高职高专数学系列新世纪规划教材

总主编 曾庆柏

DAXUE SHUXUE YINGYONG JICHU

大学数学应用基础

主编 刘健文 陈运明

上册

湖南教育出版社

高职高专数学系列新世纪规划教材

DAXUE SHUXUE YINGYONG JICHU

大学数学应用基础

上册

总主编 曾庆柏

主　编 刘健文　陈运明

副主编 付　丽　周健君　黄益荣

谢再新　陈晓霞

主　审 阎　颖

湖南教育出版社

内容提要：

本书是高职高专新世纪规划教材，是根据《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲（非师范类）》编写的．全书分上、中、下三册，本书是上册，内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用等 5 章，书末附有初等数学常用公式、希腊字母表、部分习题的答案或提示．

本书将教材与辅导融为一体，一书两用，每章末设“学习与指导”，例题、习题丰富，重点内容滚动复习，便于自学．同时为让学生学会用计算机解题，每章后编有数学实验，解决了数学应用中的计算瓶颈。

本书适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书．

大学数学应用基础（上册）

书　　名：大学数学应用基础（上册）
作　　者：曾庆柏（总主编）
责任编辑：蒋　芳

湖南教育出版社发行（长沙市韶山北路 643 号）
湖南省教育印刷厂印刷
787 × 960　16 开　印张：17.5　字数：335,000
2004 年 6 月第 1 版　　2004 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-5355-4229-8/G·4224
定价(上中下册)：59.80 元

参加讨论和编写的学校:

中南大学

长沙理工大学

湖南科技大学

湘潭大学职业技术学院

湖南省第一师范学校

湖南工业职业技术学院

湖南科技职业技术学院

湖南交通职业技术学院

湖南大众传媒职业技术学院

湖南生物机电职业技术学院

湖南工程职业技术学院

湖南城建职业技术学院

湖南铁道职业技术学院

湖南化工职业技术学院

湖南机电职业技术学院

湖南环境生物职业技术学院

湖南对外经济贸易职业学院

长沙民政职业技术学院

长沙航空职业技术学院

长沙通信职业技术学院

长沙环保职业技术学院

长沙商贸旅游职业学院

湘潭职业技术学院

衡阳职业技术学院

岳阳职业技术学院

常德职业技术学院

娄底职业技术学院

郴州职业技术学院

张家界航空工业职业技术学院

前　　言

本书是高职高专新世纪规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲（非师范类）》编写的．全书分上、中、下三册，适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书．

本书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率、数理统计初步、数学建模等．

各章内容分模块、分层次编排，用 * 号标注的内容为“专业模块”，供工科类和经济管理类专业选用；用小号字编排的内容为“难度模块”，供不同学习目标的学生选用；主要章节后编有数学实验，供教学时上机实验用；每章后编有学习指导和总复习题，在学习指导中，对各章典型例题和解题技巧做了综合讲解，可作为每章复习用，也是“专升本”考试复习的精要指南；第一册书末附有初等数学中的常用公式和希腊字母表，供学生学习时查用．各册后附有部分习题的答案或提示，供学生学习时参考．本书所配的教学光盘可以从湖南教育出版社网站（ftp://ftp.hneph.com/ftpdownload/）下载．

本书遵循高等教育的教学规律，坚持“以应用为目的，以必需够用为度，以可读性为基点，以创新为导向”的编写原则．具有以下特色：

第一，针对现行普高和中职新数学教材体系编写，突出了初等数学与高等数学的紧密衔接．普通高中和中等职业学校新数学教材体系中，幂函数、反三角函数、数学归纳法、极坐标等内容已大大弱化或删去，但向量等内容得到了充实，为了使学生从初等数学到高等数学顺利过渡，对传统高等数学中需要的初等数学内容进行了适当回顾、增补和删减，如在第一章函数部分增补了幂函数、反三角函数，在第七章二重积分部分增补了极坐标，在第六章向量与空间解析几何部分删减了部分向量内容等，使初等数学与高等数学衔接得更加紧密．

第二，针对现代教育以学生为主体的理念编写，有较强的可读性．在引进数学概念时，尽量借助几何直观图形、物理意义和生活背景来进行解释，力使抽象的数学概念形象化、直观化、通俗化，切合学生的实际；为降低难度，在论证或解题时，设置了渐进式的思维层次，保留了合适的推理细节，一读就懂；对较难的概念，设置为

模块，学习时可忽略，而不影响系统性，如 $\varepsilon-N$ 语言，$\varepsilon-\delta$ 语言，微分中值定理的证明等，因此不会对学习产生障碍.

第三，针对高职高专各专业的实际编写，有较强的选择性. 高职高专教育专业繁多，且差异较大，为了适应各专业使用，对全部内容做了分层处理，选定各专业都必须使用的基本内容作为基本层，在此基础上用模块进行组装，构造不同层次，如在第一章中编写了"建立函数关系举例"和"经济中常用的函数"，在第二章中编写了"导数的经济意义"和"二阶导数的力学意义"模块等，使本书既适用于理工科类专业，也适用于经济管理类各专业，还适用于各类"专升本考试"培训，弹性大，可选择性强.

第四，针对高职高专的培养目标编写，有较强的实用性. 高职高专教育主要培养生产第一线的应用型高级技术人才，为了实现这一目标，本书在理论和计算方面降低了难度，但在数学的应用和使用现代信息技术手段方面进行了充实和强化. 编写了数学建模方面的内容，以培养学生用数学的意识；编写了数学实验，介绍了目前计算功能非常强大的 MATLAB 软件的使用方法，让学生学会用计算机解题，从而提高学生学习数学的兴趣，同时，将繁难的计算问题交给计算机完成，解决了数学应用中的计算瓶颈.

本教材的基本教学时数约 110 学时，标有 * 号的内容另行安排课时.

组成本套教材编委会的成员均来自国内著名高校及全国近三十所高职院校的具有丰富教学经验的教师，他们既深知我国高职高专教育的发展现状，又了解本学科教与学的具体要求，为保证编写质量，编委会对编写大纲进行了反复修改、讨论，并推选了一批教学水平高、又有长期教材编写经验的老师参与教材的编写和审定. 在本书的编审过程中，得到了各编审人员所在单位的领导的大力支持，并为本书的编写提出了许多有益的建议，谨在此表示衷心感谢. 吴双利老师为本教材的录入、校对作了大量工作，在此一并致谢.

由于成书仓促，编审人员水平有限，不足之处，请有关专家、学者及使用本书的老师指正. 我们诚恳地希望各界同仁及广大教师关注并支持这套教材的建设，及时将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考.

高职高专新世纪规划教材编写委员会
2004 年 3 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科. 极限概念是微积分的重要基本概念之一，微积分的其他重要概念如导数、微分、积分等都是用极限表述的，并且它们的主要性质和法则也是通过极限方法推导出来的. 本章将在我们已学习过的函数的基础上进行系统复习和必要补充，再介绍极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质，为以后各章的学习做准备.

1.1　函数

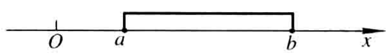
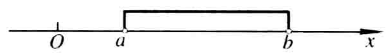
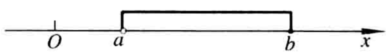
1. 常量与变量

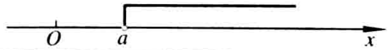
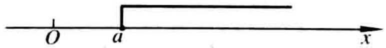
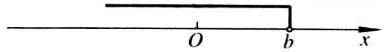
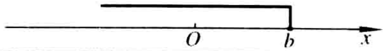
在研究实际问题时，我们会遇到各种各样的量. 如长度、面积、体积、时间、距离、速度等等. 在某个过程中，保持不变的量叫作**常量**，可以取不同值的量叫作**变量**. 例如，在货物的调运过程中，火车运行的时间、速度、距离等是变量，而运载的货物的重量是常量.

注意　一个量是常量还是变量，要根据具体情况做出具体分析. 例如，在自由落体运动中，在一定高度之内重力加速度可以看作常量，但当超过一定高度时，重力加速度则应看作变量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量.

对于某个问题来说，一个变量只能在一定的范围内取值. 为了简单起见，变量的取值范围常用**区间**表示. 常用的区间有以下几种（$a,b\in\mathbf{R},a<b$）：

名　称	记　号	集合表示法	图　示
闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$	
半开半闭区间	$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	
	$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	

无穷区间	$(a,+\infty)$	$\{x\mid a<x<+\infty\}$	
	$[a,+\infty)$	$\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x\mid -\infty<x<b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$	
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$	

以后,当不需要指明是哪一类区间时,我们就简单地称它为“区间”,且常用字母 I 表示.

特别,我们把开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ $(\delta>0)$ 叫作点 a 的 δ **邻域**,a 叫作**邻域的中心**,δ 叫作**邻域的半径**(图 1-1).

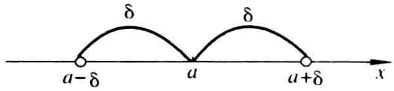


图 1-1

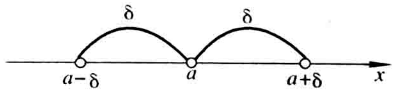


图 1-2

点 a 的 δ 邻域可用不等式表示为 $a-\delta<x<a+\delta$. 对该不等式中各式同时加上 $-a$,得 $-\delta<x-a<\delta$,它等价于绝对值不等式 $|x-a|<\delta$. 例如,$|x-3|<0.01$ 表示以 3 为中心,以 0.01 为半径的邻域,它就是开区间(2.99,3.01).

如果在点 a 的 δ 邻域中去掉 a,所得集合为 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,则称它为点 a 的**去心 δ 邻域**(图 1-2).

2. 函数的概念

一般来说,在一个问题中往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是直接或间接地相互联系又相互制约的. 它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律,这种规律用数学进行描述,就是函数关系.

看下面两个实际例子:

例 1 对圆的面积 A 与它的半径 r 进行考察,我们得到这两个变量间的相依关系由公式

$$A=\pi r^2$$

确定. 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时,根据上述公式,变量 A 都有唯一确定的值和它对应.

例 2 在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,落下的距离为 s,并假定开始下落的时刻为 $t=0$,则变量 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定,其中 g 为重力加速度. 如果物体着地的时刻为 $t=T$,则当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时,根据上述公式,变量 s 都有唯一确定的值和它对应.

由以上两例,我们抽象出函数的概念.

定义　设 x、y 是两个变量,D 是一个实数集. 如果对于 D 内的每一个数 x,按照某个对应法则 f,变量 y 都有唯一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$. x 叫作**自变量**,y 叫作**因变量**,实数集 D 叫作这个函数的**定义域**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 相对应的 y 的值叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 函数 $y=f(x)$ 所有函数值的集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$叫作函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可以改用别的字母,如"g","φ","F"等,这时函数就记作 $y=g(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=F(x)$ 等. 当同时考察几个不同的函数时,就需要用不同的函数记号以示区别.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如,例 1 中,定义域 $D=(0,+\infty)$;例 2 中,定义域 $D=[0,T]$.

但在数学上作一般性研究时,对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数,我们规定:函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 3　求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$.

(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$.

(3) $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+x)$.

解　(1) $1-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow |x|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow D=[-1,1]$.

(2) $\begin{cases}4-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq \pm 2,\\ x\geqslant -2,\end{cases}\Rightarrow D=(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1+x>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x>-1,\end{cases}\Rightarrow D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$,对应的函数值为 $y=f(x)$,则以 x 为横坐标,y 为纵坐标就确定了平面上的一点 (x,y). 当 x 遍取 D 上的数值时,就得到点 (x,y) 的一个集合

$$G=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}.$$

这个点的集合 G 叫作函数 $y=f(x)$ 的**图像**(图 1-3).

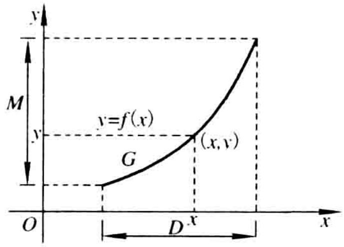


图 1-3

例 4　求下列函数的定义域、值域,并作出其图像:

(1) $y=f(x)=4$.

(2) $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\ -x,x<0.\end{cases}$

解　(1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,变量 y 都有唯一确定的值 4 和它相对应,即函数都有定义,所以这个函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{4\}$. 它的图

像是一条平行于 x 轴的直线(图 1-4).

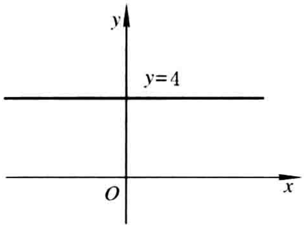


图 1-4

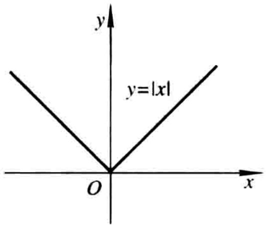


图 1-5

(2)函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=[0,+\infty)$. 它的图像如图 1-5 所示.

由函数的定义知,一个函数由它的定义域 D 和对应法则 f 唯一确定. 因此,如果两个函数的定义域与对应法则相同,则这两个函数就是**相同的**(或相等的),否则就是不同的. 如果两个函数相同,则它们的自变量和因变量用什么字母表示,是无关紧要的. 例如,$y=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=v^2,v\in(-\infty,+\infty)$ 表示同一个函数.

例 5 下列各对函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$.

(2) $f(x)=1,g(x)=\sin^2x+\cos^2x$.

(3) $f(x)=x,g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1)不相同,因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,它们的定义域不同,所以不是同一个函数.

(2)相同. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,且对同一个 x,有 $1=\sin^2x+\cos^2x$,即对应法则相同,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数.

(3)不相同. 虽然两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但对应法则不同,例如当 $x=-1$ 时,$f(-1)=-1,g(-1)=1$,不相等.

下面讨论两个常用的函数.

例 6 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

叫作符号函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{-1,0,1\}$,它的图像如图 1-6 所示.

例 7 设 x 为任一实数,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如,

$\left[\dfrac{1}{2}\right]=0,[\sqrt{3}]=1,[-2]=-2,[\pi]=3,[-\pi]=-4$. 我们把函数

$$y=[x]$$

叫作取整函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\mathbf{Z}$. 它的图像如图 1-7 所示.

我们看到,有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.

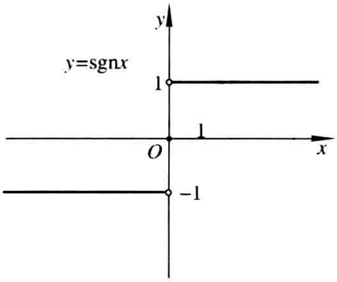


图 1－6

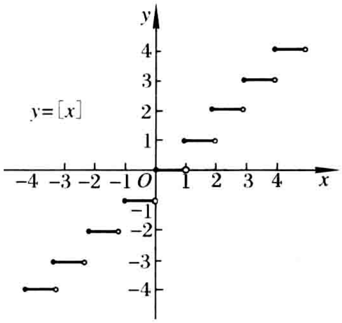


图 1－7

例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1+x, & 0\leqslant x,\\ 1-x, & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[-1,0)\cup[0,+\infty)=[-1,+\infty)$. 当 $x\in[-1,0)$ 时，对应的函数值表达式为 $f(x)=1-x$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，对应的函数值表达式为 $f(x)=1+x$. 例如，因为 $-\frac{1}{2}\in[-1,0)$，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$；因为 $0\in[0,+\infty)$，所以 $f(0)=1+0=1$；因为 $1\in[0,+\infty)$，所以 $f(1)=1+1=2$. 函数的图像如图 1－8 所示.

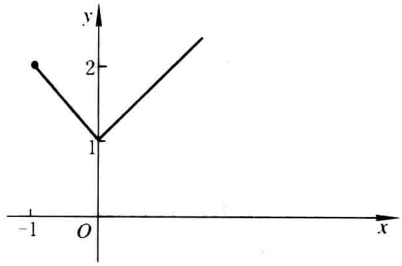


图 1－8

分段函数在自然科学和工程技术中有着重要的应用.

习题 1－1

1. 用区间表示下列变量的变化范围：

(1) $-1<x<7$.

(2) $x\geqslant 3$.

(3) $x^2\geqslant 4$.

(4) $|x-2|\leqslant 6$.

2. 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$.

(2) $f(x)=x+1, g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.

(3) $f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$.

(4) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg|x|$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x+3}$. (2) $y=\sqrt{3x-6}$.

(3) $y=\frac{1}{x^2-3x}$. (4) $y=\sqrt{x^2-16}$.

(5) $y=\frac{1}{x+2}+\sqrt{x+5}$. (6) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

(7) $y=\frac{1}{x-1}+\lg(x+1)$. (8) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. 设$f(x)=\sqrt{4+x^2}$. 求$f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(x_0)$, $f(x_0+h)$.

5. 设$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求$f(-x)$, $f(x+1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

6. 设$y=\begin{cases}1-x, x\leqslant 1,\\ 1+x, x>1.\end{cases}$求$f(-1)$, $f(1)$, $f(\pi)$, $f(-\sqrt{2})$,并作出函数的图像.

7. 设$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$求$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

8. 求函数$y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$的定义域和值域.

1.2 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义1 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称$f(x)$为**奇函数**. 如果对于任一$x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$为**偶函数**.

例如,函数$f(x)=x^3$是奇函数,因为$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. 函数$f(x)=x^4$是偶函数,因为$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$. 函数$f(x)=x^2+x^3$不是奇函数,也不是偶函数,因为它不满足定义的条件.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于y轴对称(图1-9).

2. 函数的单调性

定义2 设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I\subseteq D$. 如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间I上是**单调增加**的(图1-10),区间I称为**单调增加区间**;如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1<x_2$时,都有