工业和信息化部“十二五”规划教材

微积分

（上册）

Weijifen

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

工业和信息化部“十二五”规划教材

微　积　分

(上册)

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是工业和信息化部"十二五"规划教材，分为上、下册。内容包括：预备知识、函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、级数、空间解析几何与向量代数、多元微分学及应用、重积分及应用、曲线积分与曲面积分、常微分方程等。

在本教材中增加了微积分中常用的初等数学的内容，便于学生查阅和补充相关知识；教材中语言简洁明了，例子经典易懂，结合大量图形的应用以及与工程实践相关的例题，使学生对知识的理解和掌握更加直观、深入。

本书可供高等院校作为教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 薛玉梅，李娅，王进良编著. -- 北京 ：北京航空航天大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5124-1823-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①薛… ②李… ③王… Ⅲ.①微积分－高等学校－教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 151174 号

微积分(上册)

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

责任编辑　刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com　邮购电话：(010)82316936

北京兴华昌盛印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×1 092　1/16　印张：11.75　字数：301 千字

2015 年 7 月第 1 版　2015 年 7 月第 1 次印刷　印数：2 000 册

ISBN 978-7-5124-1823-3　定价：49.00 元(上下册)

《微积分》教材编写组

《微积分(上册)》

薛玉梅　主编

薛玉梅　李　娅　王进良　编著

《微积分(下册)》

李　娅　主编

李　娅　薛玉梅　编著

前　言

我校开展微积分教学已经多年了，均使用已有的国内外知名教材. 但在国际学院的教学实践中发现，教材的选用以及教学理念存在着一定的问题. 由于留学生来自世界各地，教育背景和语言能力参差不齐，因此针对这些学生的特点，我们希望编写一部适合其学科专业特点的《微积分》教材. 作者凭借自己在国外学习的经验，参考国内外教材的特点，吸收其精华，并加以创新，用简洁明了的语言加以叙述，编写出了独具特色的教材.

本教材具有以下特点：

1. 根据学生的实际特点，设置预备知识，列出高中数学中常用的定义、性质、公式等，有助于不同程度的学生能便捷地查阅和补充相关知识，从而为学生提供一条有效的学习途径. 同时，设置一套预备知识自测题，可以检验学生对预备知识掌握的程度. 例如，在第 1 章，我们给出高中数学中常用的定义、性质、公式等. 在第 2 章中，我们从函数的定义出发，通过数形结合，详细介绍函数的性质和特点，使学生能撇开语言、文字的障碍，能一目了然，直观地理解函数的各种性质和特点.

2. 在每个新的定义引入之前，我们都先从具体的数学或物理问题出发，来引入新的定义. 这样，有助于学生对抽象数学概念的理解，也能使学生认识到数学在作为一种自然科学语言时所具有的精确描述能力，从而激发学生学习数学的兴趣.

3. 对微积分各部分内容的应用予以充分的重视，从导数到积分，直至微分方程均给出了较多的应用实例. 同时，对于微积分在其他领域中的典型应用，我们化抽象为具体，使学生能够更直观地理解和掌握微积分的相关知识.

4. 在一些章节中，对于难度较大的内容，我们把其作为选讲内容或选做习题，这可使学有余力的学生进一步深入学习. 例如，在多元积分部分，给出了二维的 Green 公式和三维的 Gauss 公式，以及 Stokes 公式，但把 Stokes 公式作为选讲内容；在常微分方程中，把伯努利(Bernoulli)方程、欧拉(Euler)方程的求解作为选讲内容.

5. 教材中设置的例题，除了个别较有难度之外，多数为经典、简单的例题. 这主要是有利于不同程度的学生对微积分基本方法和一般数学方法的领会、理解和掌握. 教材中加“*”的章节为选学内容，可供不同层次的学生学习使用.

本教材第 1～3 章、第 5 章、第 8～10 章由李娅老师执笔，第 6 章由王进良教授执笔，第 4、7、11、12 章由薛玉梅副教授执笔. 完成初稿后，作者对本教材进行了多

次校对.书中第4、7、11、12章的多数图形由岳会强博士和曾成博士绘制,在此对他们的辛勤工作表示感谢.

全书由国家名师李尚志教授和经验丰富的王凤竹副教授审稿,并提出了许多非常有价值的宝贵意见.使用原讲义教学的薛晓春教授也对本书的修改订正提出了许多宝贵的意见,在此对他们的无私奉献,表示最崇高的敬意和感谢.

国际学院对本教材的撰写以及出版给予了大力的支持,在此谨向他们表示衷心的感谢.

由于作者的水平和经验有限,书中缺点、不妥和疏漏之处在所难免,敬请广大专家、读者给予批评与指正.

作　者

2015年4月于北京航空航天大学

目　　录

第1章　预备知识

在本章中，我们将把高等数学所需的中学常用的定义、性质、公式等一一列举出来.

1. 指数函数的运算法则

(1) $a^0=1, a>0$；

(2) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, a>0, m, n, n>1$；

(3) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a>0, m, n$ 为自然数，$n>1$；

(4) 当 n 为奇数时，$(\sqrt[n]{a})^n=a$，当 n 为偶数时，$(\sqrt[n]{a})^n=|a|, a>0$；

(5) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}, r, s$ 为实数；

(6) $(a^r)^s=a^{rs}, a>0, r, s$ 为实数；

(7) $(ab)^r=a^rb^r, a, b>0, r$ 为实数.

例 1　计算下列数值：(1) $9^{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{16^3}$；(2) $\dfrac{(2^6)^{\frac{1}{2}}+4^{-2}\cdot 2^7}{6^3}$.

解　(1) $9^{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{16^3}=(3^2)^{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{(2^4)^3}=3^{2\cdot\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{2^{4\cdot 3}}$

$$=3^3+2^{\frac{4\cdot 3}{4}}=27+2^3=35.$$

(2)
$$\frac{(2^6)^{\frac{1}{2}}+4^{-2}\cdot 2^7}{6^3}=\frac{2^{6\cdot\frac{1}{2}}+(2^2)^{-2}\cdot 2^7}{(2\cdot 3)^3}$$
$$=\frac{2^3+2^{-4}\cdot 2^7}{2^3\cdot 3^3}=\frac{2^3+2^3}{2^3\cdot 3^3}$$
$$=\frac{1+1}{3^3}=\frac{2}{27}.$$

2. 对数函数的运算法则

若 $a>0, a\neq 1, M, N>0$，则

(1) $\log_a 1=0$；

(2) $\log_a N=\dfrac{\log_m N}{\log_m a}, m>0, m\neq 1$；

(3) $a^{\log_a N}=N$；

(4) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(5) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(6) $\log_a M^n=n\log_a M, n$ 为实数；

(7) $\log_{a^m}N^n=\dfrac{n}{m}\log_a N, m, n$ 为实数；

(8) 以 10 为底的对数 $\log_{10}x$ 简记为 $\lg x$；以 e 为底的对数 $\log_e x$ 称为自然对数，记作 $\ln x$.

例 2　计算下列数值：(1) $\log_{10}1\,000+\log_{3^5}9$；(2) $3^{\frac{\log_3\frac{4}{3}+\log_3 2}{\log_5 125+\log_5 3-\log_5 15}}$.

解 (1) $\log_{10}1\,000+\log_{3^5}9=\log_{10}10^3+\log_{3^5}3^2$

$$=3\log_{10}10+\frac{2}{5}\log_3 3=3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}.$$

(2) $3^{\frac{\log_3\frac{4}{3}+\log_3 2}{\log_5 125+\log_5 3-\log_5 15}}=3^{\frac{\log_3\left(\frac{4}{3}\cdot 2\right)}{\log_5\left(\frac{125\cdot 3}{15}\right)}}=3^{\frac{\log_3\frac{8}{3}}{\log_5 25}}=3^{\frac{1}{2}\log_3\frac{8}{3}}$

$$=3^{\log_3\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

3. 求和 $\sum$

$\sum$(读作 Sigma)表示指标 i 走遍 $\sum$ 下方的整数到 $\sum$ 上方的整数之间的所有正整数时,所有给定形式的数之和,即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

$\sum$ 的性质:

(1) 设 c 为常数,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}ca_i=c\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

常用求和公式:

(1) 等差数列的求和公式:

设等差数列的通项为 $a_n=a_1+(n-1)d$,n 为自然数,则前 n 项和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)d}{2};$$

(2) 等比数列的求和公式:

设等比数列的通项为 $a_n=a_1q^{n-1}$,n 为自然数,则前 n 项和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q};$$

若 $|q|<1$,则当 $n\to\infty$ 时,$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\dfrac{a_1}{1-q}$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}i=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

例 3 求 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ 的值.

解 这是一个等差数列求前 n 项和的问题,所以

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2.$$

例 4 计算 $\dfrac{2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6}{3+3\cdot 5+3\cdot 5^2+3\cdot 5^3}$.

解　分子和分母都是等比数列求和，利用公式可得

$$\frac{2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6}{3+3\cdot 5+3\cdot 5^2+3\cdot 5^3}=\frac{\dfrac{2(1-2^6)}{1-2}}{\dfrac{3(1-5^4)}{1-5}}=\frac{7}{26}.$$

例 5　求和 $\sum\limits_{j=1}^{n}(j+2)(j-5)$.

解

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5)&=\sum_{j=1}^{n}j^2-3\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}10\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-10n\\&=\frac{n(n^2-3n-34)}{3}.\end{aligned}$$

4. 三角函数

假设 α 是直角三角形的一个锐角，如图 1.1 所示，则 $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$，$\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$，$\tan\alpha=\dfrac{a}{b}$，$\cot\alpha=\dfrac{b}{a}$，$\sec\alpha=\dfrac{c}{b}$，$\csc\alpha=\dfrac{c}{a}$.

给定平面直角坐标系下一点 $P(x,y)$，假设此点和坐标原点连线与 x 轴正方向夹角为 α，如图 1.2 所示，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$，$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$.

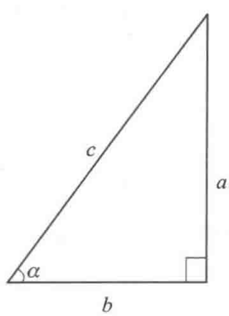

图 1.1

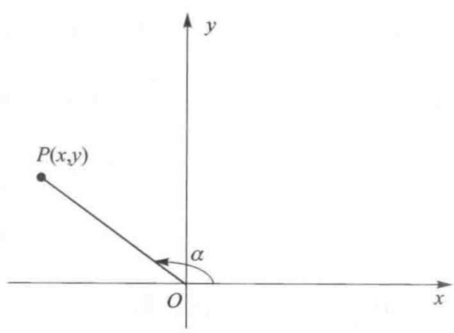

图 1.2

特殊角的三角函数值如表 1.1 所列.

表 1.1

值＼角 函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

三角函数常用公式：

(1) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$， $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$；

(2) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$， $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$；

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$， $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$， $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$， $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$；

(4) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$， $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

(5) $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$， $\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$；

(6) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$， $\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$；

(7) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$， $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$，

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$；

(8) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；

(9) $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$， $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$；

(10) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$， $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$；

(11) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$， $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$， $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$；

(12) $e^{ix}=\cos x+i\sin x$(欧拉公式).

例 6 化简函数$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{6}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

解
$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{6}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)+\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)+\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\\&=(1+\sqrt{3})\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x.\end{aligned}$$

5. 极坐标

在平面上取定一点 O,称为**极点**. 从极点出发引一条有向射线 Ox,称为**极轴**. 再取定一个长度单位,通常规定角度按逆时针方向为正. 这样就构成了**平面极坐标系**.

平面上任意一点 P 的位置可以由此点到极点的距离 r 和从 Ox 到 OP 的角度 θ 来决定. r 称为点 P 的**极径**，θ 称为点 P 的**极角**，(r,θ) 称为点 P 的**极坐标**(见图 1.3).

注 1: 极点 O 的极坐标表示为 $(0,\theta)$，其中 θ 为任意的.

注 2:若限制 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi$，则除极点外，平面上的点和其极坐标是一一对应的.

极坐标 (r,θ) 和直角坐标 (x,y) 之间的关系(见图 1.4)如下：

(1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$;

(2) 限制 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi$，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta=\dfrac{y}{x}$. 根据点在平面上的位置，得到 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}, \arctan\dfrac{y}{x}+\pi$ 或 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}+2\pi$.

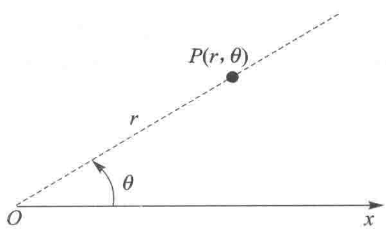

图 1.3

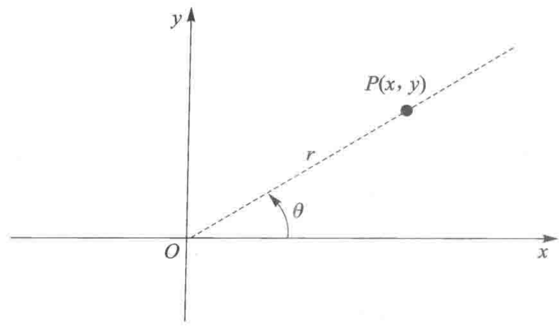

图 1.4

例 7　将下列极坐标写成直角坐标的形式并在直角坐标系下标出点 P 的位置.

(1) $P\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$;(2) $P\left(2,-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;(3) $P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{11\pi}{4}\right)$.

解　(1) $x=1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$,　$y=1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $x=2\cdot\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$,　$y=2\cdot\sin\dfrac{3\pi}{2}=-2$;

(3) $x=\dfrac{3}{2}\cdot\cos\dfrac{11\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\cdot\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$,　$y=\dfrac{3}{2}\cdot\sin\dfrac{11\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

上述三个点在直角坐标系下的位置如图 1.5 所示.

例 8　将下列直角坐标化为极坐标形式，规定 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi$.

(1) $P(2,-2)$;(2) $P(-3,4)$.

解　(1) $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}, \tan\theta=\dfrac{-2}{2}=-1, \arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$. 因为点 P 在第四象限，所以极角 θ 满足 $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi, \theta=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi=\dfrac{7\pi}{4}$.

(2) $r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5, \tan\theta=-\dfrac{4}{3}$. 因为点 P 处在第二象限，而 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\left(-\dfrac{4}{3}\right)<0$，所以极角 $\dfrac{\pi}{2}<\theta=\arctan\left(-\dfrac{4}{3}\right)+\pi<\pi$.

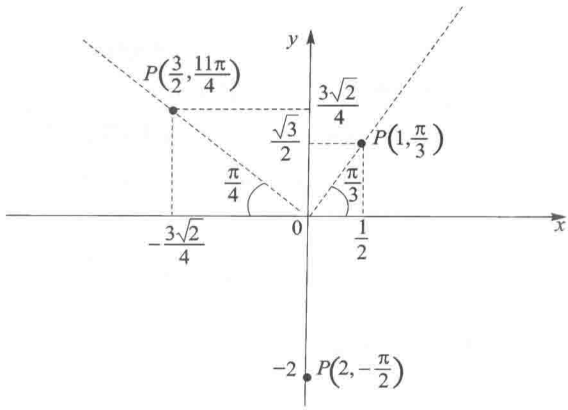

图 1.5

6. 阶　乘

(1) $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$;$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)$;$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)$;

(2) $C_m^n=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$;

(3) 二项式定理:$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$.

7. 常用不等式

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立;

(2) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$;

(3) 假设 $a,b>0$,则$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

8. 周长、面积、体积公式

(1) 三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$,其中 h 是 a 边上的高,α 是 a 边和 b 边的夹角;

(2) 半径为 r 的圆的周长为 $2\pi r$,面积为 πr^2;半径为 r 的球表面积为 $4\pi r^2$,体积为$\dfrac{4\pi r^3}{3}$;

(3) 半长轴和半短轴分别为 a 和 b 的椭圆面积为 πab;

(4) 半径为 r、圆心角为 α(单位为弧度,1 弧度$=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57^\circ18'$)的扇形弧长为 $r\alpha$,面积为 $\dfrac{1}{2}r^2\alpha$;

(5) 底面面积为 A、高为 h 的柱体体积为 Ah;底面面积为 A、高为 h 的锥体体积为$\dfrac{1}{3}Ah$.

第 2 章　函　数

高等数学研究的主要对象是变量，而对变量的研究中着重讨论的是变量之间的相互依赖关系，即函数关系. 本章将介绍函数的概念、函数的表示法、函数的一些简单性质及初等函数等，这些内容是学习本课程所要掌握的基础知识.

2.1　实数、区间与绝对值

2.1.1　实　数

在高等数学中涉及的数均为实数. 实数分为有理数和无理数两类.

有理数包括所有的正、负整数，正、负分数和零. 有理数总可以表示为分数$\frac{p}{q}$的形式. 反之，能表示为分数$\frac{p}{q}$(其中，p,q 为整数，且 $q\neq 0$)的数为有理数. 有理数也可以用有限小数或无限循环小数表示，如$\frac{4}{5}=0.8$，$\frac{7}{3}=2.333\cdots$，等. 有理数经过四则运算(除数为零除外)后仍为有理数. 有理数具有稠密性，即任何两个有理数之间必存在着有理数；事实上，若实数 a,b 为任意两个有理数，则介于它们中间的数$\frac{a+b}{2}$仍然为有理数.

除有理数外，其余的实数都为无理数，如$\sqrt{2}$，π 等. 无理数不能用分数$\frac{p}{q}$(其中，p,q 为整数，且 $q\neq 0$)表示，也不能用有限小数或无限循环小数表示，它们只能用无限非循环小数表示，如$\sqrt{2}=1.414\,3\cdots$，$\pi=3.141\,59\cdots$. 无理数经过四则运算后可能是无理数，也可能是有理数，如，无理数$\sqrt{2}$与无理数 $1-\sqrt{2}$之和便是有理数 1. 无理数也具有稠密性，即任何两个无理数之间必存在着无理数.

实数可以通过数轴上的点形象地表示. 在直线上取定一点 O 作为原点，另外取一点 A 作为 1，这两点之间的长度作为度量单位，并规定从 O 到 A 的方向为正方向. 我们称这条规定了原点、方向和长度单位的直线为数轴，有了数轴，便可将实数与数轴上的点建立一一对应的关系.

我们将某一个实数 a 称为其数轴上对应点的坐标，为了方便，以后也常常将实数 a 在数轴上的对应点称为 a，如图 2.1 所示.

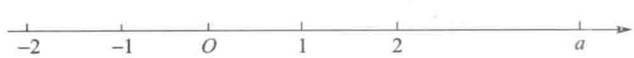

图 2.1

全体实数的集合记为 **R**，全体有理数的集合记为 **Q**，全体整数的集合记为 **Z**，全体自然数的集合记为 **N**.