



丛书主编◎沈玉兰

分册主编◎王小刚/霍文杰

多维 解题

* 新课标

* 新课程

* 新方法

* 新思维

➤ 方法 ➤ 规律 ➤ 技巧

DUOWEI JIETI 特别训练
FANGFA GUI LV JIQIAO TEBIE XUNLIAN ■

· 高中数学 ·
(文科)



山西出版集团
山西教育出版社

丛书主编◎沈玉兰

分册主编◎王小刚/霍文杰

多维 解题

★ 新课标

★ 新课程

★ 新方法

★ 新思维

方法 > 规律 > 技巧

FANGFA GUILV JIQIAO

特别训练

· 高中数学 ·
(文科)



山西出版集团
山西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

多维解题:方法、规律、技巧特别训练. 高中数学. 文科 / 沈玉兰, 蒋天庆主编; 王小刚分册主编. —太原: 山西教育出版社, 2010. 6

ISBN 978 - 7 - 5440 - 4363 - 2

I. ①多… II. ①沈…②蒋…③王… III. ①数学课 - 高中 - 解题 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 043109 号

多维解题: 方法、规律、技巧特别训练 · 高中数学文科

出版策划 赵 峰

责任编辑 赵 峰

复 审 冉红平

终 审 刘立平

发行总监 张小平

印装总监 郭 勋

视觉设计 阎宏瑞

出版发行 山西出版集团 · 山西教育出版社

(太原市水西门街馒头巷 7 号 电话: 4035711 邮编: 030002)

印 装 山西人民印刷有限责任公司

开 本 880 × 1230 1/32

印 张 20.5

字 数 804 千字

版 次 2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月山西第 1 次印刷

印 数 1—10 000 册

书 号 ISBN 978 - 7 - 5440 - 4363 - 2

定 价 34.00 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。电话:0358 - 7641044



第一编 基本题型训练

模块一 集合与常用逻辑用语

题型 1 集合的概念与运算	3
题型 2 命题与量词、基本逻辑联结词	7
题型 3 充分条件、必要条件与四种命题	12

模块二 函数

题型 4 函数的概念及其表示方法	17
题型 5 函数的值域与最值	22
题型 6 函数的单调性	28
题型 7 函数的奇偶性与周期性	31
题型 8 函数的图像	36
题型 9 反函数	41
题型 10 指数与指数函数	45
题型 11 对数与对数函数	51
题型 12 幂函数	57

模块三 导数及其应用

题型 13 导数的基本概念及其运算	64
题型 14 导数概念与基本函数的求导公式	69
题型 15 求函数的切线方程	73
题型 16 函数的单调性、极值与最值	81

题型 17	利用导数研究函数的综合问题	91
-------	---------------------	----



模块四 三角函数、平面向量

题型 18	三角函数的基本概念	103
题型 19	同角三角函数的基本关系式及诱导公式	109
题型 20	两角和与差的三角函数	117
题型 21	三角恒等变形——利用公式求值	125
题型 22	三角恒等变形——利用公式求角	135
题型 23	三角函数的定义域	144
题型 24	三角函数的值域与最值	152
题型 25	三角函数的单调性	159
题型 26	三角函数的奇偶性与周期性	166
题型 27	三角函数的图像变换	173
题型 28	求三角函数的解析式	182
题型 29	三角函数的对称性、奇偶性与单调性	192
题型 30	正弦定理与余弦定理	199
题型 31	解三角形的应用	209
题型 32	平面向量的概念与线性运算	217
题型 33	平面向量的分解与坐标表示	223
题型 34	平面向量的数量积	228



模块五 数列

题型 35	数列的概念与表示	235
题型 36	等差数列及前 n 项和	241
题型 37	等差数列中基本量的计算	246
题型 38	等差数列的证明或判定	250
题型 39	等差数列的性质及应用	255
题型 40	等差数列前 n 项和公式的应用	258
题型 41	等比数列基本量的计算	263
题型 42	等比数列的证明或判定	269
题型 43	等比数列的性质及应用	274
题型 44	等比数列的前 n 项和	277

题型 45	数列通项的求法	283
题型 46	数列求和	290
题型 47	数列的实际应用	298

模块六 不等式

题型 48	不等关系与不等式	305
题型 49	不等式的解法	310
题型 50	均值不等式	314
题型 51	简单线性规划问题	319

模块七 立体几何

题型 52	空间几何体的结构及其三视图和直观图	325
题型 53	空间几何体的表面积与体积	330
题型 54	平面的基本性质	336
题型 55	空间中的平行问题	341
题型 56	空间中的垂直问题	348

模块八 概率与统计

题型 57	古典概型	357
题型 58	几何概型	365
题型 59	随机抽样的方法	370
题型 60	用样本估计总体与变量的相关性	376
题型 61	统计案例	385

模块九 曲线与方程

题型 62	直线的斜率与直线的方程	392
题型 63	两条直线的位置关系	397
题型 64	对称问题	400
题型 65	圆的方程	404
题型 66	直线与圆、圆与圆的位置关系	409

题型 67	椭圆的概念与性质	424
题型 68	双曲线的概念与性质	437
题型 69	抛物线	448
题型 70	直线与圆锥曲线的位置关系	463
题型 71	弦长问题	475
题型 72	弦中点问题	483
题型 73	对称问题	488

模块十 算法初步

题型 74	算法与程序框图及基本语句	499
-------	--------------	-----

模块十一 推理与证明

题型 75	推理与证明	505
-------	-------	-----

模块十二 数系的扩充与复数

题型 76	数系的扩充与复数的概念	512
题型 77	复数的运算	515

第二编 综合题型训练

专题一 函数与方程综合应用

题型 78	函数的零点	521
题型 79	函数与方程	529
题型 80	函数的应用题	538

专题二 函数与导数综合应用

专题三 平面向量与三角函数的结合问题

	专题四 数列与函数、数列与不等式	570
	专题五 不等式与方程的综合应用	584
	专题六 不等式与函数的综合应用	589
	专题七 向量与圆锥曲线的综合应用	594

第三编 解题思维训练

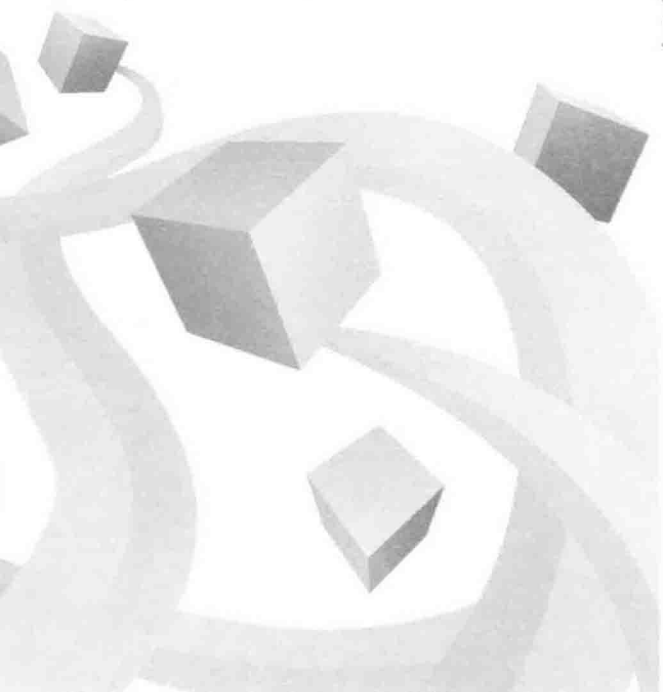
	专题一 函数与方程思想	619
	专题二 数形结合思想	626
	专题三 分类讨论思想	633
	专题四 转化与化归思想	640
附录	重要概念、公式与定理	645



第一编

DIYIBIAN

基本题型训练



MOKUAIYI

模块一

集合与常用

逻辑用语

题型1 集合的概念与运算

命题特点

嗯……现在……我们讲一讲……

集合是中学数学最基本的概念之一,有关集合的高考试题,往往考查集合的概念、运算、语言及简单的运用,常与函数、方程、不等式、数列、曲线等知识结合考查.考查重点是集合间的关系,处理的思想方法以数形结合、等价转化和分类讨论为主.此类题目多以客观题的形式出现,难度较小.

样板试题

看看以前是怎么考的……

例题1 (2009,四川文) 设集合 $S = \{x | |x| < 5\}$, $T = \{x | (x+7)(x-3) < 0\}$. 则 $S \cap T =$ ()

- A. $\{x | -7 < x < -5\}$ B. $\{x | 3 < x < 5\}$
C. $\{x | -5 < x < 3\}$ D. $\{x | -7 < x < 5\}$

思路导引: 本题把集合与不等式结合, 分别解出两个不等式的解集, 再利用数轴找两集合的交集. 即: $S = \{x | -5 < x < 5\}$, $T = \{x | -7 < x < 3\}$.

$$\therefore S \cap T = \{x | -5 < x < 3\}.$$

答案: C

例题2 (2008, 陕西) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x = 2a, a \in A\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B)$ 中元素的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

思路导引: 本题把集合与方程结合起来考查, 首先得到集合 $A = \{1, 2\}$, 再

题型1

集合的概念与运算

第一编 基本题型训练

名人名言

理智要比心灵为高, 思想要比感情可靠。

——高尔基

3

求集合 $A \cup B = \{1, 2, 4\}$, 从而得到 $\complement_U(A \cup B) = \{3, 5\}$, 显然元素个数为 2.

答案: B

例题 3 (2009, 山东文) 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$, 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

思路导引: 本题考查了集合的并集运算, 并用观察法得到相对应的元素, 从而求得答案. $\because A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$,

$$\therefore \begin{cases} a^2 = 16, \\ a = 4. \end{cases} \therefore a = 4.$$

答案: D

例题 4 (2009, 湖北) 已知 $P = \{a | a = (1, 0) + m(0, 1), m \in \mathbb{R}\}$, $Q = \{b | b = (1, 1) + n(-1, 1), n \in \mathbb{R}\}$ 是两个向量集合, 则 $P \cap Q = ()$

A. $\{(1, 1)\}$

B. $\{(-1, 1)\}$

C. $\{(1, 0)\}$

D. $\{(0, 1)\}$

思路导引: 因为 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (1 - n, 1 + n)$, 由题意 $\vec{a} = (1, m) = \vec{b} = (1 - n, 1 + n)$, 则 $1 = 1 - n, m = 1 + n$, 即 $n = 0$ 且 $m = 1$, 可得 $P \cap Q = \{(1, 1)\}$.

答案: A

例题 5 (2006, 湖南) 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M = \{x | f(x) < 0\}$, $P = \{x | f'(x) > 0\}$, 若 $M \subsetneq P$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

思路导引: 根据题意, 若 $a > 1$ 时, $M = \{x | 1 < x < a\}$; 若 $a < 1$ 时, $M = \{x | a < x < 1\}$. $a = 1$ 时, $M = \emptyset$; $P = \{x | f'(x) > 0\}$, $\therefore f'(x) = \frac{(x-1) - (x-a)}{(x-1)^2} > 0$. $\therefore a > 1$ 时, $P = \mathbb{R}$; $a < 1$ 时, $P = \emptyset$; 已知 $M \subsetneq P$, 所以选 C.

答案: C



举一反三

噢, 过来, 悄悄告诉你……

例题 6 (2009, 北京文) 设 A 是整数集的一个非空子集, 对于 $k \in A$, 如果 $k - 1 \notin A$ 且 $k + 1 \notin A$, 那么 k 是 A 的一个“孤立元”, 给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 由 S 的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“孤立元”的集合共有 _____

___个.

思路导引: 本题主要考查阅读与理解、信息迁移以及学生的学习潜力,考查学生分析问题和解决问题的能力,属于创新题.什么是“孤立元”?依题意可知,必须是集合中没有与 k 相邻的元素,因而无“孤立元”是指在集合中有与 k 相邻的元素.

因此,符合题意的集合是 $\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6\}, \{5,6,7\}, \{6,7,8\}$,共6个.

答案:6

例题7 (2006,山东)定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), z \in A \text{ 且 } y \in B\}$, 设集合 $A = \{0,1\}, B = \{2,3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为()

A. 0

B. 6

C. 12

D. 18

思路导引: 本题是一道创新题,首先要根据题目给出的信息求出符合条件的所有的 z ,再进行求和运算.当 $x=0$ 时, $z=0$;当 $x=1, y=2$ 时, $z=6$;当 $x=1, y=3$ 时, $z=12$.故所有元素之和为18,选D.

答案:D

错题诊疗

看了……以后就不会再错了……

例题8 (2006,全国II)设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$ 若 $f(x) > 0$ 的解集为 $A, B = \{x | 1 < x < 3\}, A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

典型错误: 令 $f(x) = 0$, 解得其两根为 $x_1 = \frac{1}{a} - \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}, x_2 = \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}$.

由此可知 $x_1 < 0, x_2 > 0, A = \{x | x < x_1\} \cup \{x | x > x_2\}$.

$A \cap B \neq \emptyset$ 的充要条件是 $x_2 < 3$, 即 $\frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} < 3$, 解得 $a > \frac{6}{7}$.

错因分析: 因为 $a \in \mathbf{R}$, 而以上解法显然默认 $a > 0$, 缩小了 a 的取值范围, 讨论问题片面.

正确解答: 由 $f(x)$ 为二次函数知 $a \neq 0$

令 $f(x) = 0$ 解得其两根为 $x_1 = \frac{1}{a} - \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}, x_2 = \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}$ 由此可知 $x_1 < 0, x_2 > 0$

名人名言

古之立大事者, 不唯有超世之才, 亦必有坚忍不拔之志。

——苏轼

(i) 当 $a > 0$ 时, $A = \{x | x < x_1\} \cup \{x | x > x_2\}$

$A \cap B \neq \emptyset$ 的充要条件是 $x_2 < 3$, 即 $\frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} < 3$, 解得 $a > \frac{6}{7}$.

(ii) 当 $a < 0$ 时, $A = \{x | x_1 < x < x_2\}$.

$A \cap B \neq \emptyset$ 的充要条件是 $x_2 > 1$, 即 $\frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} > 1$, 解得 $a < -2$.

综上, 使 $A \cap B \neq \emptyset$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty, -2) \cup (\frac{6}{7}, +\infty)$.

例 9 (2007, 北京) 已知集合 $A = \{x | |x - a| \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

典型错误: 解不等式 $|x - a| \leq 1$, 得 $a - 1 \leq x \leq a + 1$; 解不等式 $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, 得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 4$. 由题意 $a - 1 \geq 1$ 且 $a + 1 \leq 4$, 所以 a 的取值范围为 $2 \leq a \leq 3$.

错因分析: 以上解法的错误主要是缺少对边界值的考查, 当 $a = 2$ 时, $A \cap B = \{1\}$; 当 $a = 3$ 时, $A \cap B = \{4\}$, 都不符合 $A \cap B = \emptyset$ 的要求, 所以两个边界值都不能取到.

正确解答: $(2, 3)$

反复训练

——不留神, 就把这部分内容掌握了……

习题 1 (2008, 山东) 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

习题 2 (2007, 全国 I) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a + b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b - a =$ ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

习题 3 (2009, 上海文) 已知集合 $A = \{x | x \leq 1\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

习题 4 (2007, 湖北) 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P - Q = \{x | x \in P, \text{且 } x \notin Q\}$. 如果 $P = \{x | \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x | |x - 2| < 1\}$, 那么 $P - Q =$ ()

A. $\{x | 0 < x < 1\}$

B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

C. $\{x|1 \leq x < 2\}$

D. $\{x|2 \leq x < 3\}$

习题5 (2005, 浙江) 设 $f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbf{N})$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbf{N} | f(n) \in P\}$, $\hat{Q} = \{n \in \mathbf{N} | f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \hat{P}) = (\quad)$

A. $\{0, 3\}$

B. $\{1, 2\}$

C. $\{3, 4, 5\}$

D. $\{1, 2, 6, 7\}$

反复训练答案

可不要提前偷看哟!

习题1. B

习题2. C

习题3. $a \leq 1$

习题4. B

习题5. A

题型2 命题与量词、基本逻辑联结词

命题特点

嘿……现在……我们讲一讲……

简单逻辑联结词、全称量词与存在量词作为简易逻辑知识的基础,在高考中与其他知识联系起来综合考查,主要考查对基本知识的记忆和深层次的理解,试题形式以选择题或填空题为主,难度不会太大,在高考命题中主要有以下热点:

1. 对基本逻辑联结词的理解

理解“或”、“且”、“非”的含义,对于含有“或”、“且”、“非”的新命题,要能借助真值表,判断新命题的真假.

2. 全称量词与存在量词及全称命题与存在性命题

对全称命题和存在性命题,要学会自然语言和符号语言的转化. 同一个全称命题或存在性命题,由于自然语言的不同,可以有不同的表示方式,解题时一定要区分好是全称命题还是存在性命题,并能判断出全称命题和存在性命题的真假.

名人名言

业精于勤而荒于嬉,行成于思而毁于随。

——韩愈

样板试题

看看以前是怎么考的……

例题 1(2009,江西文)下列命题是真命题的为()

- A. 若 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 则 $x = y$ B. 若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$
 C. 若 $x = y$, 则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ D. 若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$

思路导引: 由 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 得 $x = y$; 而由 $x^2 = 1$, 得 $x = \pm 1$; $x = y$ 时, $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ 不一

定有意义; $x < y$ 不一定得到 $x^2 < y^2$, 故选 A.

答案: A

例题 2(2009,天津)命题“存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \leq 0$ ”的否定是()

- A. 不存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} > 0$
 B. 存在 $x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} \geq 0$
 C. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x \leq 0$
 D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$

思路导引: 本题考查四种命题的改写, 属于基础题. 对存在性命题的否定应把存在性改写为任意性, 并改写结论. 即“对任意的 $x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$ ”, 故选择 D.

答案: D

例题 3(2008,广东)已知命题 p : 所有有理数都是实数, 命题 q : 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是()

- A. $(\neg p) \vee q$ B. $p \wedge q$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $\neg q$

思路导引: 本题考查“或”、“且”、“非”联结的复合命题的真假. 即若命题 p 为真命题, 命题 q 为假命题, 则 $\neg p$ 为假命题, $\neg q$ 为真命题, 所以 $(\neg p) \vee (\neg q)$ 为真命题. 故选 D.

答案: D

例题 4(2007,山东)命题“对任意的 $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是()

- A. 不存在 $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$
 B. 存在 $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 \geq 0$
 C. 存在 $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$
 D. 对任意的 $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$

思路导引: 本题考查对全称命题的否定. 把全称改为存在, 并对结论否定. 即存在 $x \in \mathbf{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$, 故选 C.

答案: C

例5 (2005, 浙江) 设 α, β 为两个不同的平面, l, m 为两条不同的直线, 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$. 现有如下的两个命题: ①若 $\alpha // \beta$, 则 $l // m$; ②若 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$. 那么()

A. ①是真命题, ②是假命题

B. ①是假命题, ②是真命题

C. ①②都是真命题

D. ①②都是假命题

思路导引: 此题主要考查了平面与平面平行、平面与平面垂直的性质, 以及空间想象能力. 对于① $\alpha // \beta$, l 和 m 也可能异面; 对于② $l \perp m$, 说明 l 垂直平面 β 内的一条直线, 而 l 不一定垂直平面 β , 故平面 α 不一定垂直平面 β ; 因此, ①②都是假命题. 故选 D.

答案: D

举一反三

喂, 过来, 悄悄告诉你……

例6 已知 $c > 0$, 设 p : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减, q : 不等式 $x^2 - 6x + 8 + 2c > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 如果“ p 或 q ”为真, 且“ p 且 q ”为假, 求 c 的取值范围.

思路导引: 本题在知道命题真假的前提下, 反过来求参变量 c 的取值, 形式新颖, 灵活性大, 是在常用逻辑用语部分高考考查的为数不多的解答题. 具体解法: 首先确定使命题 p 与 q 为真时 c 的取值范围. 因为“ p 或 q ”为真, 且“ p 且 q ”为假, 则两个命题中必有一个为真, 一个为假. 从而利用数轴确定 c 的具体范围.

解: p 真 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$

设 $f(x) = x^2 - 6x + 8 + 2c = (x - 3)^2 + 2c - 1$, 可知 $f(x)$ 的最小值为 $2c - 1$,

$\therefore q$ 真 $\Leftrightarrow 2c - 1 > 0 \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}$

$\therefore$ “ p 或 q ”为真, 且“ p 且 q ”为假, $\therefore p$ 真而 q 假或 p 假 q 真.

若 p 真 q 假, 则 c 的取值范围是 $(0, 1) \cap (-\infty, \frac{1}{2}] = (0, \frac{1}{2}]$;

若 p 假 q 真, 则 c 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cap (\frac{1}{2}, +\infty)$ 或 $[1, +\infty) \cap (\frac{1}{2}, +\infty)$, 分析知为 $[1, +\infty)$.

因此 c 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.

例7 (2006, 山东) 下列四个命题中, 真命题的序号有 _____ (写出所有真命题的序号).

名人名言

我是个拙笨的学艺者, 没有充分的天才, 全凭苦学。

——梅兰芳