密不可分的),他开创的逻辑学和公理化思想深刻影响了整个人类文明。

时至现代,数学家柯朗认为:“微积分(数学分析)是人类思维最伟大的成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别有效的工具。”波利亚说:“严格证明是数学的标志,这是数学对于文化修养所提供的不可缺少的营养。一个学生若对数学证明从未留下印象,那他就缺少了一种基本的思维经历。”姚孟臣也说:“从某种意义上说,数学实际上已经成为现代人类思维过程的基础。”

作为一门学科,数学本质上是思维科学,它不但讲究“怎么算”,更讲究“怎么想”,数学理论主要是研究“想法”即思维方法的,算法只是想法的外在结果,或者说是实现想法的具体操作方式。作为人类思维最精美的创造物之一,数学的成果不是物质的,而是思想的。如果说数学有用,那么不仅是它的算法和公式有用,它的想法更有用。

抽象性是数学思维的主要特色。这种抽象可以逐层提升,超越任何其他学科所能达到的高度。同时数学抽象还关注对象的结构,通过分析结构来整体性地把握对象。如果用这种思维来观察社会历史现象,就会明白“结构产生机制、机制产生效应、效应产生现象”的道理。不改变机制,现象是改变不了的;而要改变机制,就必须从改变结构入手。

逻辑性是数学思维的另一特色。借助于精确而简洁的符号语言,数学的逻辑演绎可以非常简洁、严谨而流畅。严密的逻辑性使论证无可辩驳、使结论无可置疑,这是数学真理性的基石。对于所有需要进行严密论证的场合(立法、著文或论辩),这种逻辑性就十分重要了。历史上,数学的严谨和简洁曾深深地影响过18、19世纪的欧洲文坛,造就了当时的“新文风”;而今天的各种法律文书、合同文本,即便不用任何数学符号,看上去也都像是数学文献。

思维的辩证性,是高等数学与初等数学的根本区别。马克思说过:要掌握形式逻辑,必须学数学;而要掌握辩证逻辑,必须学高等数学。高等数学充满了辩证法,静与