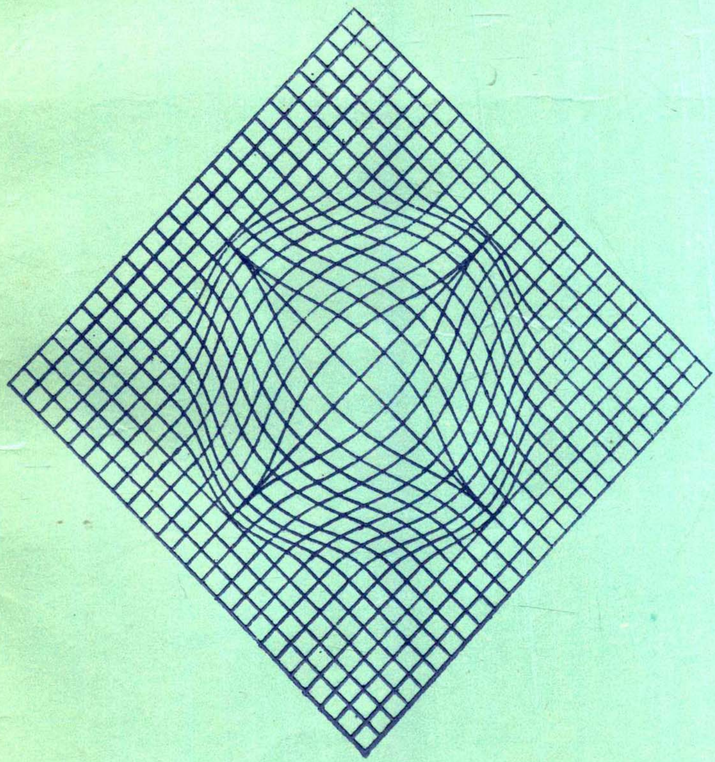
宋卫东　鲍佩恩　桂加谷　　编著

空间解析几何
习题课设计与解题指导



中国科学技术大学出版社

空间解析几何习题课设计与解题指导

宋卫东　鲍佩恩　桂加谷　编著

中国科学技术大学出版社
1995·5　合肥

[皖]新登字 08 号

空间解析几何习题课
设计与解题指导
宋卫东　鲍佩恩　桂加谷　编著
*
中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编 230026)
安徽师范大学印刷厂印刷
新华书店经销
*
开本:850×1168/32　印张:8　字数:187 千
1995 年 5 月第 1 版　　1995 年 5 月第 1 次印刷
印数:1—3000 册

ISBN7—312—00601—9/O·151　　　定价:6.60 元

内容提要

本书是根据国家教委审定的高等师范院校数学专业《解析几何》教学大纲和编者多年的教学实践与经验编写而成的。全书共分七章，其中空间部分六章为向量代数，平面，空间直线，特殊曲面，二次曲面，一般二次曲线方程的研究，平面部分一章为一般二次曲线方程的研究。每章根据习题课的内容分为若干节，每节内容先作扼要介绍，再举一定数量的例题作详解，最后留有习题让读者思考和练习。

本书可作为综合大学、高等师范院校数学专业空间解析几何课的教学参考书，以及中学教学教师进修参考书。

前　　言

本书是为高等学校数学专业空间解析几何习题课而编写的。

全书共分七章，其中空间部分为向量代数，平面，空间直线，特殊曲面，二次曲面，一般二次曲面方程的研究，平面部分为一般二次曲线方程的研究。每章的每节有内容提要，扼要介绍本节的基本概念、公式与重要定理，接着是将例题给出详细解法，有的还给出多种解法，每节中还有部分习题给读者练习。

书中选的例题是编者多年教学实践收集的，具有一定的代表性，有的习题解法具有技巧性，编者还注意了选题与每节内容的衔接。

本书在编写、出版过程中，编者得到了周纪安、孙国汉副教授的指教，在此向他们谨致谢意。

我们在编写过程中，参考了大量的有关书籍上的成果，在此谨向原作者深表感谢。

由于编者学识简陋，加之时间仓促，书中难免有许多缺点，希望得到专家同仁及读者的批评指正。

编者于芜湖赭山

1994 年 6 月

目　次

1 向量代数

本章主要介绍向量代数的基础知识，在后面一些章节中，通过向量这个工具直接把向量运算引到几何中来，这就是向量法。利用这个方法常常能够更简捷地解决一些问题，而且在建立坐标系后，向量和坐标又可以互相转换，这又为我们提供了很大的方便。

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 内容提要

只用一个实数就可以明确表示的量称为数量（或称为纯量），如距离、时间、温度等。而在自然界中，还有一种较复杂的量，它们不但有大小而且还有方向，如力、速度、电场等。我们称这种既有大小又有方向的量为向量（或称为矢量）。

具备大小和方向的最简单的几何图形就是有向线段，因而向量就可以用有向线段 AB 来表示，A 点称为向量的起点，B 点称为终点，记为$\vec{AB}$或 $\vec{a}$。向量的大小（称为向量的模）就是线段的长度，记为$|\vec{AB}|$或$|\vec{a}|$，而长度为 1 的向量称为单位向量，长度为零的向量称为零向量，记为$\vec{0}$。

大小相等、方向相同的两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$称为相等向量，记为$\vec{a}=\vec{b}$。

大小相等、方向相反的两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$称为相反向量，记为

$-\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$。

方向垂直的两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$称为垂直向量，记为$\vec{a}\perp\vec{b}$。

与已知直线平行的两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$称为共线向量（或称为平行向量），记为$\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行时，记为$\vec{a}\nparallel\vec{b}$。

与已知平面平行的向量，称为共面向量。

定义 1 两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相加是一个向量，称为和向量，记为$\vec{a}+\vec{b}$。这个和向量可用三角形法则构成：从第一个向量的终点作出第二个向量，以第一向量的始点为始点，第二个向量的终点为终点的向量就是它们的和。如图 1。

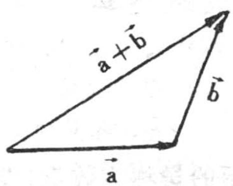


图 1

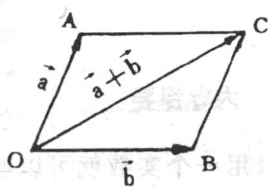


图 2

这个和向量也可以用平行四边形法则构成：在同一点 O 作出向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边，作平行四边形 OACB，则对角线向量$\overrightarrow{OC}$就是$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，如图 2。

定义 2 两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的差是一个向量，它与所减向量的和就是被减向量，记为$\vec{a}-\vec{b}$。

定义 3 向量$\vec{a}$与数 λ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\vec{a}$，它的长度为：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，它的方向为：当 $\lambda>0$ 时，与$\vec{a}$同向；当 $\lambda<0$ 时，与$\vec{a}$反向。这种运算为数乘。

向量的加、减法及数乘称为向量的线性运算，它有如下运算

规律：设$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$为向量，λ，μ 为实数，则

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \qquad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

(4) $\lambda(\mu\,\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

(5) $(\lambda+\mu)\vec{a}=(\lambda\,\vec{a})+(\mu\,\vec{a})$

(6) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\,\vec{a}+\lambda\,\vec{b}$

由(2)，向量的加法可推广到多个向量的情形。

定理1 若$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\vec{a}$,$\vec{b}$共线的充要条件是存在唯一的非零实数 l，使得$\vec{a}=l\,\vec{b}$。

若$\vec{a}$,$\vec{b}$不共线，则$\vec{c}$与$\vec{a}$,$\vec{b}$共面的充要条件是存在非零实数 l、m，使得

$$\vec{c}=l\,\vec{a}+m\,\vec{b}$$

1.1.2 例题详解

例1 自直角三角形直角顶 A 作高线 AD，沿$\vec{AB}$及$\vec{AC}$之力其大小分别为$|AB|^{-1}$及$|AC|^{-1}$则其合力将沿 AD 且其数值为$|AD|^{-1}$。

证 如图，设 BC＝a，CA＝b，AB＝c，沿 AB，AC 的力为$\vec{AP}$，$\vec{AQ}$，其合力为$\vec{AR}$。

所以

$$|\vec{AP}|=\frac{1}{c},\ |\vec{AQ}|=\frac{1}{b}$$

于是

$$|\vec{AR}|=\sqrt{|\vec{AP}|^2+|\vec{AQ}|^2}=\frac{a}{bc}$$

但

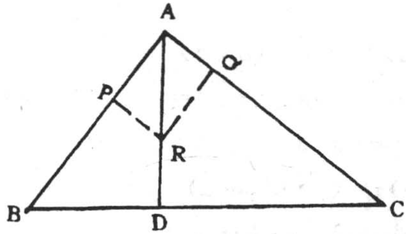


图 3

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}a\cdot|AD|$$

故

$$|\vec{AR}|=\frac{1}{|\vec{AD}|}$$

另一方面

$$\operatorname{tg}R\hat{A}P=\frac{|\vec{AQ}|}{|\vec{AP}|}=\frac{c}{b}=\operatorname{tg}A\hat{C}B=\operatorname{tg}B\hat{A}D$$

故$\vec{AR}$与$\vec{AD}$重合，因此合力$\vec{AR}$将沿 AD，且其值为$|AD|^{-1}$。

例 2 设 L，M，N 分别是三角形 ABC 三边 BC，CA，AB 的中点，O 为任意一点，证明：$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OL}+\vec{OM}+\vec{ON}$

证法 1 如图 4，

$$\vec{OL}=\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC})$$

$$\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OC}+\vec{OA})$$

$$\vec{ON}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$$

故

$$\vec{OL}+\vec{OM}+\vec{ON}$$

$$=\frac{1}{2}[(\vec{OB}+\vec{OC})+(\vec{OC}+\vec{OA})+(\vec{OA}+\vec{OB})]$$

$$=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$$

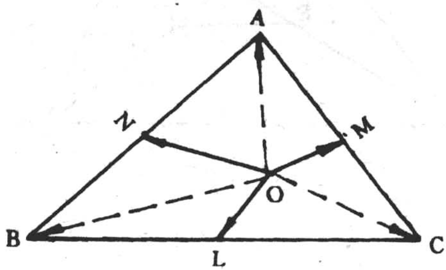


图 4

证法 2 因为

$$\vec{OA}=\vec{ON}+\vec{NA}=\vec{ON}+\frac{1}{2}\vec{BA}$$

$$\vec{OB}=\vec{OL}+\vec{LB}=\vec{OL}+\frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$\vec{OC}=\vec{OM}+\vec{MC}=\vec{OM}+\frac{1}{2}\vec{AC}$$

所以

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OL}+\vec{OM}+\vec{ON}+\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{AC}+\vec{CB})$$

$$=\vec{OL}+\vec{OM}+\vec{ON}$$

例 3 已知梯形 ABCD 中，AB∥DC，设 E 和 F 分别为对角线 AC 和 BD 的中点，求证：EF 平行于梯形的底边。

证 令$\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{BC}=\vec{b}$，$\vec{CD}=\vec{c}$，$\vec{DA}=\vec{d}$

则

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

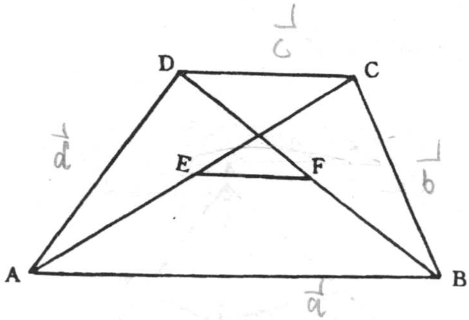


图 5

而

$$\vec{AB} /\!/ \vec{DC}$$

故可设

$$\vec{c} = m\,\vec{a} \qquad (m\text{ 为实数})$$

又

$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF}$$

但

$$\vec{EA} = \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{DA}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$$

$$\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CD}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

故

$$\begin{aligned}\vec{EF} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(m+1)\vec{a}\end{aligned}$$

所以　$EF /\!/ AB$

例 4 设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的中心，证明

$$\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\cdots+\vec{OA_k}=\vec{0}$$

证法 1 由题设有

$$|\vec{OA_i}|=|\vec{OA_{i+1}}| \quad (i=1,2,\cdots,k-1)$$

且这个正 k 边形被分为 k 个全等的三角形。

在平面上任取一点 B_1，接连作

$$\vec{B_1B_2}=\vec{OA_1}$$

$$\vec{B_2B_3}=\vec{OA_2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{B_{k-1}B_k}=\vec{OA_{k-1}}$$

且相邻的两个向量$\vec{B_{i-1}B_i}$与$\vec{B_iB_{i+1}}$间的夹角均为$\frac{2\pi}{k}$连接 B_kB_1，由正多边形的性质及作法可知 $B_1B_2\cdots B_k$ 为一正多边形。因而

$$\vec{B_KB_1}=\vec{OA_K}$$

所以

$$\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\cdots+\vec{OA_K}=\vec{B_1B_2}+\cdots+\vec{B_kB_1}=\vec{0}$$

证法 2 因为

$$\vec{OA_1}+\vec{OA_3}=\lambda\vec{OA_2}$$

$$\vec{OA_2}+\vec{OA_4}=\lambda\vec{OA_3}$$

$$\vdots$$

$$\vec{OA_{k-1}}+\vec{OA_1}=\lambda\vec{OA_k}$$

等式两边相加得

$$2(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\cdots+\vec{OA_k})=\lambda(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\cdots+\vec{OA_k})$$

显然 $\lambda\neq2$，所以

$$\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\cdots+\vec{OA_k}=\vec{0}$$

证法 3 i) 当 k 为偶数时，结论是显然的。对于任一自然数

k，作正边形外接圆每段弧$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$的中点 B_{i-1}，于是 $A_1B_1A_2B_2\cdots A_kB_k$ 为正(2k)边形。由 i)知

$$\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OA_2}+\vec{OB_2}+\cdots+\vec{OA_k}+\vec{OB_k}=\vec{0} \tag{1}$$

又

$$\vec{OA_1}+\vec{OA_2}=\lambda\,\vec{OB_1}$$

$$\vec{OA_2}+\vec{OA_3}=\lambda\,\vec{OB_2} \qquad (\lambda>0)$$

$$\vdots$$

$$\vec{OA_k}+\vec{OA_1}=\lambda\,\vec{OB_k}$$

代入(1)得

$$(1+\frac{2}{\lambda})(\vec{OA_1}+\cdots+\vec{OA_k})=\vec{0}$$

故

$$\vec{OA_1}+\cdots+\vec{OA_k}=\vec{0}$$

例 5　用向量法证明：P 是△ABC 的重心的充要条件是

$$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$$

证法 1　充分性：

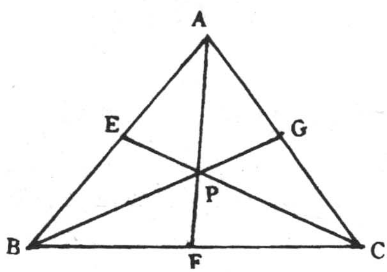


图 6

若 $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$

则 $\vec{PA}+\vec{PB}=-\vec{PC}=\vec{CP}$ (1)

取 E 为 AB 中点，则有

$$\vec{PE}=\frac{1}{2}(\vec{PA}+\vec{PB}) \tag{2}$$

由(1)，(2)得 $\vec{CP}=2\vec{PE}$

同理可证 $\vec{BP}=2\vec{PG}$ $\vec{AP}=2\vec{PF}$

故 P 为△ABC 的重心。

必要性：

若 P 为△ABC 的重心，则

$$\vec{CP}=2\vec{PE}=\vec{PA}+\vec{PB}$$

从而有

$$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{0}$$

证法 2 充分性：

若

$$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=0$$

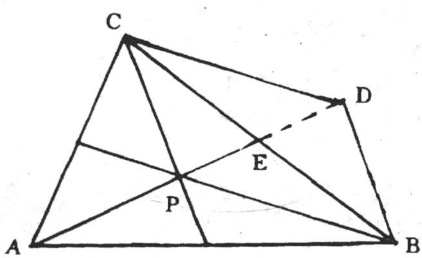


图 7

则

$$\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{AP}$$

延长 AP 至 D,使得:$\vec{AP}=\vec{PD}$;AD 交 BC 于 E,则

$$\vec{PB}+\vec{PC}=\vec{PD}$$

故 PBDC 为平行四边形,从而 E 为 BC 的中点。

同样可证 BP,CP 延长线交对边的点为 AC,AB 中点。故 P 为△ABC 的重心。

必要性:

设 P 为△ABC 的重心,从而有

$$\vec{PA}=\frac{1}{3}(\vec{CA}+\vec{BA})$$

$$\vec{PB}=\frac{1}{3}(\vec{CB}+\vec{AB})$$

$$\vec{PC}=\frac{1}{3}(\vec{AC}+\vec{BC})$$

所以

$$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=\frac{1}{3}(\vec{CA}+\vec{BA}+\vec{CB}+\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{BC})=\vec{0}$$

例 6 (Menelaus -定理)

在△ABC 的三个边 BC,CA,AB 或其延长线上分别取 L,M,N 三点,则 L,M,N 三点共线的充要条件是

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1$$

证 令 $\lambda=\frac{BL}{LC}$, $\mu=\frac{CM}{MA}$, $\upsilon=\frac{AN}{NB}$

则

$$\vec{L}=\frac{\vec{B}+\lambda\vec{C}}{1+\lambda},\qquad \vec{M}=\frac{\vec{C}+\mu\vec{A}}{1+\mu},\qquad \vec{N}=\frac{\vec{A}+\upsilon\vec{B}}{1+\upsilon}\qquad (1)$$

必要性:

若 L,M,N 共线,则有$\vec{M}-\vec{L}$与$\vec{N}-\vec{M}$共线,即存在数 $l\neq0$,使得

$$\vec{N}-\vec{M}=l(\vec{M}-\vec{L})\qquad (2)$$