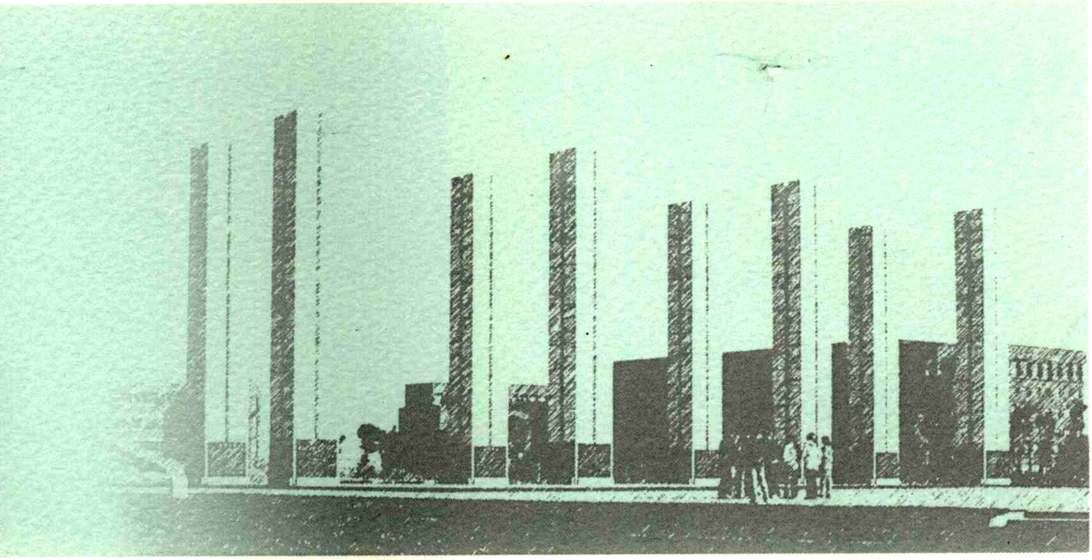
GE DE GUANXI BIAOSHI LILUN

格的关系表示理论

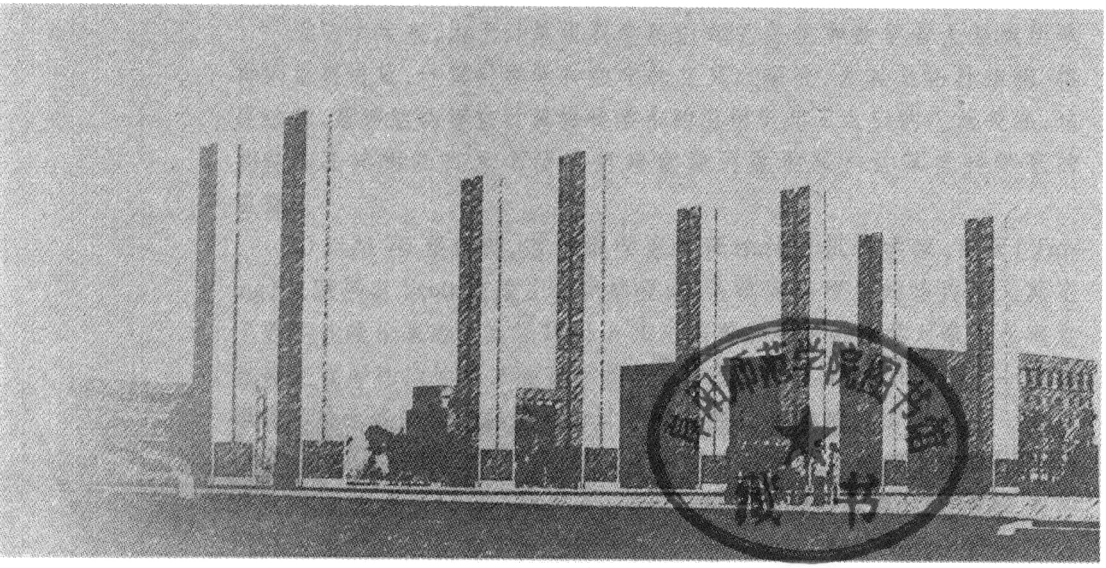


徐晓泉 著

RELATIONAL REPRESENTATIONS OF LATTICES

高等教育出版社

格的关系表示理论



徐晓泉 著

RELATIONAL REPRESENTATIONS OF LATTICES

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

格的关系表示理论 / 徐晓泉著 . -- 北京 : 高等教育出版社 , 2015. 6

ISBN 978-7-04-042639-7

Ⅰ. ①格… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①格 - 理论 Ⅳ. ① O153. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 087743 号

策划编辑 李 鹏　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 李卫青　　版式设计 于 婕
责任校对 刘春萍　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京机工印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm × 1092 mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	7.75	版　　次	2015 年 6 月第 1 版
字　　数	110 千字	印　　次	2015 年 6 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00 元

物 料 号 42639-00

前　言

近四十年来,由于计算机科学所引起的关注和数学若干领域所取得的重要进展,计算机科学和数学的交叉之研究,尤其是拓扑结构、格序结构、范畴结构等在计算机科学中的应用引起了人们的广泛关注,这些结构及其相互交叉之研究愈来愈受到数学家和计算机科学家的重视.

20 世纪 70 年代初,著名数学家和理论计算机科学家、图灵(Turing)奖获得者 Scott 创建了连续格理论,为确定性程序的指称语义奠定了坚实的理论基础. 其后 Plotkin 指出需要更一般的数学对象用于建立非确定程序的指称语义的数学模型,因而形成了域(domain)这一重要概念. 从此域的结构理论成为计算机程序的指称语义学研究的一个关键点. 20 世纪 70 年代中期以来,著名理论计算机科学家 Plotkin、Smyth 等人建立了幂域(powerdomain)理论(其中 Hoare 幂域、Smyth 幂域和 Plotkin 幂域是最为重要的三种幂域),为非确定、并发和分布式程序的指称语义学奠定了基础. 其后的十多年,Johnston、Smyth、Robinson、Vickers、Heckman、Abramsky 和 Schalk 等人基于拓扑、locale、定向偏序集、拓扑系统和信息系统等,给出了各种类型的幂构造,尤其是 Hoare 型、Smyth 型和 Plotkin 型幂构造,大大丰富了幂构造理论,为非确定、并发和分布式程序的指称语义的描述提供了更多可能的数学模型.

域理论发展的另一个动力来自纯数学的若干领域. 大约与 Scott 工作的同一时期,著名数学家 Hofmann、Lawson、Keimel 和 Day 等人由于各自的深入工作,从完全不同的途径独立地开展了连续格理论的研究. 20 世纪 80 年代以后,对更为一般的具有某种连续性的格序结构的研究逐渐成为国外数学家和理论计算机科学家的研究热点. 这类格序结构的研究具有数学和计算机科学两个背景,已取得了一系列重要进展,并与逻辑、范畴论、拓扑、格论、locale 理论和格上拓扑学等众多数学领域和分支发生了密切的关联,引起了广泛的关注. 在这些方面,以刘应明院士和王国俊教授为代表的中国学者做出了重要贡献. 需要指出的是,在这一领域中仍存在着不少未解决的问题,其中仅域理论和拓扑的交叉就有着多个有待解决的公开问题.

无论从数学的角度还是从计算机程序指称语义学的角度而言,域理论研究的一个重要方面是尽可能地将域理论推广到更为一般的格序结构上去. 20 世纪 80 年代以来,Gierz、Lawson、Bandelt、Erné、Huth、Jung、Keimel 等人分别引入并研究了超连续格、广义连续格、Z-连续格(偏序集)和 FS-格,它们属连续格(域)最为成功的推广之列. 1983 年,作为连续域和广义连续格的公共推广,Gierz、Lawson 和 Stralka[20] 等人引入了一类重要域——拟连续域(quasicontinuous domain),其关键点是将"点"与"点"之间的方向小于(way below)关系$\ll$推广至"集"与"集"之情形. 1990 年,Heckmann 从上幂域构造的角度研究了拟连续域(Heckmann 称其为多连续域(multi-continuous domain)). 沿用 Gierz、Lawson 和 Stralka 等人的思路,Venugopalan 将"点"与"点"之间的完全小于(completely below)关系$\lhd$推广到"集"与"集"情形. 作为完全分配格的推广,他引入了一类重要的分配格——广义完全分配格.

众所周知,在域理论研究中,Scott 拓扑和 Lawson 拓扑是两个最重要的拓扑,而 Lawson 拓扑和区间拓扑可以说是完备格上最重要的两个"双边"拓扑. 对于这两个拓扑,一个基本的问题是:在什么条件下它们具有 Hausdorff 分离性? 1981 年,Gierz 和 Lawson 对 Lawson 拓扑之 Hausdorff 分离性问题进行了讨论,给出了完备格上 Lawson 拓扑为 Hausdorff 的序等价条件——广义连续性.

在本书中,我们的主要工作之一就是试图将拟连续域理论的框架和应用范围推广至一般的子集系统 Z.

将连续格(域)推广到 Z-连续格(偏序集)相对比较容易,因为"点"与"点"之间的方向小于关系$\ll$可以比较自然地推广到一般的子集系统 Z. 但将拟连续域理论推广至一般的子集系统 Z 却遇到了困难. 众所周知,拟连续域的研究远比连续域情形复杂,它需要 Rudin 引理等的支撑. 因而"集"与"集"之情形推广到一般的子集系统 Z 就变得比较复杂,这大概也是较长时间未能将拟连续域理论推广至一般的子集系统 Z 的原因所在.

在本书中,我们从两个不同的途径较为成功地将拟连续域理论推广至一般的子集系统 Z. 一个途径是基于 Rudin 引理和 Gierz、Lawson 和 Stralka 等人的思路. 我们首先对一般的子集系统 Z 引入了 Rudin 性质,给出了它的映射式刻画;引入了三类 Rudin 空间 **K-RD**、**S-RD** 和 **F-RD.** 这些讨论为推广拟连续偏序集的概念及理论至一般的子集系统情形提供了基础.

拟连续域理论推广的另一个途径是基于 Heckmann 关于拟连续域

的拓扑式刻画. 我们首先给出了拓扑空间(X, δ)之开集格$(\delta, \subseteq)$是超连续格的若干刻画;对一般的子集系统Z,作为拟连续偏序集另一种不等价的推广方式,依拓扑的方式引入了Z-拟连续域的概念,并建立了相应的理论.

值得指出的是,在较弱的集论公理系统ZFDC_ω中,本书给出了完全分配格到单位闭区间$[0,1]$一类基本完备格同态的一个直接构造,其方法也适用于偏序集情形. 这一构造技巧有着多方面的重要应用.

本书的另一主要工作是研究完备格的关系表示问题. 从格序结构的角度,二元关系引起人们的关注最早源于 Raney 和 Zareckiĭ 的工作. 1953 年,美国著名格论专家 Raney 证明了:若集X上二元关系ρ是幂等的,则$(\Phi_\rho(X), \subseteq)$为完全分配格,其中$\Phi_\rho(X) = \{\rho(A): A \subseteq X\}$,$\rho(A) = \{x \in X: \exists a \in A$ 使 $(a, x) \in \rho\}$. 1963 年,Zareckiĭ 进一步证明了下述经典结果:集X上二元关系ρ是正则的当且仅当$(\Phi_\rho(X), \subseteq)$为完全分配格. Zareckiĭ 的工作引起了人们对正则关系的关注,这里可提到著名数学家 Markowsky、Schein 和 Bandelt 等人的工作.

具有某些特殊性质的二元关系在域理论的研究中有着重要的应用. 事实上,就连续域而言,其最重要的性质之一是它上面的方向小于关系$\ll$具有插入性质. 1982 年,Scott 给出了 Scott 域的信息系统表示,它为域理论提供了一个逻辑处理方式. 信息系统对于理解指称语义和程序逻辑之间的关系而言是重要的. 在 Scott 信息系统中,存在着在令牌(token)的有限子集之间的一个具有自反性和传递性的二元关系$\vdash$(称之为一个蕴涵(entailment)关系),因而信息系统本质上是一种具有自反性和传递性的特殊二元关系. 20 世纪 90 年代,Vickers, Hofmann 等人发展了 Scott 的信息系统方法,建立了用于表示连续域的连续信息系统理论,而一个连续信息系统就是一个集合与其上的一个具有插入性和传递性的二元关系(即一个幂等关系).

记完备格范畴为 **Com**,二元关系的全体为 **Rel**. 为简便起见,我们用$\rho: X \rightharpoonup Y$表示$\rho$是集$X$和$Y$之间的一个二元关系. $\forall A \subseteq X$,记$\rho(A) = \{y \in Y: \exists a \in A$ 使 $(a, y) \in \rho\}$(称之为A在ρ下的像),令$\Phi_\rho(X) = \{\rho(A): A \subseteq X\}$. 设$p$是关于完备格的一个性质,$s$是关于二元关系的一个性质. 令$\boldsymbol{P} = \{L \in ob(\mathbf{Com}): L$ 具有性质 $p\}$,$\boldsymbol{S} = \{\rho \in \mathbf{Rel}: \rho$ 具有性质 $s\}$. 我们称s型关系是p类格的一个表示,或p类格是s型关系的一个特征,若$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{S}$满足:

(i) $\forall \rho: X \rightharpoonup Y, \rho \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow (\Phi_\rho(X), \subseteq) \in \boldsymbol{P}$,

(ii) $\forall L \in \boldsymbol{P}, \exists \rho: X \rightharpoonup Y \in \boldsymbol{S}$ 使 $L \cong (\Phi_\rho(X), \subseteq)$.

本书最主要的工作是试图建立完备格的关系表示理论. 我们主要讨论了完全分配格、超连续格和区间拓扑 T_2 的完备格等重要完备格的关系表示问题,得到了它们的关系表示定理和内蕴式刻画,并给出了关系表示理论在域理论、格论和拓扑学中的若干重要应用.

全书共分4章,每章主要内容如下:

第1章给出了全书所需的域理论、格论的一些基本概念、记号和结论,特别是给出了完全分配格到单位闭区间[0,1]一类基本完备格同态的一个直接构造法. 作为一个基本构造法,本书多次使用了这一构造技巧.

第2章从两个不同的途径将拟连续域推广至一般的子集系统 Z,引入并研究了拟 Z-连续域和 Z-拟连续域,将关于拟连续域的一些主要结果推广至了拟 Z-连续域情形和 Z-拟连续域情形.

第3章讨论了完备格的关系表示问题,建立了完全分配格、超连续格、区间拓扑 T_2 的完备格和 λ-超连续格的关系表示定理,并得到了它们的内蕴式刻画.

第4章给出了完备格的关系表示理论在域理论、格论和拓扑学中的若干应用,特别地,证明了完备格 L 是广义完全分配的当且仅当 L^{op} 是超连续的. 这一结论表明 Venugopalan 关于广义完全分配格的主要结果都可以从有关超连续格的相应结果得到;基于正则关系,讨论了一般偏序集到完全分配格的并稠嵌入问题,建立了偏序集到完全分配格的并稠嵌入定理;分别给出了 Urysohn-Nachbin 引理和 Tychonoff(单调)嵌入定理的一个与经典拓扑证明不同的代数化新处理方法;给出了序拓扑空间 (X,δ) 之严格完全正则性的一个新刻画,基于这一刻画,给出了 Lawson 问题的一个部分解答.

目　　录

第 1 章　子集系统 Z 和 Z-连续域

本章第 1—4 节给出了全书所需的域理论、格论的一些基本概念、记号和结论. 在第 2 节,我们引入了子集系统 Z、Z-域、Z-Scott 拓扑和 Z-Lawson拓扑等概念. 第 3 节给出了(弱)Z-连续域、Z-分配格的概念,并给出了 Raney 关于完全分配格的一些重要结论. 第 4 节介绍了关于拟连续域的几个重要结论.

在较弱的集论公理系统 ZFDC_ω 中,第 5 节给出了完全分配格到单位闭区间$[0,1]$一类基本完备格同态的一个直接构造. 这一构造法也适用于一般的其上 Z-小于关系$\ll_Z$ 具有插入性质的弱 Z-连续域. 基于此构造法,我们给出了这类弱 Z-连续域到方体的嵌入定理. 特别值得指出的是,它对偏序集情形也适用. 在第 2 章和第 4 章中,我们将多次使用这一构造技巧.

§1.1　基本概念与记号

在本书中,**Set** 表示集合范畴;**Poset** 表示以所有偏序集为对象、保序映射为态射的范畴;**Com** 表示以所有完备格为对象、完备格同态为态射的范畴. 基数和序数的全体分别记为 **Cn** 和 **On**. $\forall X\in ob(\mathbf{Set})$,$X$ 的基数记为$|X|$. 可数无限集的基数记为 ω,最小的不可数基数记为 ω_1. $\forall\lambda\in\mathbf{Cn}$,记 $\mathbf{Cn}_{(<\lambda)}=\{\mu\in\mathbf{Cn}:\mu<\lambda\}$,$\mathbf{On}_{(<\lambda)}=\{\alpha\in\mathbf{On}:\alpha<\lambda\}$,$X^{(<\lambda)}=\{A\subseteq X:|A|<\lambda\}$. 特别地,$X^{(<\omega)}$为 X 的非空有限子集全体. 自然数全体记为 $\mathcal{N}$.

设$(P,\leq)$为拟序集(即$\leq$是 P 上满足自反性和传递性的二元关系,但不要求满足反对称性),$x\in P$,$A\subseteq P$,记 $\uparrow x=\{y\in P:x\leq y\}$,$\uparrow A=\bigcup_{a\in A}\uparrow a$;对偶地定义 $\downarrow x$ 和 $\downarrow A$. 若 $A=\uparrow A(A=\downarrow A)$,则称 A 是上(下)集. A 称为是序凸的,若 $A=\uparrow A\cap\downarrow A$. P 的对偶拟序集记为 P^{op}. P 上以$\{P\backslash\uparrow x:x\in P\}$为开子基生成的拓扑称为下拓扑,记为 $\omega(P)$;对偶地定义 P 上的上拓扑 $\upsilon(P)$. $\theta(P)=\upsilon(P)\vee\omega(P)$ 称为 P 上的区间拓扑. 显然 $\theta(P)$是自对偶的,即 $\theta(P)=\theta(P^{op})$. 本书中,$[0,1]$上的拓扑均为通常的区间拓扑. 本书涉及的紧性与局部紧性,除明确指出外,

均不预先假定 T_2 分离性. 对 P 上的任意一个集族 $\mathscr{A}$, 记 $\mathscr{A}^{\uparrow}=\{B\in\mathscr{A}:B=\uparrow B\}$ 和 $\mathscr{A}^{\downarrow}=\{C\in\mathscr{A}:C=\downarrow C\}$. 对集 X 上的任意一个拓扑 η, (X,η) 的闭集全体记为 η^c, 即 $\eta^c=\{X\backslash U:U\in\eta\}$.

下述引理的证明是直接的.

引理 1.1.1 设 L 是完备格, $S\subseteq L$. 若 S(在 L 的诱导序下)是 L 的完备子格, 则 $(S,\theta(S))$ 是 $(L,\theta(L))$ 的子空间, 即 $\theta(S)=\{U\cap S:U\in\theta(L)\}$.

$\forall P\in ob(\mathbf{Poset})$, 记 $\mathbf{Up}(P)=\{A\subseteq P:A=\uparrow A\}$, $P^{(<\omega)}=\{F\subseteq P:F$ 为有限的$\}$, $\mathbf{Prin}\ P=\{\uparrow x:x\in P\}$, $\mathbf{Fin}\ P=\{\uparrow A:A\in P^{(<\omega)}\}$. 定义 $\mathbf{min}:\mathbf{Fin}\ P\to 2^P$ 如下: $\forall F\in\mathbf{Fin}\ P$, $\mathbf{min}(F)=\{x\in F:x$ 为 F 的极小元$\}$. $\forall P_1,P_2\in ob(\mathbf{Poset})$, 若 P_1 与 P_2 同构, 则记为 $P_1\cong P_2$. 偏序集 P 称为是 ω-链完备的, 若 P 中的可数链均有上确界.

本书约定, 对任意集族 $\mathscr{M}$ $(\mathscr{M},\supseteq)$ 总表示 $\mathscr{M}$ 被赋予集反包含序所得的偏序集. $\mathscr{M}$ 称为是下定向的, 若 $\forall A,B\in\mathscr{M}$, $\exists C\in\mathscr{M}$ 使 $C\subseteq A\cap B$, 即偏序集 $(\mathscr{M},\supseteq)$ 是定向的. 当将 $\mathbf{Up}(P)$, $\mathbf{Prin}\ P$ 和 $\mathbf{Fin}\ P$ 看成偏序集时, 总是指 $(\mathbf{Up}(P),\supseteq)$, $(\mathbf{Prin}\ P,\supseteq)$ 和 $(\mathbf{Fin}\ P,\supseteq)$. $\forall L\in ob(\mathbf{Com})$, 记 $\mathscr{D}(L)=\{D\subseteq L:D$ 是定向子集$\}$.

定义 1.1.2 完备格 L 称为是交连续的, 若 $\forall x\in L$ 和 $D\in\mathscr{D}(L)$, 有 $x\wedge\bigvee D=\bigvee\{x\wedge d:d\in D\}$; L 称为是并连续的, 若 L^{op} 是交连续的; 若 L 同时是分配的和交连续的, 则称 L 是 Heyting 代数.

定义 1.1.3 设 (X,δ) 为拓扑空间, 定义 X 上的一个拟序关系 $\leq_\delta$ (本书称其为由拓扑诱导的拟序)如下: $x\leq_\delta y\Leftrightarrow x\in \mathrm{cl}_\delta\{y\}$. $\forall A\subseteq X$, 记 $\uparrow_\delta A=\{x\in P:\exists a\in A$ 使 $a\leq_\delta x\}$, $\downarrow_\delta A=\{x\in P:\exists a\in A$ 使 $x\leq_\delta a\}$. 易知, (X,δ) 中的开子集是拟偏序集 $(X,\leq_\delta)$ 中的上集, 而闭子集是下集.

众所周知, $\leq_\delta$ 是 X 上的一个偏序 $\Leftrightarrow$ (X,δ) 是 T_0 空间.

定义 1.1.4 偏序集 P 上的拓扑 η 称为序相容拓扑, 若 $\leq_\eta$ 等同于 P 上的原有序关系 $\leq$.

易知 η 是序相容的$\Leftrightarrow \upsilon(P)\subseteq\eta\subseteq\mathbf{Up}(P)$.

设 $P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$. 映射 $f:P\to Q$ 称为是单调的(也称是保序的),若 $\forall x,y\in P,x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y)$.

定义 1.1.5 设 $P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$, $f:P\to Q,g:Q\to P$. 映射对(f,g)称为 P 与 Q 之间的一个附加(adjunction)或一个 Galois 联络,若 f 与 g 都是保序的,且 $\forall(p,q)\in P\times Q,f(p)\ge q\Leftrightarrow p\ge g(q)$. 此时 f 称为上伴随(upper adjoint), g 称为下伴随(lower adjoint).

下述结论是众所周知的(参见[18]).

引理 1.1.6 设 $P,Q\in ob(\mathbf{Poset})$, $f:P\to Q$ 和 $g:Q\to P$ 是单调的. 考虑下述各条件:

(1) (f,g)是 P 与 Q 之间的一个 Galois 联络,

(2) $\forall q\in Q,g(q)=\min f^{-1}(\uparrow q)$,

(3) $\forall p\in P,f(p)=\max g^{-1}(\downarrow p)$,

(4) f 保任意(存在)交,g 保任意(存在)并.

则(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Rightarrow$(4);若 P 与 Q 是完备格,则(4)$\Rightarrow$(1),从而所有条件等价.

定义 1.1.7 设 $P,Q,Q_i(i\in I)$ 均为偏序集.

(1) 映射 $f:P\to Q$ 称为一个序嵌入,若 $\forall x, y\in P,x\le y\Leftrightarrow f(x)\le f(y)$.

(2) 称映射簇 $\Phi=\{f_i:P\to Q_i\mid i\in I\}$ 强分离点,若 $\forall x, y\in P,x\not\le y\Rightarrow\exists i\in I$ 使 $f_i(x)>f_i(y)$.

显然,若 Φ 强分离 P 中的点,则对角映射 $f=\underset{i\in I}{\Delta}f_i:P\to\prod_{i\in I}Q_i,f(x)=(f_i(x))_{i\in I}$,为序嵌入.

定义 1.1.8(相关选择公理 DC_ω) 设 X 为非空集,$u\in X,R$ 为 X 上的一个二元关系. 若 $\forall x\in X,\exists y\in X$ 使 xRy,则$\exists$序列$\{x_n:n<\omega\}\subseteq X$ 满足:(1) $x_0=u$,(2) $\forall n<\omega,x_nRx_{n+1}$.

DC_ω 是 Bernays[10] 于 1942 年提出的一个弱于选择公理 AC 的公理. 以下用 ZF 表示 Zermelo-Fraenkel 集论公理系统,$ZFDC_\omega$ 表示 ZF 加

上相关选择公理 DC_ω,ZFAC 表示 ZF 加上选择公理 AC.

§1.2 子集系统

定义 1.2.1 函子 Z:**Poset**→**Set** 称为 **Poset** 上的一个子集系统,简称 Z 是一个子集系统,若 Z 满足以下条件:

(1) $\forall P \in ob(\mathbf{Poset}), Z(P) \subseteq 2^P$.

(2) $\forall P, Q \in ob(\mathbf{Poset})$,保序映射 $f: P \to Q, A \in Z(P) \Rightarrow Z(f)(A) = f(A) \in Z(P)$.

(3) $\exists P \in ob(\mathbf{Poset})$ 使 $Z(P)$ 含有 P 的非单点的非空子集.

注 1.2.2(Baranga [9]) $\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$,有:

(1) $\forall p \in P, \{p\} \in Z(P)$.

(2) $\forall Q \in ob(\mathbf{Poset}), P \subseteq Q \Rightarrow Z(P) \subseteq Z(Q)$.

(3) $\forall x, y \in P, x < y \Rightarrow \{x, y\} \in Z(P)$.

以下是三个常用的子集系统:

(1) $\mathscr{P}$($\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\mathscr{P}(P)$ 为 P 的子集全体).

(2) $\mathscr{D}$($\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\mathscr{D}(P)$ 为 P 的定向子集全体).

(3) $\mathscr{F}$($\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$, $\mathscr{F}(P)$ 为 P 的有限子集全体).

在以下讨论中,Z 总表示 **Poset** 上的一个子集系统. $\forall P \in ob(\mathbf{Poset})$,称 $Z(P)$ 为 P 上的一个子集系统. 当将 $Z(P)$ 看作偏序集时,其上的偏序总是指集包含关系.

设 $\mathscr{M}$ 是 P 的一个子集族(即 $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(P)$),$P$ 称为是 $\mathscr{M}$-完备的,若 $\forall S \in Z(P)$,S 在 P 中有上确界 $\bigvee S$. P 称为 Z-域,若 P 是 $Z(P)$-完备的. $\mathscr{D}$-域(即定向完备偏序集)简称为域.

定义 1.2.3 设 P, Q 是 Z-域. $f: P \to Q$ 称为保 Z-并映射,若 $\forall S \in Z(P)$, $f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$.

定义 1.2.4 设 P 为 Z-域. 令 $\sigma^Z(P) = \{U \subseteq P: U = \uparrow U$ 且 $\forall S \in Z(P), \bigvee S \in U \Rightarrow S \cap U \neq \varnothing\}$. 以 $\sigma^Z(P)$ 为开子基生成的拓扑称为 P 上的 Z-Scott 拓扑,记为 $\sigma_Z(P)$. P 上的 Z-Lawson 拓扑定义为 $\lambda_Z(P) =$

$\omega(P)\vee\sigma_Z(P)$(即以 $\omega(P)\cup\sigma_Z(P)$ 为子基生成的拓扑).

显然有 $\upsilon(P)\subseteq\sigma_Z(P)$,$\theta(P)\subseteq\lambda_Z(P)$,故 $\sigma_Z(P)$ 是 P 上的序相容拓扑,$(P,\sigma_Z(P))$ 为 T_0 空间,$(P,\lambda_Z(P))$ 为 T_1 空间. 当 $Z=\mathscr{D}$ 时,有 $\sigma^Z(P)=\sigma_Z(P)$,此拓扑为通常的 Scott 拓扑 $\sigma(P)$;相应地,$\lambda_Z(P)$ 为通常的 Lawson 拓扑 $\lambda(P)$. 令 $\Omega_Z=\{A\subseteq P: A=\downarrow A$ 且 $\forall S\in Z(P), S\subseteq A\Rightarrow\bigvee S\in A\}$. 则 $A\in\Omega_Z\Leftrightarrow P\backslash A\in\sigma^Z(P)$,从而 Ω_Z 为 P 上 Z-Scott拓扑的闭子基. 显然,$\sigma^Z(P)$ 对集合并运算封闭,Ω_Z 对集合交运算封闭. $\forall X=\uparrow X\subseteq P, M\subseteq P$,定义 $\mathrm{int}_{\sigma^{Z}(P)}X=\bigcup\{U\in\sigma^Z(P): U\subseteq X\}\in\sigma^Z(P)$,$\mathrm{cl}_{\sigma^{Z}(P)}M=\bigcap\{A\in\Omega_Z: M\subseteq A\}\in\Omega_Z$.

命题 1.2.5　设 P 为 Z-域.

(1) 若 $\sigma_Z(P)=\sigma^Z(P)$,则 $\lambda_Z(P)^{\uparrow}=\sigma_Z(P)$. 特别地,若 P 为域,则 $\lambda(P)^{\uparrow}=\sigma(P)$.

(2) 若 P 为完备格,则 $\lambda(P)^{\downarrow}=\theta(P)^{\downarrow}=\omega(P)$,$\theta(P)^{\uparrow}=\upsilon(P)$.

证明　(1):显然有 $\sigma_Z(P)\subseteq\lambda_Z(P)^{\uparrow}$. 另一方面,设 $U\in\lambda_Z(P)^{\uparrow}$,下证 $U\in\sigma_Z(P)$. 首先 $U=\uparrow U$. 其次,$\forall S\in Z(P)$,若 $\bigvee S\in U$,则由 $\sigma_Z(P)=\sigma^Z(P)$,$\exists V\in\sigma^Z(P)$, $F\in P^{(<\omega)}$ 使 $\bigvee S\in V\backslash\uparrow F\subseteq U$,从而 $\exists s\in S$ 使 $s\in V$. 由 $\bigvee S\notin\uparrow F$,有 $s\notin\uparrow F$;因而 $s\in V\backslash\uparrow F\subseteq U$. 故 $U\in\sigma^Z(P)$.

(2):设 P 为完备格,则由文献[18]中的练习 III-3.20,有$\lambda(P)^{\downarrow}=\omega(P)$. 由 $\theta(P)\subseteq\lambda(P)$,有 $\omega(P)\subseteq\theta(P)^{\downarrow}\subseteq\lambda(P)^{\downarrow}=\omega(P)$. 故 $\theta(P)^{\downarrow}=\omega(P)$. 对偶地有 $\theta(P)^{\uparrow}=\upsilon(P)$.

下面的例子表明,存在代数域 P 使 $\lambda(P)^{\uparrow}\neq\sigma(P)$.

例 1.2.6　设 P 为无限离散偏序集,即 P 为无限集,且 $\forall x,y\in P$, $x\leq y\Leftrightarrow x=y$. 则 $\forall x\in P$,有 $x\ll x$. 故 P 是代数域. 易知 $\lambda(P)^{\uparrow}$ 是离散拓扑,而 $\sigma(P)=\{P\backslash F: F\in P^{(<\omega)}\}$(即 $\sigma(P)$ 是有限补拓扑). 故 $\lambda(P)^{\uparrow}>\sigma(P)$.

§1.3　Z-连续域和 Z-分配格

定义 1.3.1　设 P 是偏序集,$<$是 P 上的一个二元关系.

(1) $\prec$ 称为一个附加序,若 $\forall x,y,u,v\in P$,有

(i) $x\prec y\Rightarrow x\leq y$,

(ii) $x\leq u\prec v\leq y\Rightarrow x\prec y$.

(2) 若 $\prec$ 是附加序,且作为关系是正则的(即存在 P 上的二元关系 σ 使 $\prec\circ\sigma\circ\prec=\prec$),则称 $\prec$ 是 P 上的一个正则附加序;类似地,称 $\prec$ 是 P 上的一个幂等附加序,若 $\prec$ 是附加序,且作为关系是幂等的.

(3) $\prec$ 称为逼近的附加序,若 $\prec$ 是附加序,且 $\forall x\in P, x=\bigvee\{p\in P:p\prec x\}$.

定义 1.3.2 设 P 是偏序集,$\mathscr{M}$ 是 P 的一个子集族,$x,y\in P$.

(1) 设 P 是 $\mathscr{M}$-完备的. 称 x $\mathscr{M}$-小于($\mathscr{M}$-below)y,记为 $x\ll_{\mathscr{M}}y$,若 $\forall S\in\mathscr{M}, y\leq\sup S\Rightarrow\exists s\in S$ 使 $x\leq s$. 记 $\Downarrow_{\mathscr{M}}x=\{u\in P: u\ll_{\mathscr{M}}x\}$. P 称为是弱 $\mathscr{M}$-连续的,若 P 是 $\mathscr{M}$-完备的,且 P 上的 $\mathscr{M}$-小于关系 $\ll_{\mathscr{M}}$ 是逼近的,即 $\forall x\in P, x=\sup\Downarrow_{\mathscr{M}}x$; 进一步,若 P 还满足: $\forall x\in P$, $\Downarrow_{\mathscr{M}}x\in \mathrm{I}_{\mathscr{M}}(P)=\{\downarrow S:S\in\mathscr{M}\}$,则称 P 为 $\mathscr{M}$-连续域;若 P 为 $\mathscr{M}$-连续的,且 P 上的 $\mathscr{M}$-小于关系 $\ll_{\mathscr{M}}$ 具有插入性质,则称 P 为强 $\mathscr{M}$-连续的.

(2) 设 P 是 Z-域. $\ll_{Z(P)}$ 称为 P 上的 Z-小于关系(若 $x\ll_{Z(P)}y$,则称 x Z-小于 y),简记为 $\ll_Z$(显然 $\ll_Z$ 是 P 上的一个附加序),并记 $\Downarrow_Z x=\{u\in P:u\ll_Z x\}$. $\ll_{\mathscr{D}}$ 就是熟知的方向小于关系(way below relation),简记为 $\ll$; $\ll_{\mathscr{P}}$ 称为完全小于关系(completely below relation),简记为 $\lhd$.

(3) P 称为弱 Z-连续域、Z-连续域和强 Z-连续域,若 P 分别是弱 $Z(P)$-连续的、$Z(P)$-连续的和强 $Z(P)$-连续的. 当 $Z=\mathscr{D}$ 时,Z-连续域简称为连续域(或连续偏序集[18,20]).

三元组 $(P,\leq,\delta)$(简记为 (P,δ))称为一个序拓扑空间,若 $(P,\leq)$ 为偏序集,δ 为 P 上的一个拓扑. 称 P 上的偏序 $\leq$ 是半闭的,若 $\forall x\in P$, $\downarrow x$ 和 $\uparrow x$ 是 (P,δ) 中的闭集. $(P,\leq,\delta)$ 称为是局部序凸的,若 (P,δ) 有由序凸开集构成的基;$(P,\leq,\delta)$ 称为是强序凸的,若 $\delta^{\uparrow}\cup\delta^{\downarrow}$ 为 δ 的一个子基. 称 (P,δ) 为一个序闭空间(pospace),若 P 上的偏序 $\leq$ 是乘积空间 $(P,\delta)\times(P,\delta)$ 中的闭集. 显然,序闭空间是 T_2 的,且其上的偏序是半闭的.

设 (P,δ) 为序拓扑空间,记 $C_M((P,\delta),[0,1])=\{f:(P,\delta)\rightarrow$

$[0,1] \mid f$ 是单调连续的$\}$.

定义 1.3.3　设 P 为偏序集,δ 为 P 上的一个拓扑. (P,δ) 称为严格完全正则序拓扑空间,若满足:

(1) P 上的偏序$\leq$是半闭的,

(2) (P,δ)是强序凸的,

(3) $\forall x \in P, A \in \delta^{c\downarrow} \setminus \{\varnothing\}$ $(A \in \delta^{c\uparrow} \setminus \{\varnothing\})$, $x \notin A \Rightarrow \exists f \in C_M((P,\delta),[0,1])$使$f(A) = \{0\}, f(x) = 1 (f(A) = \{1\}, f(x) = 0)$.

对连续域,Lawson 在[47]中提出了如下问题:

问题 1.3.4(Lawson 问题)　连续域 P 赋予 Lawson 拓扑 $\lambda(P)$是否为严格完全正则序空间?

在第 2 章和第 4 章,我们将对一般的 Z-拟连续域上的 Z-Lawson 拓扑 $\lambda_Z(P)$讨论此问题,并给出部分解答.

由完全小于关系$\lhd$的定义,易得到下述

引理 1.3.5　设 L 是完备格,$x \in L, y \in L \setminus \{0\}, A \subseteq L$. 则有

(1) $x \lhd y \Leftrightarrow y \not\leq \bigvee(L \setminus \uparrow x)$. 故$\Uparrow_{\mathscr{P}} y = L \setminus \downarrow \bigvee(L \setminus \uparrow y) \in \upsilon(L)$.

(2) (择一原则)$x \lhd \bigvee A \Leftrightarrow \exists a \in A$ 使 $x \lhd a$. 故$\Downarrow_{\mathscr{P}} \bigvee A = \bigcup_{a \in A} \Downarrow_{\mathscr{P}} a$.

定义 1.3.6　完备格 L 称为 Z-分配格,若 $\forall \{M_i : i \in I\} \subseteq Z(L)$, $\bigwedge_{i \in I} \bigvee M_i = \bigvee_{\varphi \in \prod_{i \in I} M_i} \bigwedge \varphi(I)$. 当 $Z = \mathscr{P}$或 $\mathscr{D}$时,Z-分配格分别称为完全分配格和定向分配格[18].

命题 1.3.7(Raney[73])　若完备格 L 是完全分配的,则 L^{op} 也是完全分配的.

下面的结论是众所周知的(参见[8,11,18,74]).

定理 1.3.8　完备格 L 是 Z-分配的当且仅当 L 是弱 Z-连续. 特别地,L 为连续格 $\Leftrightarrow L$ 是定向分配格;L 为完全分配格$\Leftrightarrow \forall x \in L, x = \bigvee\{u \in L : u \lhd x\}$.

定义 1.3.9 集 X 上的二元关系 $<$ 称为具有插入性质,若满足:

$$(\text{INT})\qquad \forall x,y\in X, x<y\Rightarrow \exists z\in X \text{ 使 } x<z<y.$$

连续域所具有的最为重要的性质之一是其上的方向小于关系 $\ll$ 具有插入性质(即域的连续性与强连续性等价),即有下述

定理 1.3.10([2,18]) 设 P 为连续域,$p,q\in P$. 若 $p\ll q$,则 $\exists r\in P$ 使 $p\ll r\ll q$.

对一般子集系统 Z,当 Z 满足一定条件时,Z-连续域上的 Z-小于关系 $\ll_Z$ 也具有插入性质,有关讨论可参看文献[7,9,105]. 特别地,我们有下述

定理 1.3.11(Raney[74,75])(插入性质) 设完备格 L 上的完全小于关系 $\lhd$ 是逼近的,$x,y\in L$. 若 $x\lhd y$,则 $\exists\ z\in L$ 使 $x\lhd z\lhd y$. 因而在集论公理 ZFAC 中,完全分配格上的完全小于关系 $\lhd$ 具有插入性质.

§1.4 拟连续域

作为连续域概念的一个重要推广,Gierz、Lawson 和 Stralka 等人在[19,20]中引入了广义连续格和拟连续域(也称拟连续偏序集)的概念,其基本思路是将“点”与“点”之间的方向小于关系 $\ll$ 推广至“集”与“集”之情形.

定义 1.4.1 设 P 是域,$x\in P$,$A,B\subseteq P$.

(1) 称 A 方向小于 B,记为 $A\ll B$,若 $\forall S\in\mathscr{D}(P)$,$\sup S\in\uparrow B\Rightarrow S\cap\uparrow A\neq\varnothing$. $F\ll\{x\}$ 简记为 $F\ll x$,并记 $w(x)=\{F\in P^{(<\omega)}:F\ll x\}$,$\Downarrow x=\{y\in P:y\ll x\}$.

(2) P 称为拟连续域(或拟连续偏序集[20]),若 $\forall p\in P$,$\{\uparrow A:A\in w(p)\}$ 是下定向的,且 $\uparrow p=\bigcap\{\uparrow A:A\in w(p)\}$. 拟连续的完备格 L 也称为广义连续格[19],此时 L 只需满足单个条件:$\forall p\in L$,$\uparrow p=\bigcap\{\uparrow A:A\in w(p)\}$,因为 $\{\uparrow A:A\in w(p)\}$ 之下定向性自然满足.

命题 1.4.2(Heckmann[21,22]) 设 P 是域,则下述两条件等价: