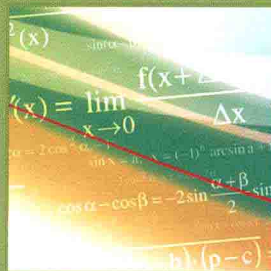
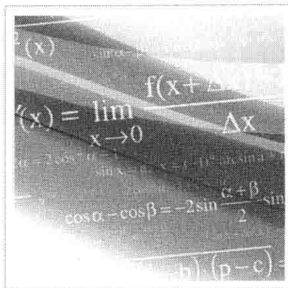
WEIJIFEN WEIJIFEN WEIJIFEN WEIJIFEN



微积分

主　编　彭乃驰
副主编　黄克武　党婷

中国人民大学出版社



微积分

主　编　彭乃驰
副主编　黄克武　党婷

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/彭乃驰主编. —北京：中国人民大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-300-21812-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①彭… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 193389 号

微积分

主　编　彭乃驰

副主编　黄克武　党　婷

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2015 年 8 月第 1 版
印　　张	14.5	**印　　次**	2015 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	338 000	**定　　价**	32.00 元

前言

本书根据独立学院办学目标和学生特点，结合多年在独立学院从事微积分教学经验及教学信息反馈意见编写而成。书中既突出了对数学思想的理解，又以最清晰、最简洁的方式介绍了微积分的基本概念，并强调了微积分在经济方面的应用。全书共分十章，主要内容包括函数、极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、微积分在经济中的应用。

在编写过程中，参考了国内近年来出版的同类优秀教材，在教材体系、内容安排和例题选取等方面吸取了它们的优点。同时考虑到教学的主要对象是独立学院经济管理会计类专业学生，本教材在编写过程中注意到了以下几方面的问题：

1. 考虑到教学对象是独立学院的学生，一方面删除了一些较难、较复杂的定理证明，保证了理论方面介绍的简洁性；另一方面，在所选例题上狠下工夫，针对每个知识点精选例题，保证所选例题具有典型性、代表性，又注意例题难度上的层次性，以中等、简单难度的例题为主，也有少量较难的例题供教师灵活选用。

2. 考虑到教学对象是经济管理会计类专业学生，教材中强调了微积分在经济方面的应用，单独编写了“微积分在经济中的应用”一章。

3. 为适应分层教学的需要，一方面教材部分内容设置了 * 号，教师在实际教学中可根据学时情况、学生专业情况、学生学习情况等，对该部分内容自行决定略去不讲或有选择性的讲授；另一方面，教材还按（A）、（B）两组编入了大量习题，其中（A）组习题为基本习题，所有学生都要求掌握，（B）组习题为提高习题，供学有余力的学生学习使用。

本书由彭乃驰（四、八、九、十章）、党婷（一、二、三章）和黄克武（五、六、七章）共同编写。本书可作为独立学院经济管理会计类专业教材，也可作为其他层次高校相关专业的教学参考书。

衷心感谢云南大学旅游文化学院 2012 级、2013 级学生以及信科系数学教研室教师在使用本教材“试用版”时所提出的宝贵意见，感谢吕小俊为五、六、七章作电子版图象。同时审稿专家认真审阅了书稿，并提出了改进意见，对此我们也表示衷心的感谢。

限于编者水平，教材中难免存在一定的不当之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2015 年 4 月

目录

第 1 章　函　数

函数是微积分的基本研究对象. 本章将介绍函数的定义，函数的基本特性，复合函数与反函数，基本初等函数与初等函数.

§1.1　函数的定义

一、相关概念

定义 1.1　给定非空数集 D，对应法则 f，若对于任意的 $x \in D$，在 f 的作用下，存在唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数或称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x \in D$.

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，非空数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，记为 D_f. 若 $x_0 \in D$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，函数值的全体所构成的集合称为函数的值域，记为 R_f，即 $R_f=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$.

注： 1. 函数实质上是一种特殊的对应法则，它反映了变量间最本质的联系；

2. 对应的唯一性，如：$y=\pm(x^2+1)$ 不是函数，因为对于任意的实数 x，存在两个 y 值与之对应，对应不唯一；

3. 定义域和对应法则是确定一个函数的两个要素，若两个函数的定义域、对应法则完全相同，则称这两个函数是同一个函数；

4. 函数的表示法：解析法、图像法、列表法.

例 1　(1) 求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

(2) 已知 $f(t)$ 的定义域是 $t=2^x(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 的值域，求 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

分析： 定义域即自变量 x 的取值范围，求定义域最根本的原则即要使函数有意义，比如，分母不能为 0，对数函数的真数必须大于 0，等等.

求定义域一般有两个步骤：(1) 根据要使函数有意义列出不等式或不等式组；(2) 解出不等式或不等式组得出的 x 的取值范围，即函数的定义域.

解： (1) 对于该题 x 应满足：

$$\begin{cases} \lg(3x-2)\neq 0\Rightarrow 3x-2\neq 1\Rightarrow x\neq 1 \\ 3x-2>0\Rightarrow x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

因此函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为 $\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)\cup(1,\ +\infty)$.

(2) $t=2^x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的值域是 $\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$，据题意可知 $f(t)$ 的定义域是 $\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$，即 $\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2$. $\log_2 x$ 在 t 的位置上，故 $\dfrac{1}{2}\leqslant \log_2 x\leqslant 2$，解得 $x\in[\sqrt{2},\ 4]$，所以 $f(\log_2 x)$ 的定义域是 $[\sqrt{2},\ 4]$.

例 2 (1) 已知 $f(x)=x^2$，求 $f(10)$，$f(x+10)$，$f[f(x)]$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(2) 已知 $f(x-1)=x(x-1)$，求 $f(x)$.

解：(1) $f(10)=10^2=100$

$f(x+10)=(x+10)^2=x^2+20x+100$

$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}$.

(2) 设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$f(t)=(t+1)t=t^2+t$，因为函数的本质与自变量的符号无关，所以将上式中的 t 换作 x，即可得 $f(x)=x^2+x$.

例 3 判断下列函数是否是同一个函数?

(1) $y=\tan x$ 与 $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

(2) $y=\lg[x(x-1)]$ 与 $y=\lg x+\lg(x-1)$

解：(1) 由 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，知两个函数的对应规则相同. 又 $\tan x$ 与 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的定义域都是 $\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\}$，故两个函数是同一个函数.

(2) $y=\lg[x(x-1)]$ 的定义域是 $(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$，而 $y=\lg x+\lg(x-1)$ 的定义域是 $(1,\ +\infty)$，因此这两个函数不是同一个函数.

二、分段函数

定义 1.2 对于定义域内自变量不同的值，其对应规则不能用统一的表达式表示，而需要用两个或两个以上的式子表示的函数称为分段函数.

例 4 (1) 用分段函数表示 $y=3-|x-1|$.

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases} x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^2, & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$，求 $f(3)$，$f(-x)$，$f(x-1)$ 并指出 $f(x-1)$ 的定义域.

解：(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，$y=3-(x-1)=4-x$.

当 $x<1$ 时，$y=3+(x-1)=x+2$.

综上述，$y=\begin{cases} 4-x, & x\geqslant 1 \\ x+2, & x<1 \end{cases}$.

(2) $f(3)=9$.

$$f(-x)=\begin{cases}-x+2, & 0\leqslant -x\leqslant 2\\ (-x)^2, & 2<-x\leqslant 4\end{cases}=\begin{cases}2-x, & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x^2, & -4\leqslant x<-2\end{cases}.$$

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}=\begin{cases}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3\\ x^2-2x+1, & 3<x\leqslant 5\end{cases}.$$

$f(x-1)$ 的定义域是 $[1, 5]$.

定义 1.3　对每个实数 x，令不超过 x 的最大整数为 $[x]$，得到 $y=[x]$，$x\in R$，称此函数为取整函数.

如：$[1]=1$，$[1.6]=1$，$[-1.6]=-2$

例 5　取整函数

$$y=[x]=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ -1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\\ 2, & 2\leqslant x<3\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

易知取整函数的定义域为实数集 R，值域为整数集 Z，其图像如图 1.1 所示：

例 6　符号函数 $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$，其图像如图 1.2 所示：

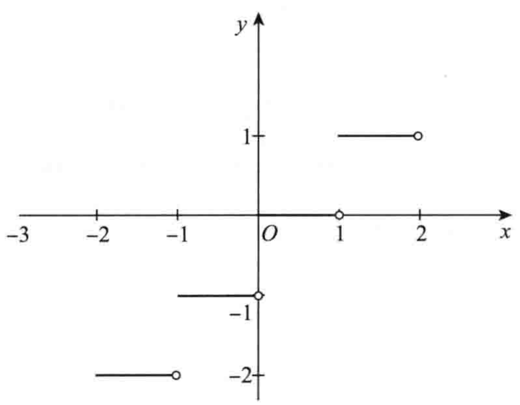


图 1.1

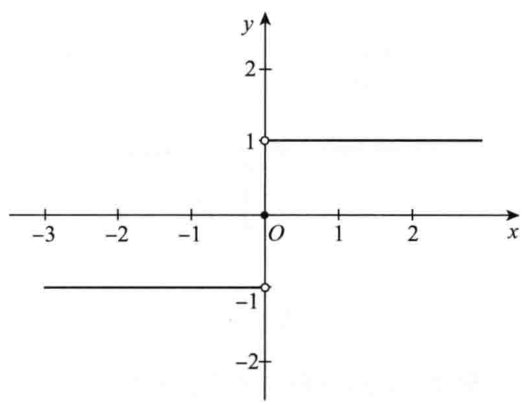


图 1.2

§ 1.2　函数的基本特性

一、单调性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 在某非空数集 D 上有定义，若 $\forall x_1, x_2\in D$，当 $x_1>x_2$ 时有

(1) $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增；

(2) $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递减.

例 1 判断并证明函数 $f(x)=2x^2+1$ 的单调性.

解：由图 1.3 可知函数 $f(x)=2x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

证明：$\forall x_1, x_2\in(-\infty, 0)$，设 $x_1>x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)=2(x_1^2-x_2^2)=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=2x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减.

函数 $f(x)=2x^2+1$ 在 $(0, +\infty)$ 的单调性读者可自行证明.

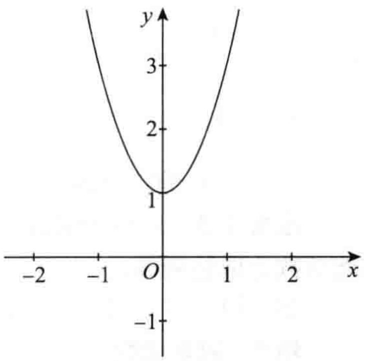


图 1.3

二、奇偶性

定义1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若 $\forall x\in D$ 有

(1) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

由函数奇偶性的定义易知：偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称，如图 1.4、1.5 所示：

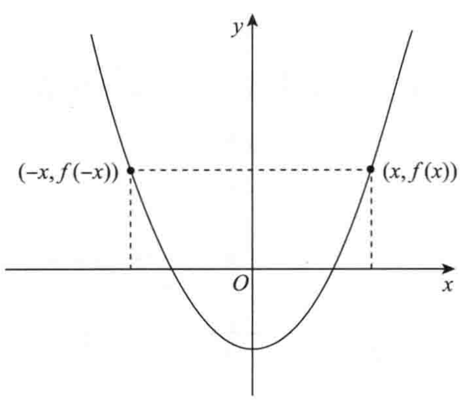


图 1.4

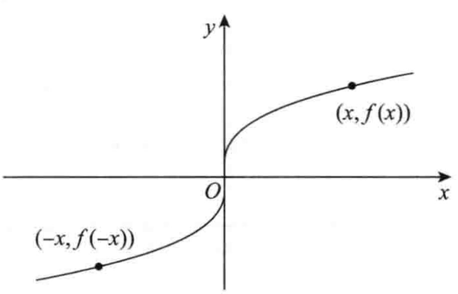


图 1.5

例 2 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0; \\ x-1, & x>0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 R，

$$f(-x)=\begin{cases} -x+1, & -x<0 \\ 0, & -x=0 \\ -x-1, & -x>0 \end{cases}=\begin{cases} -x+1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x-1, & x<0 \end{cases}=-\begin{cases} x-1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}=-f(x).$$

所以 $f(x)$ 是奇函数，其图像如图 1.6 所示：

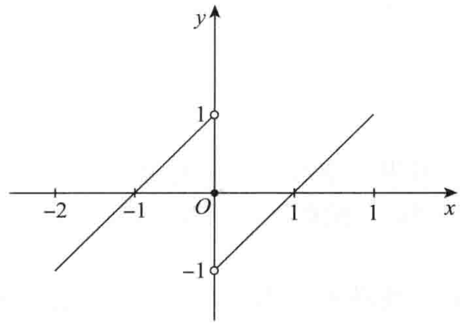


图 1.6

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域是 R，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x).$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

三、周期性

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 在某非空数集 D 上有定义，若 $\exists T>0$ 使得 $\forall x\in D$，$(x+T)\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，使上式成立的最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期.

例 3　设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，证明 $f(ax)$ $(a>0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证明：$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$，

因为 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，所以 $f(ax+T)=f(ax)$.

所以 $f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax)$ 即 $f(ax)$ $(a>0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

比如，$y=\sin\frac{x}{3}$ 是以 6π 为周期的周期函数.

例 4　求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期.

解： $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

因此 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

例 5　若 $f(x)$ 是以 4 为周期的偶函数，且 $f(-1)=-2$，则 $f(5)=$________.

解： $f(5)=f(1+4)$

因为 $f(x)$ 以 4 为周期，所以 $f(1+4)=f(1)$.

又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(1)=f(-1)$.

所以 $f(5)=f(-1)=-2$.

四、有界性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 在某非空数集 D 上有定义

(1) 若 $\exists M>0$（M 为常数），使得 $\forall x\in D$，$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，否则无界；

(2) 若 $\exists M$（M 为常数），使得 $\forall x\in D$，$f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界；

(3) 若 $\exists M$（M 为常数），使得 $\forall x\in D$，$f(x)\geqslant M$ 则称 $f(x)$ 在 D 上有下界.

注： 1. 定义中等号可不取.

2. 一个函数既有上界又有下界才可称为有界，即有界$\Leftrightarrow$既有上界又有下界.

3. 同一函数在不同区间上的有界性可能不同，例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $(1,+\infty)$ 内有界，在 $(1,2)$ 内有界，如图 1.7 所示：

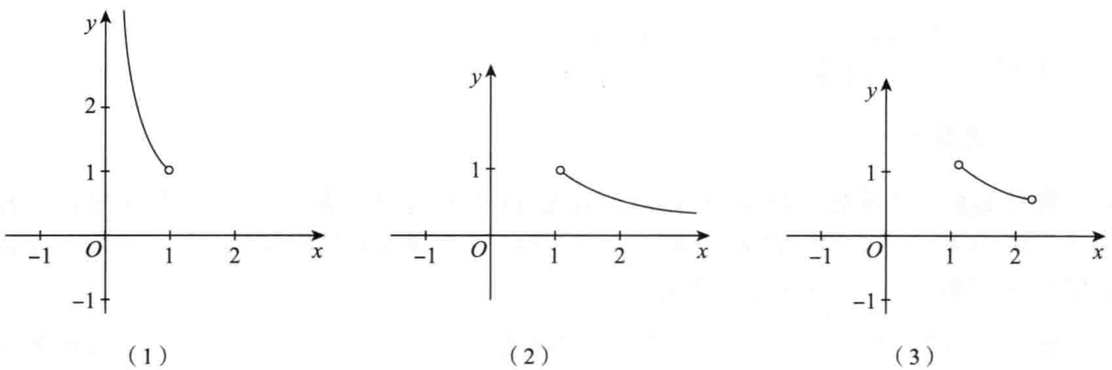


图 1.7

4. 函数的有界性可由图像、定义、求值域等方法来判断.

例 6 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是有界的.

证明： 该函数的定义域是 R，

$\forall x\in R$，$|f(x)|\leqslant 1$，由有界性的定义可知 $f(x)$ 在其定义域上有界.

例 7 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的有界性.

解： $f(x)$ 的定义域是 R，

当 $x\neq 0$ 时，$|f(x)|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=0$.

故 $\forall x\in R$，恒有 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

因此，$f(x)$ 在其定义域上有界.

§1.3 复合函数与反函数

一、复合函数

定义 1.8 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的值域为 R_g，若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则称 $y=f[g(x)]$ 为复合函数，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

例 1 已知 $f(x)=2x^2+3$，$g(x)=\arccos x$ 求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，并判断它们是否是复合函数.

解： $f[g(x)]=2g(x)^2+3=2(\arccos x)^2+3$，

$D_f=R$，$R_g=[0,\ \pi]$，$D_f\cap R_g\neq\varnothing$，

因此 $f[g(x)]$ 是复合函数.

$g[f(x)]=\arccos f(x)=\arccos(2x^2+3)$，

$D_g=[-1,\ 1]$，$R_f=[3,\ +\infty)$，$D_g\cap R_f=\varnothing$，

因此 $g[f(x)]$ 不是复合函数.

注： 两个函数复合是有顺序的，$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 意义不同.

* **例 2** 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解： $$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x+2<1, & x<0\\ x+2, & x+2\geqslant 1, & x<0\\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1, & x\geqslant 0\\ x^2-1, & x^2-1\geqslant 1, & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}.$$

例 3 将下列函数拆成简单函数：

(1) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$

解： $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$.

(2) $y=\log_2\left[\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

解： $y=\log_2 u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$.

(3) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

解： $y=\lg u$，$u=x+v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$.

二、反函数

定义 1.9 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，其值域为 R_f，若对于任意的 $y\in R_f$，存在唯一的 $x\in D$ 与之对应且满足 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$ 并称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

注： 1. 只有从定义域到值域上一一对应所确定的函数才有反函数，单调函数必有反函数.

2. 反函数的定义域、值域分别是原函数的值域和定义域.

3. 原函数与反函数的图像关于 $y=x$ 对称.

求反函数的步骤：(1) 通过 $y=f(x)$ 解出 x；(2) 习惯上以 x 为自变量，y 为因变量，故互换 x、y；(3) 求出反函数的定义域（即原函数的值域）.

例 4 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1$

(2) $y=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

解：(1) 由 $y=3x-1$ 可解得 $x=\dfrac{1}{3}(y+1)$，故 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)$，$x\in R$.

(2) 当 $x<0$ 时，由 $y=x-1$ 可解得 $x=y+1$，此时，原函数的值域为 $(-\infty,-1)$；当 $x\geqslant 0$ 时，由 $y=x^2$ 可解得 $x=\sqrt{y}$，此时，原函数的值域为 $[0,+\infty)$.

综上述，$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1, & x<-1 \\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$.

(3) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 可解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，原函数的值域为 $\{y \mid y\neq -1\}$，故 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq -1$.

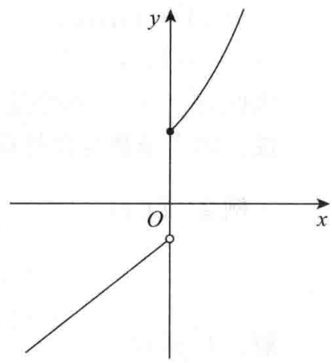


图 1.8

* **例 5** $y=f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0 \\ e^x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

问 a、b 为何值时函数 $y=f(x)$ 存在反函数？

解：只有一一对应函数才存在反函数，通过试画 $y=f(x)$ 的图像可知当 $a>0$，$b\leqslant 1$ 时，$y=f(x)$ 存在反函数如图 1.8 所示.

§1.4 初等函数

一、基本初等函数

定义 1.10 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(一) 常数函数 $y=C$，如图 1.9：

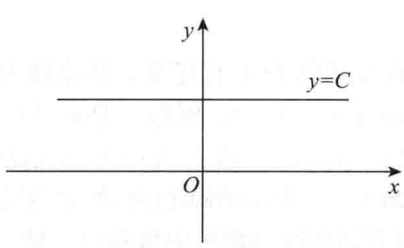


图 1.9

（二）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）

它的定义域、值域、图像等各种性质均随 μ 而变化，常见的幂函数有 $y=x$、$y=x^2$、$y=x^3$、$y=x^{-1}$、$y=x^{\frac{1}{2}}$，如图 1.10：

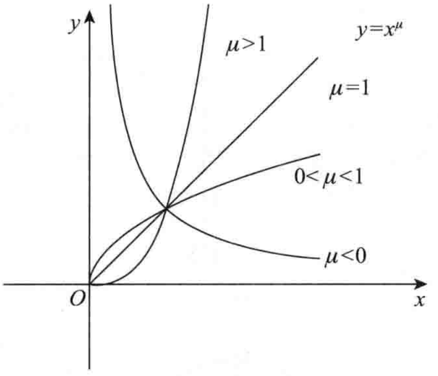


图 1.10

（三）指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$），如图 1.11：

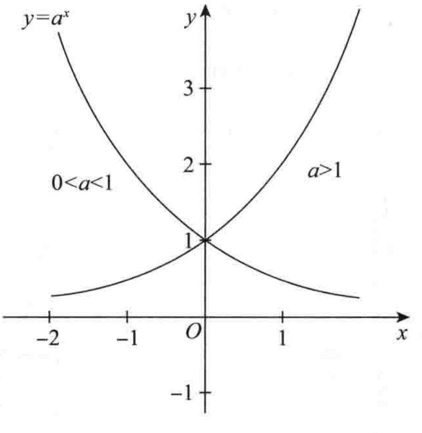


图 1.11

（四）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$），如图 1.12：

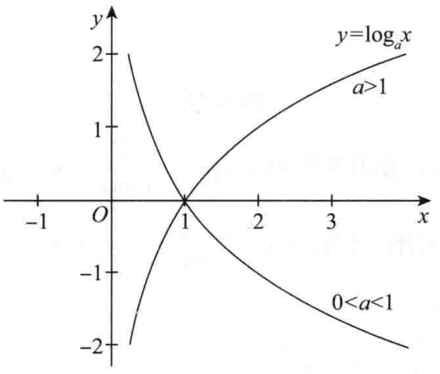


图 1.12

（五）三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$，如图 1.13：

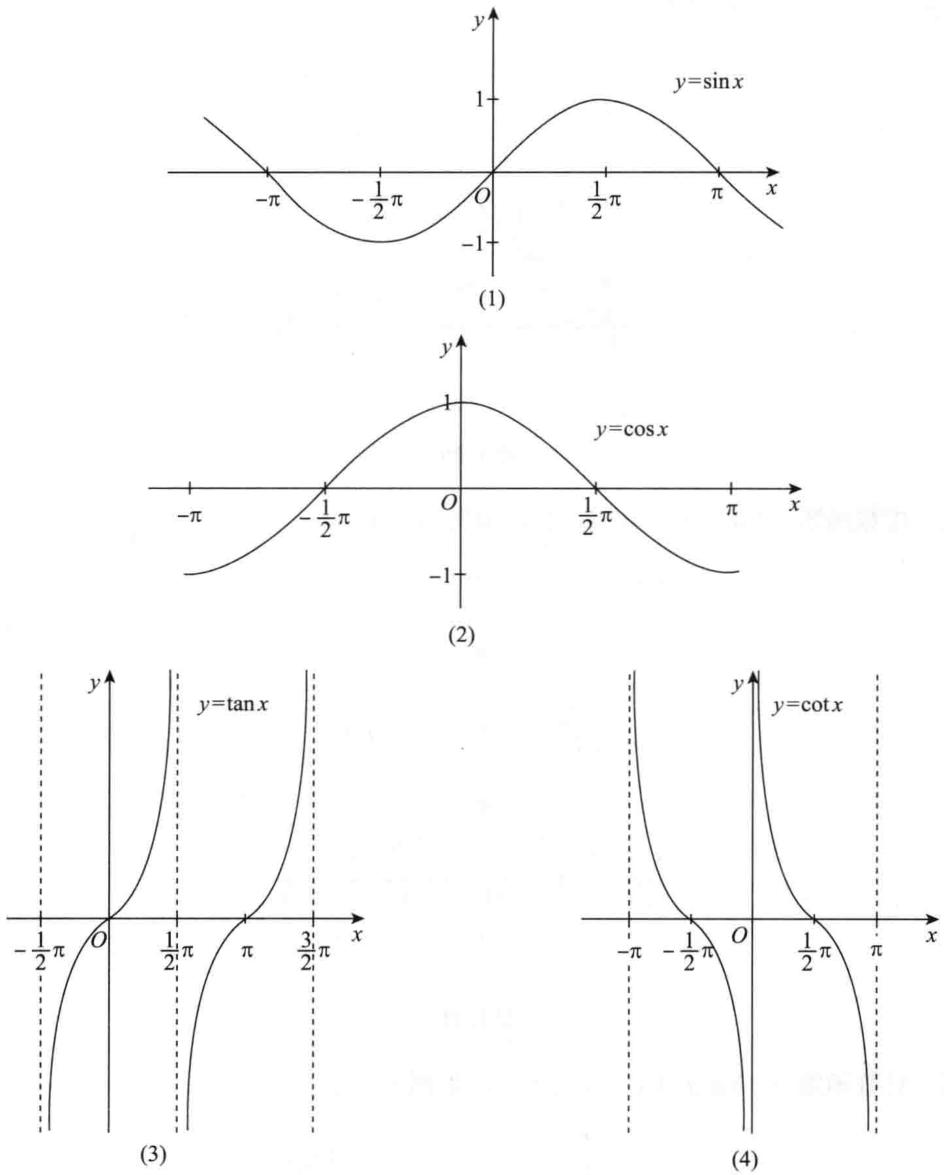


图 1.13

注： 1. 正割函数 $y=\sec x$ 常用性质有：$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$1+\tan^2 x=\sec^2 x$.

2. 余割函数 $y=\csc x$ 常用性质有：$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

3. 常见的和差化积公式：

（1）$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(2) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(4) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

4. 常见的积化和差公式：

(1) $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

(2) $\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

(3) $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

(4) $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

（六）反三角函数

反三角函数本质上就是三角函数在指定区间上的反函数.

反三角函数有六种：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\mathrm{arccot}x$，反正割函数 $y=\mathrm{arcsec}x$，反余割函数 $y=\mathrm{arccsc}x$. 其中前四种反三角函数是要求重点掌握的，下面介绍如下：

1. 反正弦函数

定义 1.11 正弦函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$.

函数 $\arcsin x$ 表示在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上正弦值等于 x 的角.

如图 1.14 所示.

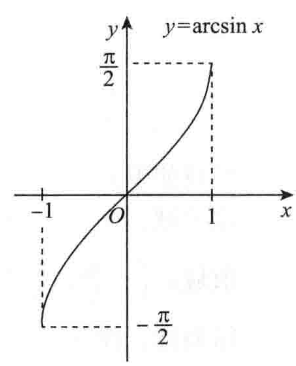


图 1.14

性质如下：

定义域：$[-1, 1]$

值域：$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

单调性：在 $[-1, 1]$ 上是增函数

奇偶性：奇函数

周期性：非周期函数

有界性：有界函数

恒等式：$\sin(\arcsin x)=x, (x\in[-1, 1])$

$\arcsin(\sin x)=x, \left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

2. 反余弦函数

定义 1.12 余弦函数 $y=\cos x(x\in[0, \pi])$ 的反函数叫做反余弦函数，记作 $y=\arccos x$. $\arccos x$ 表示在 $[0, \pi]$ 上余弦值等于 x 的角.

如图 1.15 所示.

性质如下：