

普通高等教育“十三五”规划教材

人力资源和社会保障部 中国就业培训技术指导中心

国家高技能人才培训工程3D-CAD培训与认证推荐用书

CATIA

工程结构分析 (CAE)

刘宏新 郭丽峰 徐高伟 周向荣 著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

人力资源和社会保障部 中国就业培训技术指导中心

国家高技能人才培训工程 3D-CAD 培训与认证推荐用书

CATIA 工程结构分析 (CAE)

刘宏新 郭丽峰 徐高伟 周向荣 著



机械工业出版社

工程结构分析是为了保证产品的可靠性与安全性所进行的必要技术环节之一，也是设计优化的前提。随着产品结构的复杂化与大型化，以及对分析精度要求的不断提高，传统的计算与分析方法已无法满足现代工程的需要，基于有限元的计算机辅助工程结构分析是目前最为理想和有效的技术解决方案。本书针对有限元工程结构分析及 CATIA 工程分析模块的核心内容，根据铺垫基础知识、熟悉分析流程、进行技术操作和实践应用的顺序，设置 12 个主体章节以及工程结构分析过程中常用的力学符号及物理量纲、CATIA 工程分析功能图标一览表等附录，力求系统和全面地表述计算机辅助工程结构分析的相关知识。本书主体章节围绕具体实例撰写了详细的操作步骤，精心设计了训练综合应用能力的环节，同时也将作者在 CATIA 教学与工程应用过程中总结的经验和技巧融入其中，以使读者能够熟练、准确、灵活、高效地运用 CATIA 工程结构分析模块。全书的知识体系和内容设置既便于读者系统地学习计算机辅助工程结构分析，又可满足读者在分析过程中对经常用到的约束、载荷及相关工程标准等关键技术内容的查询需要。

图书在版编目 (CIP) 数据

CATIA——工程结构分析(CAE) / 刘宏新, 郭丽峰, 徐高伟, 周向荣编著.
—北京: 机械工业出版社, 2015.3
ISBN 978-7-111-51347-6

I. ①C… II. ①刘… ②郭… ③徐… ④周… III. ①机械设计—计算机辅助设计—应用软件 IV. ①TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 202824 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 曲彩云 责任印制: 康朝琦

北京中兴印刷有限公司印刷

2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·26.75 印张·663 千字

0001—3000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-51347-6

ISBN 978-7-89405-722-8 (光盘)

定价: 69.00 元 (含 1CD)

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线: 010-88361066

读者购书热线: 010-68326294

010-88379203

封面防伪标均为盗版

网络服务

机工官网: www.cmpbook.com

机工官博: weibo.com/cmp1952

金书网: www.golden-book.com

教育服务网: www.cmpedu.com

前 言

工程结构分析是在功能和形式设计完成之后,为保证产品的可靠性与安全性所进行的必要技术环节之一,也是设计优化的前提。通过工程结构分析,可以找出工程中存在的不合理、不均衡、不可靠的地方并予以纠正和完善。除基本的强度与变形校验外,工程结构分析越来越多地被用于对新产品进行投产之前的优化研究,从而达到降低成本,并保证产品的可靠性和安全性的目的。随着产品结构的复杂化与大型化,以及对分析精度要求的不断提高,传统的计算与分析方法已无法满足现代工程的需要,基于有限元算法的计算机辅助工程结构分析是目前工程领域最为理想和有效的技术解决方案。

CATIA 在提供了 3D 产品造型基本功能的基础上,扩展了工程结构分析、虚拟仿真、数字化加工等模块,使计算机辅助产品设计的链条趋于完善。从最初的概念设计到最终产品的形成,CATIA 提供了完整的 2D 和 3D 设计、参数化混合建模、数字样机、数据管理等手段。同时,作为一个完全集成化的软件系统,CATIA 将机械设计、工程结构分析、数字样机仿真、数控加工和 CATweb 网络应用解决方案有机地结合在一起,为用户提供严密的无纸工作环境。与专用的工程结构分析软件相比较,因 CATIA 所提供的工程分析模块使设计与分析工作能够在同一个软件平台环境下完成,不需要格式转换及适应性调整,应用更便捷,效率更高,数据传递更完整、准确。

针对有限元工程结构分析技术及 CATIA 工程分析模块的核心内容,本书以典型结构、典型工程环境为例详细讲解了 CATIA 工程结构分析的流程、方法以及工程运用。根据铺垫基础知识、熟悉分析流程、进行技术操作和实践应用的顺序,设置了有限元分析基础、CATIA 工程结构分析模块综述、模型准备及预处理、网格划分、虚拟零件、联接关系、联接特性、约束、载荷、模型检查、求解与分析、工程实例等 12 章,以及工程结构分析过程中常用的力学符号及物理量纲、CATIA 工程分析功能图标一览表等附录,力求系统和全面地表述计算机辅助工程结构分析的相关知识。

实例模型在 CATIA V5 R21 汉化版本中制作完成。主体章节围绕具体实例撰写了详细的操作步骤,精心设计了训练综合应用能力的环节,同时也将作者在 CATIA 教学与工程应用过程中总结的经验和技巧融入其中,以使读者能够熟练、准确、灵活、高效地运用 CATIA 工程结构分析模块。全书的体系和内容设置既便于读者系统地学习 CATIA 工程结构分析,又可满足读者在分析过程中对经常用到的约束、载荷及相关工程标准等关键技术内容的查询需要。

部分示例模型选自国家公益性行业科研专项项目 201303011,书稿的撰写亦得到该项目的支持。

编者虽认真谨慎,但由于时间及水平所限,书中纰漏与不当之处仍在所难免,恳请读者能够谅解并予以指正,也希望能籍此书为载体与广大机械工程领域的读者就 CATIA 各功能模块的全面开发以及更广泛的 CAD 技术应用进行交流与合作。

读者信箱: T3D_home@hotmail.com

编者于哈尔滨

目 录

前言

第 1 章 有限元分析基础	1
1. 1 概述	1
1. 1. 1 有限元分析的概念	1
1. 1. 2 一般步骤	1
1. 1. 3 优越性	2
1. 1. 4 应用领域	3
1. 2 基础知识	4
1. 2. 1 基本概念	4
1. 2. 2 基本方程	7
1. 2. 3 位移模式	9
1. 2. 4 虚位移原理	15
1. 2. 5 平面问题分类	17
1. 3 模型建立	20
1. 3. 1 建模原则	20
1. 3. 2 单元类型及特性定义	23
1. 3. 3 对称性分析	24
1. 3. 4 边界条件的建立	27
1. 4 静力学分析	36
1. 4. 1 杆系分析	36
1. 4. 2 弹性力学平面问题	43
1. 4. 3 轴对称问题	46
1. 4. 4 空间问题	51
1. 4. 5 薄板弯曲	56
1. 5 动态分析	59
1. 5. 1 内容与任务	59
1. 5. 2 单元分析	60
1. 5. 3 总体矩阵集成	62
1. 5. 4 固有特性分析	62
1. 5. 5 响应分析	64
第 2 章 CATIA 工程分析模块综述	66
2. 1 概况	66
2. 1. 1 模块功能	66

2. 1. 2	进入模块前的设置	66
2. 1. 3	进入模块的方法	69
2. 2	工作窗口	71
2. 2. 1	窗口布局	71
2. 2. 2	工具栏	71
2. 2. 3	结构树	77
2. 3	工程分析流程	78
第 3 章	模型准备及预处理	79
3. 1	材料添加	79
3. 1. 1	材料添加方法	79
3. 1. 2	材料库	81
3. 1. 3	零件材料添加	86
3. 1. 4	装配件材料添加	88
3. 1. 5	连接关系材料添加	90
3. 2	用户自定义材料	91
3. 3	材料的修改	94
3. 3. 1	材料属性的修改	94
3. 3. 2	材料纹理的定位	98
3. 4	模型简化	99
3. 4. 1	装配体简化	99
3. 4. 2	零部件细节处理	100
第 4 章	网格划分	102
4. 1	网格划分的基本原则	102
4. 2	网格划分的方法	103
4. 3	通用结构分析工作台划分网格	104
4. 3. 1	实体网格划分	104
4. 3. 2	曲面网格划分	112
4. 3. 3	梁单元网格划分	114
4. 4	高级网格划分工作台划分网格	118
4. 4. 1	曲面填充的实体网格划分	118
4. 4. 2	曲面网格划分	120
4. 4. 3	高级梁单元网格划分	134
4. 5	网格质量分析	141
4. 5. 1	自由棱边显示	142
4. 5. 2	交叉和干涉检查	144
4. 5. 3	重复单元检查	146
4. 5. 4	平面切割	150

4.5.5	单元质量分析	150
4.6	定义单元特性	157
4.6.1	实体单元特性	157
4.6.2	壳单元特性	162
4.6.3	梁单元特性	167
第5章	虚拟零件	176
5.1	概述	176
5.1.1	定义	176
5.1.2	工具栏	177
5.2	柔性虚件和刚性虚件	178
5.2.1	柔性虚件	178
5.2.2	刚性虚件	179
5.2.3	刚柔性虚件的区别	180
5.3	接触虚件	181
5.4	弹簧虚件	183
5.4.1	柔性弹簧虚件	183
5.4.2	刚性弹簧虚件	187
5.4.3	刚柔性弹簧虚件的区别	189
第6章	连接关系	190
6.1	概述	190
6.2	通用连接关系	190
6.3	点连接关系	192
6.3.1	装配件内点连接关系	192
6.3.2	零件内点连接关系	194
6.4	线连接关系	196
6.4.1	装配件内线连接关系	196
6.4.2	零件内的线连接关系	198
6.5	面连接关系	200
6.5.1	装配件内面连接关系	200
6.5.2	零件内面连接关系	201
6.6	点连接支撑	202
6.6.1	点-点连接关系	203
6.6.2	结合面分析点	204
第7章	连接特性	206
7.1	概述	206
7.2	面-面连接特性	208
7.2.1	滑动连接特性	208

7. 2. 2	接触连接特性	210
7. 2. 3	扣紧连接特性	213
7. 2. 4	扣紧弹性连接特性	215
7. 2. 5	过盈配合连接特性	217
7. 2. 6	螺纹连接特性	219
7. 3	距离连接特性	224
7. 3. 1	刚性连接特性	225
7. 3. 2	柔性连接特性	227
7. 3. 3	虚拟螺纹连接特性	229
7. 3. 4	虚拟弹性螺纹连接特性	231
7. 3. 5	用户自定义距离连接特性	233
7. 4	焊接连接特性	236
7. 4. 1	焊点连接特性	237
7. 4. 2	焊缝连接特性	239
7. 4. 3	焊面连接特性	241
7. 5	基于点的连接特性	244
7. 5. 1	节点-节点连接特性	244
7. 5. 2	结合面点连接特性	247
第 8 章	约束	249
8. 1	概述	249
8. 2	夹紧约束	249
8. 3	运动副约束	251
8. 3. 1	滑动约束	251
8. 3. 2	棱柱约束	253
8. 3. 3	圆柱铰约束	255
8. 3. 4	球铰约束	257
8. 3. 5	铰接约束	259
8. 4	高级约束	261
8. 4. 1	用户自定义约束	261
8. 4. 2	静定约束	263
第 9 章	载荷	265
9. 1	概述	265
9. 2	压强	265
9. 3	力	267
9. 3. 1	均布力	267
9. 3. 2	力矩	269
9. 3. 3	轴承载荷	270

9.3.4	导入力	274
9.3.5	导入力矩	277
9.4	体运动载荷	280
9.4.1	加速度	280
9.4.2	离心力	282
9.5	力密度	283
9.5.1	线力密度	283
9.5.2	面力密度	285
9.5.3	体积力密度	287
9.5.4	力密度	288
9.6	强制位移载荷	290
9.7	温度	291
9.7.1	温度场	292
9.7.2	热解方案导出的温度场	293
9.8	高级载荷	294
9.8.1	组合载荷	294
9.8.2	装配载荷	298
第10章	模型检查	300
10.1	实体检查	300
10.2	连接检查	304
10.3	检查其他属性	307
第11章	求解与分析	310
11.1	求解	310
11.1.1	计算	311
11.1.2	全局适应性调整	313
11.1.3	全局适应性计算	314
11.2	求解工具	318
11.2.1	指定外部存储	318
11.2.2	清除外部存储	320
11.2.3	指定临时外部存储	321
11.3	结果分析	322
11.3.1	图像	322
11.3.2	分析工具	335
11.3.3	生成报告	350
11.4	插入新的分析案例	354
第12章	工程实例	357
12.1	弹性支撑件	357

12. 1. 1	模型准备	357
12. 1. 2	创建虚件	368
12. 1. 3	施加约束	371
12. 1. 4	施加载荷	372
12. 1. 5	模型检查与网格质量检查	374
12. 1. 6	计算与分析	375
12. 2	大型机架	378
12. 2. 1	模型准备	379
12. 2. 2	定义连接关系与连接特性	382
12. 2. 3	创建虚件	384
12. 2. 4	定义约束	384
12. 2. 5	施加载荷	386
12. 2. 6	模型检查	386
12. 2. 7	计算与分析	387
12. 3	轻型转向驱动桥	388
12. 3. 1	模型准备	389
12. 3. 2	定义连接关系与连接特性	392
12. 3. 3	添加虚件	393
12. 3. 4	定义约束	395
12. 3. 5	施加载荷	395
12. 3. 6	模型检查	400
12. 3. 7	计算与分析	401
12. 4	曲轴模态分析	402
12. 4. 1	模型准备	402
12. 4. 2	网格划分	403
12. 4. 3	模型检查	405
12. 4. 4	计算与分析	405
附录 A	工程分析常用力学符号及物理量纲	409
附录 B	CATIA 工程分析功能图标一览表	411
参考文献	418

第 1 章 有限元分析基础

1. 1 概述

1. 1. 1 有限元分析的概念

有限元法，或称有限单元法，是当今工程分析中应用最广泛的数值计算方法。其基本思想是将物体即连续的求解域离散成有限个按一定方式相互连接在一起的单元组合，来模拟和逼近原来的物体，从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题。由于它的通用性和有效性，一直受到工程技术界的高度重视。伴随着计算机科学和技术的发展，它已经成为计算机辅助设计（CAD）和计算机辅助制造（CAM）的重要组成部分，并发展成为计算机辅助工程（CAE）。

有限元分析（FEA）首先被运用于航空航天和核工业领域，在这些行业中，结构的安全是非常重要的。。

有限元分析由赋有材料属性的计算机模型在施加模拟工作场合的载荷和约束条件后进行运算而获得与结构有关的数据，它被用于对新产品的设计和对已有产品的优化，用于在制造或建设前期对设计按照规范进行验证，还用于调整现有的产品或结构使其能满足新的应用环境。物体被离散后，通过对其中各个单元进行有限元分析，最终得到对整个物体的分析。

有限元分析的基本前提是解可以由单元近似取代。由于这些单元可以各种方式放在一起，所以它可以用来代表极其复杂的形状。有限元分析的强大功能体现在它可以适用于几乎任何形状的结构、任何载荷条件和边界约束条件。有限元分析对任何形状结构的适应性来自它的离散性，即任何形状的结构将离散成小的单元，这样，求解一个任何形状的结构复杂问题就变成了求解一个有限的、具有简单标准形状单元的相对简单的问题。

1. 1. 2 一般步骤

有限元分析流程如图 1-1 所示。

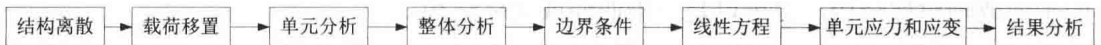


图 1-1 有限元分析流程

(1) 结构离散

结构离散就是建立结构的有限元模型，又称为网格划分或单元划分，即将结构离散为有限个单元组成的有限元模型。在该步骤中，需要根据结构的几何特性、载荷情况等确定单元体内任意一点的位移插值函数。

(2) 载荷移置

根据静力等效原理，将载荷移置到相应的节点上，形成节点载荷矩阵。

(3) 单元分析

根据弹性力学的几何方程及物理方程确定单元刚度矩阵 K^e 。

(4) 整体分析

把各个单元按原来的结构重新连接起来，并在单元刚度矩阵的基础上确定结构的总刚度矩阵，形成如下式所示的整体有限元线性方程：

$$F = K\delta$$

式中， F 是载荷矩阵； K 是整体结构刚度矩阵； δ 是节点位移矩阵。

(5) 边界条件

对有限元线性方程所示的有限元线性方程进行边界条件处理。

(6) 线性方程

对有限元线性方程所示的有限元线性方程进行求解，得到节点的位移。在该步骤中，有限元模型的节点越多，线性方程的数量就越多，随之有限元分析的计算量也将越大。

(7) 单元应力和应变

根据上步求出的节点位移求解单元的应力和应变。

(8) 结果分析

进入有限元分析的后处理部分，对计算出来的结果进行分析，并以需要的形式将计算结果显示出来。

1. 1. 3 优越性

由于有限元法处理问题的特点，使其具有独特的优越性，主要表现在以下几个方面：

(1) 能够分析形状复杂的结构

由于单元不限于均匀的规则网格，单元形状具有一定的任意性，单元大小可以不同，且单元边界可以是曲线或曲面，所以分析结构可以具有非常复杂的形状。它不仅可以是复杂的平面或轴对称结构，也可以是三维曲面或实体结构。

(2) 能够处理复杂的边界条件

在有限元法中，边界条件不需引入每个单元的特性中，而是在求得整个结构的代数方程后，对有关特性矩阵进行必要的处理，所以对内部和边界上的单元都采用相同的场变量函数。而当边界条件改变时，场变量函数不需要改变，所以边界条件的处理和程序编制非常简单。

(3) 能够保证规定的工程精度

当单元尺寸减小或插值函数的阶次增加时，有限元解收敛于实际问题的精确解。所以可通过网格加密或采用高阶插值函数来提高解的精度，从而保证解具有实用价值。

(4) 能够处理不同类型的材料

有限元法可用于各向同性、正交各向同性、各向异性及复合材料等多种类型材料的分析，也可以分析由不同材料组成的组合结构。此外，有限元法还可以处理随时间或温度变化的材料以及非均匀分布的材料。

1. 1. 4 应用领域

自 20 世纪 50 年代有限元法诞生至今，有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动力问题和波动问题，分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、热传导学、电磁学等领域。有限元法的工程应用见表 1-1。

表 1-1 有限元法的工程应用

研究领域	平衡问题	特征值问题	动态问题
结构工程 学，结构力学 和宇航工程学	梁、板、壳结构的分析； 复杂或混杂结构的分析； 二维与三维应力分析	结构的稳定性；结 构的固有频率和振 型；线性黏弹性阻尼	应力波的传播；结构对于非周期 载荷的动态响应；耦合热弹性力学 与热黏弹性力学
土力学，基 础工程学和岩 石力学	二维与三维应力分析； 建筑和开挖问题；边坡稳 定性问题；土壤与结构的 相互作用；坝、隧洞、钻 孔、涵洞、船闸等的分析； 流体在土壤和岩石中的稳 态渗流	土壤与结构组合 物的固有频率和振 型	土壤与岩石中的非定常渗流；在 可变形多孔介质中的流动-固结 应力波在土壤和岩石中的传播； 土壤与结构的动态相互作用
热传导学	固体和流体中的稳态温 度分布	—	固体和流体中的瞬态热流
流体动力 学，水利工程 学和水源学	流体的势流；流体的黏 性流动；蓄水层和多孔介 质中的定常渗流；水土结 构和大坝的分析	湖泊和港湾的波 动（固有频率和振 型）；刚性或柔性容 器中流体的晃动	河口的盐度和污染研究（扩展问 题）；沉积物的推移；流体的非定 常流动；波的传播；多孔介质和蓄 水层中非定常渗流
核子工程学	反应堆安全壳结构的分 析；反应堆和反应堆安全 壳结构的稳态温度分布	—	反应堆安全壳结构的动态分析； 反应堆结构的热黏弹性分析；反应 堆和反应堆安全壳结构中的非稳 态温度分布
电磁学	二维和三维静态电磁场 分析	—	二维和三维时变、高频电磁场分 析

1. 2 基础知识

在有限元分析中经常用到弹性力学的基本方程和变分原理，为了以后应用方便，本节简要归纳一下弹性力学中的有关知识，关于基本方程的详细推导可以参阅相关的教材。

1. 2. 1 基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。

(1) 外力

作用在物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。

1) 体积力。是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内部各点受力的情况，一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 O 所受体积力的大小和方向，在这一点取物体的一小部分，它包含着 O 点而它的体积为 ΔV ，如图 1-2a 所示。设作用于 ΔV 的体积力为 ΔF ，则体积力的平均集度为 $\Delta F / \Delta V$ 。如果把所取的那一小部分物体不断减小，即 ΔV 不断减小，则 ΔF 和 $\Delta F / \Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在，令 ΔV 无限减小而趋于 O 点，假定体积力为连续分布，则 $\Delta F / \Delta V$ 将趋于一定的极限 f ，即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f$$



图 1-2 体积力和表面力

这个极限矢量 f ，就是该物体在 O 点所受体积力的集度。因为 ΔV 是标量，所以 f 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 f 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 f_x 、 f_y 、 f_z ，称为该物体在 O 点的体积力分量，以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负，它们的量纲是 L^2MT^{-2} 。

2) 表面力。是分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受表面力的情况，一般也是不相同的。为了表明该物体在其表面上某一点 O 所受表面力的大小和方向，在这一点取该物体表面的一小部分，它包含着 O 点而它的面积为 ΔS ，图 1-2b)。设作用于 ΔS 的表面力为 ΔF ，则表面力的平均集度为 $\Delta F / \Delta S$ 。与上相似，令 ΔS 无限减小而趋于 O 点，假定表面力为连续分布，则 $\Delta F / \Delta S$ 将趋于一定的极限 \bar{f} ，

即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{f}$$

这个矢量 \bar{f} 就是该物体在 O 点所受表面力的集度。因为 ΔS 是标量，所以 \bar{f} 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 \bar{f} 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ ，称为该物体在 O 点的表面力分量，以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负，它们的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

(2) 应力

物体受到了外力的作用，或由于温度有所改变，其内部将产生内力。为了研究物体在其某一点 O 点处的内力，假想用经过 O 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撤开，如图 1-3 所示。撤开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着 O 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF ，则内力的平均集度，即平均应力，为 $\Delta F / \Delta A$ 。现在，命 ΔA 无限减小而趋于 O 点，假定内力为连续分布，则 $\Delta F / \Delta A$ 将趋于一定的极限 P ，即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = P$$

这个极限矢量 P 就是物体在截面 mn 上的、在 O 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 P 的方向就是 ΔF 的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变及材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和切应力 τ ，如图 1-3 所示。应力及其分量的量纲也是 $L^{-1}MT^{-2}$ 。

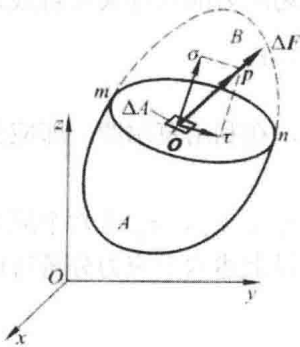


图 1-3 O 点处内力

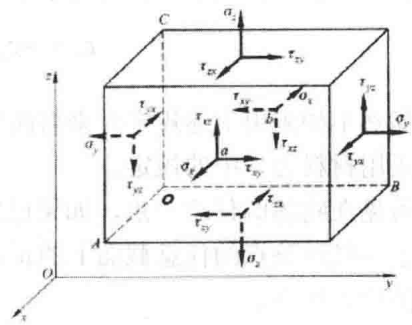


图 1-4 分析 O 点的应力状态

显而易见，在物体内的同一点 O ，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内部取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $OA = \Delta x$ 、 $OB = \Delta y$ 、 $OC = \Delta z$ ，如图 1-4 所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码。例如，正应力 σ_x 是作用在

垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。切应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向的，这个截面上的应力分量就以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向的，这个截面上的应力分量就以沿坐标轴负方向时为正，沿坐标轴正方向时为负。如图 1-4 所示的应力分量全都是正的。虽然上述正负号规定，对于正应力来说，结果是和材料力学中的规定相同，即拉应力为正而压应力为负，但是，对于切应力来说，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接前后两面中心的直线 ab 为矩轴，得到力矩的平衡方程

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2} = 0$$

同样可以得到其余两个相似的方程。简化以后，得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

这就证明了切应力的互等关系：

作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的，即大小相等，正负号也相同。故切应力记号的两个角码可以对调。

这里没有考虑应力由于位置不同而有的改变，也就是把六面体中的应力当做均匀应力，而且也没有考虑体积力的作用。可见，即使考虑到应力随位置不同而有的改变，并考虑到体积力的作用，仍然可以推导出切应力的互等关系。

在此指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则切应力的互等关系将成为

$$\tau_{yz} = -\tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = -\tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出，在利用莫尔圆，即应力圆时，就必须采用材料力学中的规定。

可见在物体的任意一点，如果已知 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。所以上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

(3) 形变

形变，就是形状的改变。物体的形状可以用它各部分的长度和角度来表示，所以物体的形变可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 O 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x 、 y 、 z 的正方向取三个微小的线段 OA 、 OB 、 OC ，参见图 1-4。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称

为线应变；各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为切应变。线应变用字母 ε 表示： ε_x 表示 x 方向的线段 OA 的线应变，以此类推。线应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母 γ 表示： γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段（即 OB 与 OC ）之间的直角的改变，以此类推。切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。线应变和切应变都是量纲为 1 的量。

可见，在物体的任意一点，如果已知 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 、 γ_{xy} 这六个应变，就可以求得经过该点的任一线段的线应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。这六个应变，称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

(4) 位移

位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x 、 y 、 z 三轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示，以沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的量纲是 L 。

一般而论，弹性体内任意一点的体积力分量、表面力分量、应力分量、形变分量和位移分量，都是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的形状和大小（即已知物体的边界），已知物体的弹性常数，物体所受的体积力，物体边界上的约束情况或表面力，需要求解应力分量、形变分量和位移分量。

1. 2. 2 基本方程

弹性力学基本方程描述弹性体内任一点的应力、应变、位移以及外力之间的关系，它包括平衡方程、几何方程和物理方程三类。

(1) 平衡方程

弹性体受力以后仍处于平衡状态，其上的应力和体积力在 x 、 y 、 z 3 个方向上分别满足以下平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

平衡方程是弹性体内部必须满足的条件，它说明 6 个应力分量不是独立的，它们通过 3 个平衡方程相互联系。

(2) 几何方程

几何方程描述几何量应变和位移之间的关系，其矩阵形式如下：