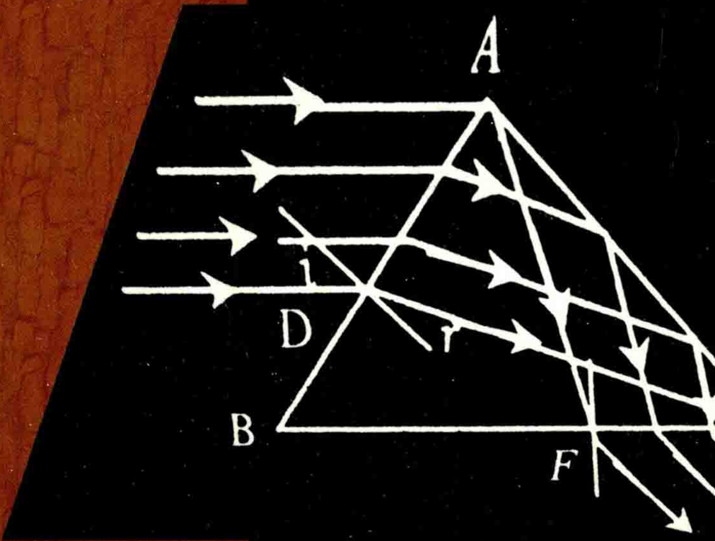
土壤科学中的数学方法

李航 张洪 编著



中国农业出版社

土壤科学中的数学方法

李航 张洪 编著

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

土壤科学中的数学方法/李航，张洪编著．-北京：中国农业出版社，2001.4
ISBN 7-109-06543-X

Ⅰ．土…　Ⅱ．①李…②张…　Ⅲ．数学方法-应用-土壤学　Ⅳ．S15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 08214 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：沈镇昭
责任编辑　贺志清

中国农业出版社印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行
2001 年 5 月第 1 版　2001 年 5 月北京第 1 次印刷

开本：850mm×1168mm 1/32　印张：7.25
字数：200 千字　印数：1～1 000 册
定价：35.00 元

内容简介

本书包含了除数理统计和线性代数以外的土壤学中常用的重要的基本数学知识。全书共分八章：第一章介绍了实函数和复变函数的一些基本概念和基本理论；第二章、第三章介绍了微积分方法；第四章讨论了有关矢量分析与场论的基本知识；第五章介绍了与土壤学有关的一些常用级数的展开方法，并结合级数展开讨论了留数理论的有关问题；第六章为土壤学中常用的积分变换方法——Laplace 变换；第七章为常微分方程；第八章着重讨论了土壤学中常见的数学物理方程的建立和常用的求解方法。全书避免了一般数学书籍那种高深的表达方法，将重点放在数学理论的土壤学应用上。

本书可供土壤学专业高年级大学生、硕士和博士研究生以及有关教师和科研人员参考。

前　言

写这本书的动机是基于这样的事实：在我所接触过的土壤学专业的高年级大学生、硕士和博士研究生中，对于理解许多土壤学问题所必需的基础数学的处理能力和理解能力都表现出惊人的缺乏。自从20世纪50年代以来，特别是近20年来，土壤学的面貌发生了根本性变化，数学方法已经广泛应用于土壤生态、土壤物理、土壤化学的各个领域。比如，关于土壤内部水热传输与溶质输运；土壤圈物质、能量的地球化学循环；土壤化学与土壤生物化学动力学；土壤溶液热力学；土壤表面化学以及土壤生态系统的非平衡态热力学等方面的概念与理论，都需要借助于这种或那种数学才能充分地表达。“土壤学已进入数学化、定量化和模型化研究阶段”这一观点已成为国际土壤学界的普遍共识。今天或未来的土壤学工作者，如果没有扎实的数学功底，他将失去的不仅是自学能力、阅读文献的能力，还可能失去创新能力。

学生对许多数学理论掌握不好，不完全是他们自己的过错，学校与教师方面都有不可推卸的责任。从学校方面来说，“实用主义”的教学理念一直充斥着中国大学。从某种意义上说，我们的大学教育类似于实用技术培训班。数学教育一直没有引起农业院校的高度重视，这与大学担负着培养高素质创造型人才的要求是不相适应的。在美国的“关于科学技术的国家目标”中明确指出：“高技术就是数学的技术”；“只有大学提供最好的数学和科学教育，美国才能培养出世界一流的科学家和工程师”，甚至在“国家目标”中提出了“提高全体国民的数学素养”的问题。所以在土壤学的革命性变化正在悄悄发生的今天，数学教育问题的

确值得我们深思。在教师方面，大学的数学教育很少与实际问题联系起来，学生学完数学后往往不知道所学的数学理论有什么用处，更不知道这些数学知识如何与自己的专业联系起来。当然教授数学的教师也只能这样，因为他们的手上有大量的材料用来介绍数学的基本概念，他们不可能在十分有限的时间里提供各方面的大量应用。所以大学里在开设纯粹数学的同时，应开设各专业的应用数学。

由于线性代数和数理统计方法早已进入到了土壤科学的研究之中，并为广大土壤学工作者所熟悉，所以本书略去了这部分内容。本书将重点介绍“微分与积分方法”，“矢量分析与场论”，“级数展开与留数定理”，“积分变换”，“常微分方程”以及“数学物理方程的建立与求解”等方面的内容。本书避免采用一般数学书中那种高深的表达方式，在直接给出有关数学概念或基本原理后，立即讨论其应用，并以土壤学中的实际问题作为应用实例进行讨论。希望读者能够通过对本书的学习，逐步学会如何将一个土壤学问题表达成一个数学问题，然后如何借助于数学上的逻辑分析方法去解决土壤学中的实际问题，进而提出有关土壤学的新概念、新理论和新方法。所以本书对所有土壤学工作者都具有实用价值。希望本书的出版为提高我国土壤学工作者的数学素养起到一定的推动作用，从而使我国土壤学研究水平尽快跟上世界土壤学的发展步伐。

本书的完成得到了西南农业大学青长乐教授、魏世强教授的关心和热心的指导，在此表示衷心感谢。同时也要感谢作者的家人所给予的生活上的关心和精神上的鼓励。

在写作过程中，笔者深感自己水平有限。因此，书中错误在所难免，望读者提供宝贵意见。

李 航　张 洪

2000 年 6 月于重庆

目　录

第一章 函数与代数的基本知识

第一节 函数的基本概念

我们知道土壤是一个含有多个变量的复杂系统，这些变量不仅可能是时间上或空间上的，还可能是性质上的。研究这些变量之间的关系是土壤科学研究的根本内容。如果我们把这些变量数量化，则各变量之间的对应关系就称为函数。在数学上，函数的确切定义通常表达为：

设有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的变化范围内的每一个值，y 按一定的规则有一个确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数。或者

函数就是从其定义域 X 中取出任意元素 x 而得到值域 Y 中的一单值元素 y 的对应法则。这里 x 称自变量，y 称因变量。函数有时又称“映射”。如果用 f 来表示 X 与 Y 的对应规则，则函数可以表达为：

$$y=f(x)$$

于是函数（或映射）可用图 1-1 形象地表示出来。

相应地，如果变量 y 是以 x_1，x_2，x_3，……，x_n 为自变量的多

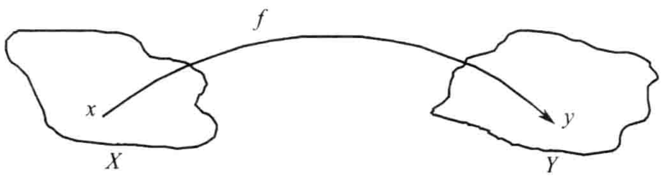


图 1-1 函数或映射

元函数，则函数可以表达为：

$$y = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

在实际应用中，如何确定对应规则或函数关系是问题的关键。通常情况下，我们采用如下几种方法来确定函数关系。

（1）直接由实验观测数据所反映的变量间的数值对应规律，通过作图法来了解其函数关系　但是由于实验数据往往会受一些偶然因素的作用，所得的图形可能不是一些连续光滑的曲线，所以作图时应作适当处理。

例 1.1.1　刘志强等人的研究发现，在晴天条件下，用温度自动记录仪测得 1d 内某一山间谷地土壤的表土温度（T）随时间（t）的变化关系图为：

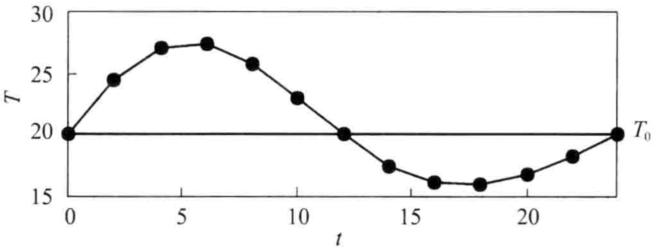


图 1-2

根据该图，估计 $T = f(t)$ 的函数关系。

解：从图 1-2 可以看出，1d 内土温随时间是振荡变化的，并且其振幅随时间的推移是衰减的。表明图 1-2 所示的曲线类似于阻尼振荡过程，因而可用如下方程近似地加以表达：

$$T = f(t) = T_0 + Ae^{-\beta T}\sin(\omega t + \varphi) \qquad 1.1.1$$

这样我们就得到了 $T = f(t)$ 的近似函数关系。

例 1.1.2　实验测得土壤水不饱和流动的扩散率 $D(\theta)$ 与含水量 θ 的关系由图 1-3 所示。根据该图确定 $D = D(\theta)$ 的函数关系。

解：从图 1-3 可以看出，在低的 θ 值时，$D(\theta)$ 随 θ 增长很缓慢，但随着 θ 值的进一步增大，$D(\theta)$ 则迅速增加。显然对于这种曲线可以采用如下的指数函数近似地表达：

$$D = D(\theta) = Ae^{\beta\theta} \quad 1.1.2$$

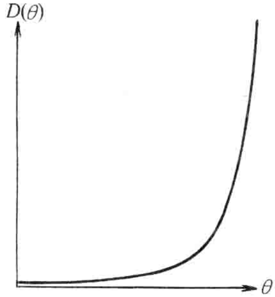


图 1-3

在上面的两个例子中，只是初步确定出了函数的类型，函数中各参数的具体数值还必须用统计的方法（如回归分析方法）来确定。由于已有很多专门的书籍介绍这种方法，所以本书不打算就统计分析方法作介绍。

(2) 根据某些已知的函数关系推导未知函数

例 1.1.3　在采用静水沉降法测土壤机械组成时，必须首先建立起土粒沉降一定距离所需时间（t）与颗粒半径（r）之间的函数关系：$t = f(r)$。这个关系可从已知的两个函数关系推导出来。一是颗粒沉降速度（v）与颗粒半径（r）之间的函数关系，即 Stockes 定律：

$$v = \frac{2}{9}\frac{(d_1 - d_2)gr^2}{\eta}$$

式中，d_1 为颗粒密度，d_2 为介质密度，g 为重力加速度，η 为介质黏滞系数。另一个关系是，在颗粒作匀速沉降时，沉降一定距离（S）所需的时间（t）与沉降速度（v）的关系为：

$$t = \frac{S}{t}$$

结合这两个函数关系就可推导出 $t = f(r)$ 的函数关系：

$$t = \frac{2}{9} S \frac{\eta}{(d_1 - d_2)gr^2}$$

(3) 在给定条件下（边界条件和初始条件），通过求解微分

方程来获得变量之间的函数关系

这种方法在科学研究中是最重要、最普遍的一种方法，这种方法在一门学科中的普遍应用是该学科趋向成熟的重要标志。因为这些微分方程（或偏微分方程）是从大量的实验事实中抽象出来的带有普遍性和原理性的方程，它所包含的信息量是无穷的。比如 Maxwell 电磁场方程包含了所有经典电磁学理论的基本内容；又比如在量子力学中，一切非相对论量子力学问题都归结为对偏微分方程 Schetinger 方程的求解。除此之外，我们说这些方程是普遍性的，还因为这些方程不仅能解释已知的实验现象，而且还能推演出未知的实验现象。这些微分方程在一门学科中的出现也标志着该学科的研究方法已经由感官的观察发展成理性的推演，前者往往表现出无明确的方向性和目的性，因此，是低效率的、不经济的。而后者由于进入了一种有序的逻辑推演体系中，所以往往带有明确的目的性和方向性，因而是高效率的、经济的。后面有关章节我们将详细讨论各种微分方程的求解方法。

第二节　初等函数及其图形

1.2.1　基本初等函数

基本初等函数就是那些最简单、最常见的函数。经仔细分类，基本初等函数包括如下 6 种

（1）常量

$$y=c$$

（2）幂函数

$$y=x^n，n \text{ 为任意实数}$$

（3）指数函数

$$y=a^x，a>0，a\neq 1$$

（4）对数函数

$$y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$$

（5）三角函数

$y=\sin x$，　　$y=\cos x$，　　$y=\tan x$

$y=\cot x$，　　$y=\sec x$，　　$y=\csc x$

（6）反三角函数

$y=\arcsin x$，　　$y=\arccos x$，

$y=\arctan x$，……

这 6 种基本初等函数经四则运算有限地组合起来就构成了各种不同的初等函数，反映了事物不同的内涵。这就像 26 个英文字母按特定的方式组合起来代表了不同的含义一样。

1.2.2 基本初等函数的图形与性质

下面介绍一下基本初等函数的图形

（1）常量 $y=c$

常量 $y=c$ 的图形在笛卡尔坐标系中是一条垂直于 y 轴平行于 x 轴的直线。

（2）幂函数 $y=x^n$，n 为任意实数

对于幂函数应注意一点的是，n 的取值不同函数的定义域可能不同。图 1-4 画出了当 $n=1, 2, 3, -1$ 时的幂函数的图形。

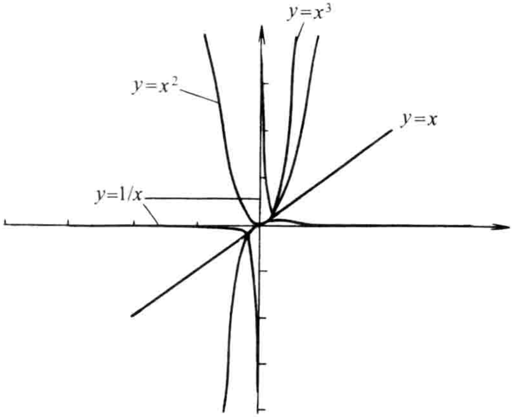


图 1-4