MATHEMATICS

# 高中自主招生考试
# 直通车

# 数学

陈兴义　赵玉梅　编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

# 高中自主招生考试直通车

## 数　学

陈兴义　赵玉梅　编著

上海交通大学出版社

## 内容提要

重点高中的自主招生考试似乎已成为莘莘学子通向未来成功的第一级台阶了。这种“优中选优”的考试让广大考生、教师和家长投入了大量的时间和精力。各重点高中的自主招生旨在根据本校人才培养的目标和办学特色，自行设计和命题来选拔优秀的学生。各校均看重学生的综合素养、创新精神和发展潜能；也注重本校特色与学生特长的匹配。通常自招考试笔试卷的难度系数高于中考的难度，在选材和题型上也不拘一格，广泛灵活。

本书共有16个专题和3套模拟试卷。内容侧重于初中的代数内容，共有14个专题；关于几何内容，初中与高中的研究方法不同，所以本书涉及2个专题。每个专题由方框内容、知识梳理、例题分析、练习部分和作业部门等5个板块构成。本书可供准备参加高中自主招生的初三学生使用，也可作为学有余力的初中生的课外读物。

**图书在版编目(CIP)数据**

高中自主招生考试直通车. 数学/陈兴义，赵玉梅编著. —上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-09577-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②赵… Ⅲ. ①中学数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第072861号

**高中自主招生考试直通车**
**数　学**
陈兴义　赵玉梅　编著
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路951号　邮政编码200030)
电话：64071208　出版人：韩建民
常熟市文化印刷有限公司印刷　全国新华书店经销
开本：787 mm×960 mm　1/16　印张：8.5　字数：146千字
2013年4月第1版　2013年4月第1次印刷
ISBN 978-7-313-09577-0/G　定价：20.00元

# 总 序

本套《高中自主招生考试直通车》帮助有梦想、有目标的同学实现梦想;也帮助还没有建立明确目标的同学根据自己的情况明确定位,确立升学目标,了解升学的形式,继而努力学习,奋发图强,为进入理想中的高中扎实学习。

目前,各示范性高中的“自主选拔招生”的方式越来越明晰,并逐步成为主流形式。随着近10年的招生或升学方式的变化,从原来的只有少量的“推优”、“名额分配”为辅,中考为主的“计划型+自主招生补充”的招生方式,到现在的“自荐”和“推荐”为主而中考为辅的“自主招生+计划补充型”招生方式,自主招生越来越受到学校、家长和学生的重视。

中招方式的变化本质原因就是学校要培育优秀的人才,培育必须先选择,自主招生形式恰恰体现了双向选择,学校和学生要进行一个合适的匹配。优秀的同学进入适合自己发展的名校,才会产生智慧的激荡,成为优秀的人才。

选择和匹配的过程是不断变化和完善过程,这个过程需要学生的努力,也需要名师的指点,本套《高中自主招生考试直通车》就是帮助同学建立目标,清晰规划,明确选择,制定学习规划,针对学习,实现梦想。从教师的角度看,本图书也可以作为自主招生命题研究的参考。

本书的特点:

第一,本套从书是发展能力的图书。自主招生选拔的形式和内容虽然多种多样,但本质就是一个,寻找有能力的同学。因此该丛书在能力型的指导思想下由专家研讨、定位、编写而成。

第二,如果拿到本书的同学觉得内容难,或者这本图书的要求暂时达不到,那么可以努力把它作为标杆努力学习,追求卓越;如果你觉得很简单,那么恭喜你,可以在此基础上追求更高的学习要求,或许你已经达到了示范性高中的选拔要求。

第三,本套图书设计的是命题研究+知识模块深度剖析+针对性模拟训练的三级教学模式。让同学根据自己的定位,有更多的选择并进行全面的学习。

针对丛书的特点，读者可以通过命题研究搞清楚自主招生考试的范围；通过剖析讲解弄明白现在要学习什么，怎么学；通过针对性模拟练习起到巩固和熟能生巧的目的。经过三个阶段的学习，最终达到举一反三，多题归一的境界。

感谢为该丛书付出的各个学科的近十位特级教师、高级教师，他们都是有影响力和引领命题趋势的大师；也感谢出版环节的各位同仁及领导的重视；更要感谢的是本书的读者，因为你们的选择，成就了本套丛书从策划、定位、编写到成书的一系列付出与努力，最重要的是成就了你自己！

最后，怀着期待的心情，希望我们建立交流（任何意见和建议或关于本套图书的各类话题的沟通），分享因本图书带来的学习的快乐！

杨运动

# 前言

有学者说:“自主招生是一朵带刺的玫瑰,它静悄悄地开了”。本书的作者亲历了高中自主招生工作,并且一直工作在高中教学的第一线,深知学生需要具备的知识,掌握的方法和遵循的规律,经过精心整理,编成本册《高中自主招生考试直通车—数学》,和同学们共同分享其中的奥妙。

把自主招生比喻成“玫瑰”,在说教育先行者将其作为向招生制度改革的示爱物。“资优生”爱它,自主选择,可以展示自己良好的数学天赋;“名牌校”爱它,双向选择,体现了自主选择的招生权利;“名教师”爱它,自主命题,实现了能力立意的命题理念。

自主招生这朵玫瑰带着“刺”,在说招生制度改革由浅水区向深水区掘进的过程中,给贤于惯性教学或经验式教学的教师、学生、家长带来了不小的挑战。“驾驭”它,没有教学建议,反复操练无济于事,唯有讲深讲透学科本质,用数学思想方法长久地吸引学生;“把握”它,没有复习方向,加班加点事倍功半,只有扎实基础总结规律,用打破砂锅问到底的思维习惯探究问题;“拥有”它,一头雾水从何抓起,改革只能前进,不能后退,习惯的育儿经验恐怕也要与时俱进。

面对自主招生这朵鲜艳的玫瑰,难道只有看的份?作者在思考,“发展中有变化,变化中必有永恒”。数学能力的提升,蕴含在知识的理解、掌握、应用的过程中,成长在知识之间建立联系的过程中,形成于知识间深层次的“通”、“透”、“融”的过程中。于是采用“专题”讲座的形式进行自主招生辅导,四轮实验结果显示,效果果然不错。

本书共有16个专题和三套训练题,内容侧重于初中代数主干内容,共有14个专题。关于几何内容,初中与高中的研究方法不同,所以本书涉及2个专题,同时也为本书下一次修订预留了空间。至于基本方法的总结、如何对待面试问题等,作者已经开始构思,下一轮修订一并完成。

每个专题由五个版块组成。

1. 方框内容——展现本专题的数学基本概念和基本公式，是学习的核心内容。

2. 知识梳理——精炼本专题的基础知识、基本方法、基本原理，力求融会贯通。

3. 例题分析——精析较典型的例题，进行较详细的分析，并做较规范的解答。

4. 练习部分——精选练习题，巩固本专题的基础知识，进而形成基本技能。

5. 作业部分——精编作业题，难度比例题、练习题略低，检测练习效果。

本书可供准备参加高中自主招生的初三学生使用，也可作为学有余力的初中生的课外读物。

由于作者研究水平有限，书中存在的不足之处，请读者给予指正，以便修订时更加完善。

(Email：chenxingyi1230@126.com；chgcat22@163.com)

陈兴义　赵玉梅

2013年2月

# 目 录

# 专题 1 一次函数

把函数 $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ 称为一次函数，其中自变量 $x$ 的取值范围是任意实数。若 $b = 0$，函数 $y = kx$ $(k \neq 0)$ 为正比例函数。

一次函数的图像是一条经过点 $(0, b)$ 和 $\left(-\dfrac{b}{k}, 0\right)$ 的直线。

## 一、专题知识

1. 基本公式

(1) 一次函数的解析式为 $f(x) = kx + b$，其中 $k \neq 0$，$b$ 为常数项。

(2) 一次函数 $f(x) = kx + b$ 的图像是一条直线，其斜率为 $k$。

2. 基本结论

(1) 增减性：当 $k > 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 的函数值 $y$ 随自变量 $x$ 的增大而增大；当 $k < 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 的函数值 $y$ 随自变量 $x$ 的增大而减小。

(2) 对称性：一次函数 $y = kx + b$ 图像上的任意一点都是函数图像的对称中心；特别地正比例函数 $y = kx$ 的图像关于坐标原点 $O$ 中心对称。

(3) 含有绝对值的一次函数的图像是由若干条线段和射线组成的折线，作出它的图像的步骤：先将绝对值去掉，分成几个不含有绝对值的一次函数。

## 二、例题分析

**例题 1** 已知 $O$ 为坐标原点，一次函数 $y = \dfrac{1}{2}x + b$ 的图像与 $x$ 轴、$y$ 轴的交点分别为 $A$、$B$，且 $S_{\triangle AOB} \leqslant 1$，求实数 $b$ 的取值范围。

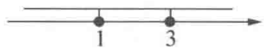
**[解]** 令 $x = 0$，则 $y = b$；令 $y = 0$，则 $x = -2b$，则

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\cdot|-2b|\cdot|b|\leqslant 1$，整理得，$|b|^2\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant b\leqslant 1$。

所以实数 $b$ 的取值范围是 $-1\leqslant b\leqslant 1$。

**例题 2** 作出函数 $y=|x-3|+|x-1|$ 的图像。

［解］ 令 $x-3=0$，得 $x=3$；令 $x-1=0$，得 $x=1$。1 和 3 将数轴分成三段，下面逐段讨论：




(1) 当 $x\leqslant 1$ 时，$y=3-x+1-x=4-2x$；

(2) 当 $1<x<3$ 时，$y=3-x+x-1=2$；

(3) 当 $x\geqslant 3$ 时，$y=x-3+x-1=2x-4$。

所以 $y=\begin{cases}4-2x, & x\leqslant 1\\ 2, & 1<x<3\\ 2x-4, & x\geqslant 3\end{cases}$，其图像如图 1-1 所示。

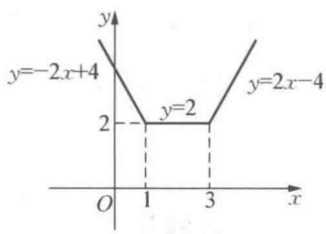



图 1-1

**例题 3** 对于任意实数 $k$，一次方程 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 所表示的直线恒经过点 $D$，求出点 $D$ 的坐标。

［解］ 将方程 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 变形得，$(2x-y-1)k-(x+3y-11)=0$，根据多项式恒等的条件可得，

$\begin{cases}2x-y-1=0\\ x+3y-11=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$，所以点 $D$ 的坐标为 $(2, 3)$。

**例题 4** 如图 1-2 所示，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别相交于 $A$、$B$，以线段 $AB$ 为直角边在第一象限内作等腰直角三角形 $ABC$，且 $\angle ABC=90^\circ$，如果在第二象限内有一点 $P\left(a, \frac{1}{2}\right)$ 满足条件：$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$，求实数 $a$ 的值。

［解］ 令 $x=0$，得 $y=1$；令 $y=0$，得 $x=\sqrt{3}$，所以 $A(\sqrt{3}, 0)$、$B(0, 1)$

即 $|OA|=\sqrt{3}$，$|OB|=1$，$|AB|=2$，$S_{\triangle ABC}=2$，所以 $S_{\triangle ABP}=2$。

$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|y_P|=\frac{\sqrt{3}}{4}$；

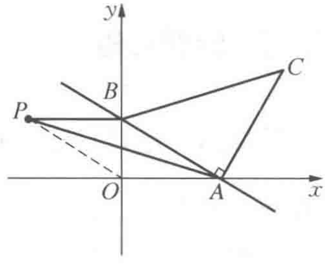



图 1-2

$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}|OB|\cdot|x_P|=-\frac{a}{2}$；

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

由于 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BOP}+S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AOP}$，所以 $-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=2$，解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}-4$。

## 三、专题训练

### 专题练习

1. 求函数 $|x-1|+|y+2|=2$ 的图像所围成的图形的面积.

2. 已知直线 $y=x-4$ 与 $y$ 轴交点为 $M$，直线 $y=-3x+6$ 与 $y$ 轴交点为 $N$，直线 $y=x-4$ 与 $y=-3x+6$ 交点为 $P$，求经过线段 $MN$ 的中点 $Q$ 与点 $P$ 的一次函数解析式。

3. 已知一次函数 $y=(5m+3)x-(5-2n)$，分别求出 $m$, $n$ 的值，使得满足下列条件：

(1) $y$ 随 $x$ 的增大而减小；

(2) 图像在第一、三、四象限；

(3) 图像在 $y$ 轴上的截距小于1；

(4) 图像过$(-1, 0)$、$(0, 3)$ 和$(a, 10)$，求 $a$ 的值。

4. 如图1-3所示，直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别相交于 $M$、$N$ 两点。

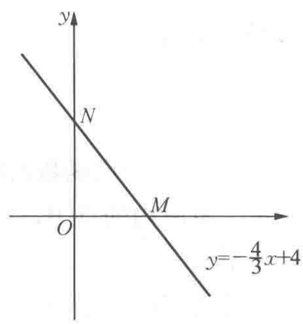


图1-3

(1) 求 $M$, $N$ 两点的坐标；

(2) 如果点 $A$ 在线段 $ON$ 上，将△$NMA$ 沿直线 $MA$ 折叠，$N$ 点恰好落在 $x$ 轴上的 $N'$ 点，求直线 $MA$ 对应的函数的解析式；

(3) 如果点 $P$ 在坐标轴上，以点 $P$ 为圆心，$\frac{12}{5}$ 为半径的圆与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相切，求点 $P$ 的坐标。

5. 已知 $p$ 是质数，$q$ 是正整数，是否存在这样的一次函数，使得其同时满足下

列两个条件：(1) 图像经过点(98，19)；(2) 图像与 $x$ 轴、$y$ 轴的交点分别为($p$，0)、(0，$q$)。若存在，求出函数解析式；若不存在，说明理由。

6. 已知不等式 $mx^2-2x-m+1\leqslant 0$ 对于任意的 $m\in[2, 3]$ 恒成立，求实数 $x$ 的取值范围。

7. 如图 1－4 所示，$\triangle AOB$ 为等边三角形，其中 $B(2, 0)$，过点 $C(-2, 0)$ 的直线 $l$ 与 $AO$、$AB$ 分别相交于点 $D$、$E$，若 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle DOC}$，求直线 $l$ 的表达式。

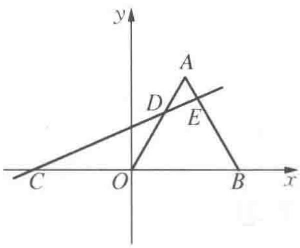


图 1－4

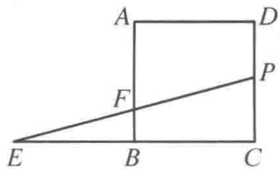


图 1－5

8. 如图 1－5 所示，四边形 $ABCD$ 是边长为 10 的正方形，点 $E$ 在边 $CB$ 的延长线上，且 $EB=10$，点 $P$ 在边 $DC$ 边上运动，$EP$ 与 $AB$ 的交点为 $F$，设 $DP=x$，$\triangle EFB$ 与四边形 $AFPD$ 的面积之和为 $y$，写出 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式。

9. 已知 $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$，求证：$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)<1$。

10. 已知 $k$ 为正整数，直线 $y=kx+k-1$ 和直线 $y=(k+1)x+k$ 以及 $x$ 轴围成的三角形的面积为 $S_k$，计算：$S_1+S_2+\cdots+S_{2012}$ 的值。

## 专题作业

1. 已知一次函数的图像与 $x$ 轴相交于 $A(-6, 0)$，与正比例函数的图像相交于第二象限内的点 $B$，且 $B$ 的横坐标为 $-4$，$S_{\triangle AOB}=15$，求一次函数和正比例函数的解析式。

2. 已知 $-2\leqslant p\leqslant 2$，不等式 $(x-1)p+x^2-2x+1>0$ 恒成立，求实数 $x$ 的取值范围。

3. 已知梯形 $ABCD$（如图 1－6 所示）中，$AB=CD=5$，$AD=8$，$BC=14$，$E$ 是 $AD$ 上的定点，$AE=4$，动点 $P$ 从 $D$ 出发，沿着梯形的边依次经过 $C$、$B$，最后到达 $A$，设点 $P$ 走过的距离为 $x$，$y=S_{\triangle APE}$，写出 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式，并画出图像。

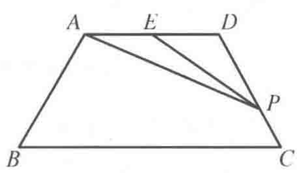


图 1－6

# 专题 1 参考答案

## 专题练习

1. **解：** 当 $x \geqslant 1, y \geqslant -2$ 时，$y=-x+1$；

当 $x \geqslant 1, y < -2$ 时，$y=x-5$；

当 $x < 1, y \geqslant -2$ 时，$y=x-1$；

当 $x < 1, y < -2$ 时，$y=-x+3$；

所以函数 $|x-1|+|y+2|=2$ 的图像所围成的图形是一个边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，所求的图形的面积为 8。

2. **解：** 直线 $y=x-4$ 与 $y$ 轴交点为 $M(0,-4)$，直线 $y=-3x+6$ 与 $y$ 轴交点为 $N(0,6)$，线段 $MN$ 的中点 $Q(0,1)$。由 $\begin{cases} y=x-4 \\ y=-3x+6 \end{cases}$，得 $P$ 点坐标为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$

设经过点 $Q$ 与点 $P$ 的一次函数解析式为 $y=kx+b(k \neq 0)$，则

$\begin{cases} b=1 \\ \frac{5}{2}k+b=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ b=1 \end{cases}$，即所求的一次函数解析式为 $y=-x+1$。

3. **解：** (1) $5m+3<0$，解得 $m<-\frac{3}{5}$，所以当 $m<-\frac{3}{5}$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小；

(2) $5m+3>0$ 且 $-(5-2n)<0$，解得 $m>-\frac{3}{5}$ 且 $n<\frac{5}{2}$，当 $m>-\frac{3}{5}$ 且 $n<\frac{5}{2}$ 时，图像在第一、三、四象限；

(3) $-(5-2n)<1, 5m+3 \neq 0$，即 $n<3$ 且 $m \neq -\frac{3}{5}$，图像在 $y$ 轴上的截距小于 1；

(4) 图像过 $(-1,0)$ 和 $(0,3)$ 两点，$\begin{cases} -(5m+3)-(5-2n)=0 \\ -(5-2n)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=4 \end{cases}$

所求函数解析式为 $y=3x+3$，当函数 $y=3x+3$ 的图像过点 $(a,10)$ 时，解得 $a=\frac{7}{3}$。

4. **解：** (1) $M(3,0)$ $N(0,4)$；

(2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(3) 第一种情况：当 $P_1$ 在 $y$ 轴上且在点 $N$ 下方时，$P_1$ 坐标是(0, 0)；

第二种情况：当 $P_2$ 在 $x$ 轴且在 $M$ 点的左侧时，$P_2$ 坐标是(0, 0)；

第三种情况：当 $P_3$ 在 $x$ 轴且在 $M$ 点右侧时，$P_3$ 坐标是(6, 0)；

第四种情况：当 $P_4$ 在 $y$ 轴且在点 $N$ 上方时，$P_4$ 的坐标是(0, 8)；

综上所述，点 $P$ 的坐标为(0, 0)、(6, 0)、(0, 8)。

5. **解**：假设存在满足条件的一次函数，设其解析式为 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$，则由题意得：

$$\begin{cases}98k+b=19\\ p=-\frac{b}{k}\\ q=b\end{cases}$$

由于 $q$ 是正整数，所以 $b$ 是正整数，所以 $k$ 是负整数。

由 $98k+b=19$ 得，$b=19-98k$，代入 $p=-\frac{b}{k}$ 得，$p=98-\frac{19}{k}$

因为 $19=-1\times(-19)$

(1) 当 $a=-1$ 时，$p=117$ 不是质数，舍去；

(2) 当 $a=-19$ 时，$p=99$ 不是质数，舍去。

综上(1)、(2) 可得，满足条件的一次函数不存在。

6. **解**：将不等式 $mx^2-2x-m+1\leqslant 0$ 变形为 $(x^2-1)m+1-2x\leqslant 0$，

令 $f(x)=(x^2-1)m+1-2x(m\in[2, 3])$，则 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，需满足条件：

$$\begin{cases}f(2)\leqslant 0\\ f(3)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x^2-1)+1-2x\leqslant 0\\ 3(x^2-1)+1-2x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2x-1\leqslant 0\\ 3x^2-2x-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{7}}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{7}}{3}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{7}}{3}$，所以实数 $x$ 的取值范围是 $\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{7}}{3}$。

7. **解**：$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle DOC}\Rightarrow S_{\triangle AOB}=S_{\triangle CBE}=\sqrt{3}\Rightarrow y_E=\frac{\sqrt{3}}{2}$

直线 $AB$ 的方程：$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，点 $E$ 在直线 $AB$ 上，所以 $E\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

点 $C(-2, 0)$，直线 $l$ 经过点 $E$、$C$，所以直线 $l$ 的表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{7}x+\frac{2\sqrt{3}}{7}$。

8. **解**：$DP=x$，则 $PC=10-x$，$FB=\frac{1}{2}(10-x)(0<x<10)$

由题意可得：$y=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{1}{2}\times(10-x)+\frac{1}{2}\left[10-\frac{1}{2}(10-x)+x\right]\times 10=5x+50$

所以 $y=5x+50$，其中 $0<x<10$。

9. **证明**：设 $f(a)=a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$，即 $f(a)=(1-b-c)a+c+b-bc$

因为 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$

所以 $f(0)=c(1-b)+b<1-b+b=1$

$f(1)=1-b-c+c+b-bc=1-bc<1$

由于 $0<a<1$

根据一次函数的图像性质可知，$f(0)<f(a)<f(1)$

所以不等式 $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)<1$ 成立。

10. **解**：联立方程得方程组 $\begin{cases}y=kx+k-1\\y=(k+1)x+k\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$，所以两条直线的交点为$(-1,-1)$，直线 $y=kx+k-1$、$y=(k+1)x+k$ 与 $x$ 轴的交点坐标分别为$\left(\frac{1-k}{k},0\right)$、$\left(\frac{-k}{1+k},0\right)$，则 $S_k=\frac{1}{2}\times|-1|\times\left|\frac{1-k}{k}+\frac{k}{1+k}\right|=\frac{1}{2}\times\left|\frac{1}{(k+1)k}\right|=\frac{1}{2}\times\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

所以 $S_1+S_2+\cdots+S_{2\,012}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,012}-\frac{1}{2\,013}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2\,013}\right)$

$=\frac{1\,006}{2\,013}$

## 专题作业

1. **解**：一次函数的解析式为 $y=\frac{5}{2}x+15$，正比例函数的解析式为 $y=-\frac{5}{4}x$。

2. **解**：设 $f(p)=(x-1)p+x^2-2x+1$

因为对于任意的 $p\in[-2,\ 2]$，$f(p)>0$ 恒成立，则需满足条件：

$\begin{cases}f(-2)>0\\f(2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+3>0\\x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>3$

所以当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时，不等式恒成立。

3. **解**：过 $D$ 作 $DF\perp BC$ 于 $F$，则 $CF=3$，$DF=4$

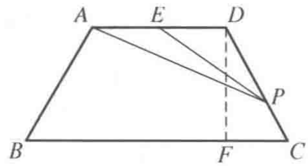



图 1-7

(1) 当点 $P$ 在 $DC$ 上移动时，

即 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，$y=\dfrac{1}{2}\times 4\times x\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{5}x$；

(2) 当点 $P$ 在 $CB$ 上移动时，

即 $5<x\leqslant 19$ 时，$y=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8$；

(3) 当点 $P$ 在 $BA$ 上移动时，

即 $19<x\leqslant 24$ 时，$y=\dfrac{1}{2}\times 4\times(24-x)\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{5}(24-x)$

综上(1)、(2)、(3) 可得，$y=\begin{cases}\dfrac{8}{5}x,\ 0\leqslant x\leqslant 5\\8,\ 5<x\leqslant 19\\\dfrac{8}{5}(24-x),\ 19<x\leqslant 24\end{cases}$

图像见图 1-8。

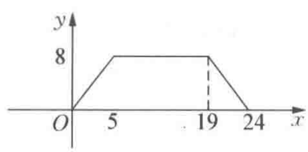



图 1-8

# 专题 2 二次函数

一般地，把形如 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的函数称为二次函数，其中自变量 $x$ 的取值范围是任意实数，它的图像是一条抛物线。

## 一、专题知识

1. 基本公式

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图像的顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$；

(2) 二次函数的解析式的顶点式：$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}\ (a\neq 0)$；

(3) 二次函数的解析式的交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a\neq 0)$。

2. 基本结论

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图像的对称性：关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 成轴对称图形。

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的增减性：

① 当 $a>0$ 时，在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上是减函数，在区间 $\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是增函数；

② 当 $a<0$ 时，在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上是增函数，在区间 $\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是减函数。

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的最大、最小值：

① 当 $a>0$ 时，$x=-\dfrac{b}{2a}$，$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；