高中数理化题典丛书

SHUXUE SHITI JINGBIAN JINGYAO JINGJIE

·赵　桢
·章建跃　主编

类型齐全
解法多样
启迪思路
事半功倍

数学

数学试题精编·精要·精解

（中）

中国青年出版社

·赵　桢
·章建跃　主编

数学试题精编·精讲·精解▼数学试题精编·精讲·精解▼

数学

(中)

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

图书在版编目(CIP)数据

数学试题精编·精要·精解 中/赵桢、章建跃等编著.—北京:中国青年出版社,1996.4
(高中数理化题典丛书)
ISBN 7—5006—2045—4

Ⅰ.数… Ⅱ.①赵…②章… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 22291 号

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708
中国铁道出版社印刷厂印刷 新华书店经销
787×1092 1/32 12 印张 290 千字
1996 年 4 月北京第 1 版 1996 年 4 月北京第 1 次印刷
印数 1—8,000 册 定价 11.80 元

主编 赵 桢 章建跃

编委 （按姓氏笔划排列）

刘仁权 李建华 谷 丹

陈继武 张秀平 张 程

赵 桢 章建跃

目　录

第三章 数列与数学归纳法

题 目

§3.1 等差数列与等比数列

1. 已知数列$\{a_n\}$的前五项分别如下，试根据这五项所提供的一般规律，推导出数列的通项公式，使之符合这五项：

(1) 2,5,10,17,26；

(2) 1,2,8,64,1024。

2. 求数列 1995，19951995，…，$\underbrace{19951995\cdots1995}_{n\text{个}1995}$，…的通项公式。

3. 数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$，其中$n\in N$，求这个数列的通项公式$a_n$。

4. 设数列$\{a_n\}$是等差数列，$b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}$，且已知：$b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}$，$b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$，求等差数列$\{a_n\}$的通项a_n。

5. 求数列 0,1,1,2,2,3,3,4,4,…的前n项和S_n。

6. 求数列 81，891，8991，89991，…，$\underbrace{899\cdots91}_{n-1\text{个}9}$，… 前$n$项的和$S_n$。

7. 已知等差数列a,b,c中的三个数都是正数，且公差不为

零，求证它们的倒数所组成的数列$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$不可能成等差数列。

8. 数$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$能不能成为一等差数列中的某三项（不一定是连续三项）？为什么？

9. 数 10，11，12 能否是同一等比数列中的三项？为什么？

10. 设$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$是等差数列中的两项，试证此数列中的每一项都不是有理数。

11. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知：

$$a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2。$$

求a_3+a_{13}的值。

12. 如果$a_1, a_2, a_3, \cdots$，是公差为 1 的等差数列，$a_1+a_2+\cdots+a_{98}=137$，求$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}$的值。

13. 设x, y, z是实数，$3x, 4y, 5z$成等比数列，且$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$成等差数列，求$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$的值。

14. 有一个有限数列$a_1, a_2, \cdots, a_{13}, a_{14}$，已知其中任何相邻三项之和为 20，且$a_4=9$，$a_{12}=7$，求$a_8$。

15. 设数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$满足$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，且对任何自然数$n$，都有$a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，又$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，求$a_1+a_2+\cdots+a_{100}$的值。

16. 对于任意的实数数列A：$A=(a_1, a_2, a_3, \cdots)$，定义$\Delta A$数列如下：$\Delta A=(a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots)$，其中第$n$项为$a_{n+1}-a_n$，假设$\Delta(\Delta A)$的所有项全为 1，而且$a_{19}=a_{92}=0$，求$a_1$。

17. 等差数列$\{a_n\}$的首项为$a_1(a_1\neq 0)$，其前 3 项和与前 11 项和相等，问此数列前几项和达到最大值或最小值？

18. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_3=12$，$S_{12}>0$，

$S_{13}<0$，

（1） 求公差 d 的取值范围；

（2） 指出 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中哪一个值最大，并说明理由。

19. 公差非零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_i\cdot a_j>0$ $(i,j=1,2,\cdots,1994)$，令 $b_1=a_1\cdot a_{1994}$，$b_2=a_2\cdot a_{1993}$，$\cdots$，$b_k=a_k\cdot a_{1995-k}$，求数列$\{b_n\}$中数值最大的项。

20. 试证：在等差数列$\{a_n\}$中，如果它的前 m 项的和 S_m 等于它的前 n 项的和 $S_n(n\neq m)$，则它的前 $m+n$ 项的和 S_{m+n} 为 0。

21. 首项为 1 的等差数列前 n 项的和与第 n 项之后连续 $3n$ 项的和之比对任意的自然数 n 都为常数，求这个比的值及公差。

22. 四个数，前三个数成等比数列，它们的和是 19，后三个数成等差数列，它们的和是 12，求此四个数。

23. 三个数组成等差数列，如果适当排列这三个数，也可成等比数列，已知这三个数的和等于 6，求此三个数所组成的等差数列。

24. 一个等比数列只有 5 项，其中每一项都是小于 100 的正整数，5 项的和为 211，如果 S 是这个数列中恰为一整数的平方的各项之和，求 S 的值。

25. 设首项为 a，公差为$-\dfrac{1}{a}$的等差数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，且 $a>0$，如果 S_2,S_3,S_5 构成等比数列，求 a 的值。

26. 已知数列 1，2，4，$\cdots$ 前 n 项之和为：$S_n=an+bn^2+cn^3$，求这个数列的通项公式。

27. 设三角形三边成等比数列，试证其公比介于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$之间。

28. 已知一个三角形的三个内角 A,B,C 成等差数列，对应三条边 a,b,c 成等比数列，问这个三角形是什么三角形？

29. 已知$\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 成等比数列，分别以此三条边所在的直线为轴旋转一周，所得的旋转体的体积为 V_a,V_b,V_c，求证 V_a,V_b,V_c也成等比数列。

30. 求和：

(1) $\dfrac{3}{1\cdot2\cdot4}+\dfrac{5}{2\cdot3\cdot5}+\dfrac{7}{3\cdot4\cdot6}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+3)}$；

(2) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$。

31. 求和：$\dfrac{3}{1!\ +2!\ +3!}+\dfrac{4}{2!\ +3!\ +4!}+\cdots+\dfrac{n+2}{n!\ +(n+1)!\ +(n+2)!}$。

32. 求和：$S_{99}=a_1+a_2+\cdots+a_{99}$，

其中 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$。

33. 求和：$\dfrac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}+\dfrac{x_3}{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}+\cdots+\dfrac{x_n}{(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$。

34. 求和：

(1) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$；

(2) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)\cdot(n+2)$；

(3) $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+n(n+1)^2$。

35. 设数列$\{\frac{1}{a_n}\}$为等差数列，求证：

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n。$$

36. 证明存在数 A 和 B，使得对每个 $n\in N$ 有：$a_1+a_2+\cdots+a_n=A\text{tg}n+Bn$，其中 $a_k=\text{tg}k\cdot\text{tg}(k-1)$。

37. 求和：

(1) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots$
$+k\cdot(n-k+1)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$；

(2) $1q+2q^2+3q^3+\cdots+(n-1)q^{n-1}+nq^n$。

38. 求和：

$$(a+\frac{1}{a})^2+(a^2+\frac{1}{a^2})^2+\cdots+(a^n+\frac{1}{a^n})^2。$$

39. 求和：

(1) $8+88+888+\cdots+\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}8}$；

(2) $0.1+0.02+0.003+0.0004+0.00005+\cdots$。

40. 已知$\{a_n\}$是等比数列，如果 $a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 的值。

41. 已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=b$ $(b\neq0)$，它的前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n\geqslant1)$，且 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$是一个等比数列，其公比为 $p(p\neq0$，且$|p|<1)$。

(1) 证明：$a_2,a_3,\cdots a_n,\cdots$(即$\{a_n\}$从第 2 项起)是一个等比数列；

(2) 设 $W_n=a_1S_1+a_2S_2+\cdots+a_nS_n(n\geqslant1)$，求：$\lim\limits_{n\to\infty}W_n$(用 b,p 表示)。

42. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{3}{5}$，$a_2=\frac{31}{100}$，且数列 $a_2-\frac{1}{10}a_1$，$a_3-\frac{1}{10}a_2,\cdots,a_{n+1}-\frac{1}{10}a_n,\cdots$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，而数列

$\lg(a_2-\frac{1}{2}a_1),\lg(a_3-\frac{1}{2}a_2),\cdots,\lg(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n),\cdots$是公差为$-1$的等差数列，

（1） 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

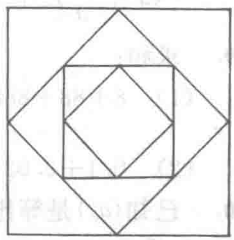
（2） 设$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n\geqslant 1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

43. 已知数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的相邻两项$a_n,a_{n+1}$是方程

$$x^2-c_nx+(\frac{1}{3})^n=0$$

的两个根，且$a_1=2$，求无穷数列$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$的和。

44. 如题图 3－1，顺次连接边长为 1 的正方形各边的中点，得一小正方形，再顺次连结这小正方形各边的中点，得一更小正方形，如此无限继续下去，求所有这些正方形(包括原来的大正方形)的周长之和。

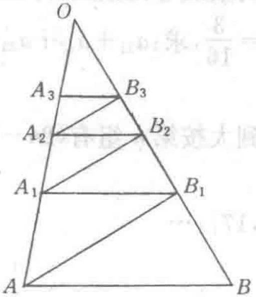


题图 3－1

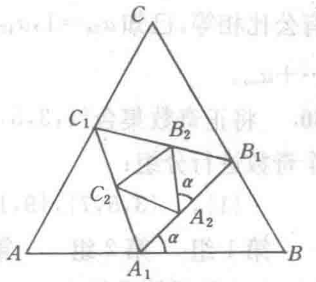
45. 如题图 3－2，已知$\triangle AOB$中$OA=b,OB=a,\angle AOB=\theta(a\geqslant b,\theta$为锐角)，作$AB_1\perp OB$于$B_1$，$B_1A_1/\!/AB$，再作$A_1B_2\perp OB$于$B_2$，$B_2A_2/\!/AB$，如此无限继续作下去，设$\triangle ABB_1,\triangle A_1B_1B_2,\cdots$的面积为$S_1,S_2,\cdots$，求无穷数列$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$的和。

46. 设$\triangle ABC$是边长为a的正三角形，在三边AB,BC,CA上各取一点A_1,B_1,C_1为顶点作正三角形$A_1B_1C_1$，而$\angle B_1A_1B=\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$，然后再依此方式顺次作出如题图 3－3 所示的正三角形序列：$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，$\cdots$，$\triangle A_nB_nC_n,\cdots$，设$\triangle A_nB_nC_n$的面积为$S_n$，现要使所有新作的三

角形面积的和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ 等于$\triangle ABC$ 的面积，试确定 α 的值是多少？



题图 3－2



题图 3－3

47. 设实数 $a\neq 0$，数列$\{a_n\}$是首项为 a，公比为$-a$ 的等比数列，记 $b_n=a_n\lg|a_n|(n=1,2,\cdots)$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n(n=1,2,\cdots)$，求证：当 $a\neq -1$ 时，对任意自然数 n，都有

$$S_n=\frac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}(1+n+na)a^n]。$$

48. 能够在如表所示的 5×5 正方形的 21 个空格中填入正整数，使得每一行和每一列都成等差数列，问必须填进标有 * 号的空格的数是几？

			*	
*	74			
				186
		103		
0				

49. $n^2(n\geqslant 4)$个正数排成 n 行 n 列

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ \cdots,\ a_{1n}$$
$$a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{24},\ \cdots,\ a_{2n}$$
$$a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ a_{34},\ \cdots,\ a_{3n}$$
$$a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ a_{44},\ \cdots,\ a_{4n}$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3},\ a_{n4},\ \cdots,\ a_{nn},$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等。已知 $a_{24}=1, a_{42}=\frac{1}{8}, a_{43}=\frac{3}{16}$，求：$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$。

50. 将正奇数集合 $\{1,3,5,\cdots\}$ 从小到大按第 n 组有 $(2n-1)$ 个奇数进行分组：

$$\underset{\text{第1组}}{\{1\}},\quad \underset{\text{第2组}}{\{3,5,7\}},\underset{\text{第3组}}{\{9,11,13,15,17\}},\cdots$$

问：1991 位于第几组中？

51. 把自然数列按下表排列，问：

(1) 第 1 行中第 14 个数是几？

(2) 第 9 行中，第 3 个数是几？

(3) 1993 位于那一格中？

1	2	4	7	11	16	
3	5	8	12			
6	9	13				
10	14					
15						

52. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，又设方程 $a_ix^2+2a_{i+1}x+a_{i+2}=0\ (i=1,2,\cdots)$ 中各个 a_i 及公差都是非零的实数。

(1) 求这些方程的公共根；

(2) 证明：若上述方程的另一根为 α_i，则 $\frac{1}{\alpha_1+1},\frac{1}{\alpha_2+1},\cdots\frac{1}{\alpha_n+1},\cdots$ 成等差数列。

53. 无穷数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\ (x_1\neq 0)$，当 $n\geqslant 3$ 时，满足条件：

$$({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{n-1}}^2)({x_2}^2+{x_3}^2+\cdots+{x_n}^2)$$

$$=(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)^2$$

求证：数列$\{x_n\}$为等比数列。

54. 设互不相等的三个数a,b,c成等比数列，又$\log_c a$，$\log_b c$，$\log_a b$成等差数列，求证其公差为$\frac{3}{2}$。

55. 已知a,b,c,x都是非零实数，且$(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$，求证：$a,b,c$成等比数列，且公比为$x$。

56. 求证：不管互不相等的正数a,b,c是成等差数列还是成等比数列，当n是大于2的整数时，有$a^n+c^n>2b^n$。

57. 已知n是自然数，求证：

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}>1。$$

58. 求出适合下式的n：

$$\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3}=\frac{199}{242}。$$

59. 证明：数列$1\cdot2\cdot3,2\cdot3\cdot4,\cdots,n(n+1)(n+2),\cdots$的个位数字周期地重复。

60. 设a_n是$1^2+2^2+\cdots+n^2$的个位数字，$n=1,2,3,\cdots$，试证：$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是有理数。

61. 设P个素数$a_1,a_2,\cdots,a_p$构成递增等差数列，且$a_1>p$，证明：如果p为素数，那么公差d能被p整除。

62. 证明：由正整数组成的无穷项等差数列（公差不为零）的所有项不可能都是素数。

63. 能否在数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$中选出一个无穷等比数列，使其和为$\frac{1}{5}$？

64. 已知实数列$\{a_k\}$满足：存在自然数n，使$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$及$a_{n+k}=a_k(k=1,2,\cdots)$，证明：存在自然数$N$，使当$k=$

0,1,2,…时满足:$a_N+a_{N+1}+\cdots+a_{N+k}\geqslant 0$。

65. 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列,其项都在 S 中,且添加 S 的其它元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列,求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列)。

66. 已知三角形的边长构成一个算术级数,它的公差 d 是正数,试证:在这个三角形中必有两个角小于 60°。

67. 设数列 $\{a_n\}$,这里 $a_n=n+\dfrac{1989}{n^2}$,试求其最小项。

68. 假设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是一个严格增的非负整数数列,试证:一定不存在这样的数列 $\{a_n\}$,使得对任意的 n 和 m 都满足关系式 $a_{mn}=a_m+a_n$。

§3.2 数学归纳法

69. 用数学归纳法证明等式 $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$ 对一切自然数 n 都成立。

70. 用数学归纳法证明等式

$$1\cdot(n^2-1)+2\cdot(n^2-2^2)+\cdots+n(n^2-n^2)=\frac{1}{4}n^2(n-1)(n+1)$$

对一切自然数 n 都成立。

71. 用数学归纳法证明等式

$$(1\cdot 2^2-2\cdot 3^2)+(3\cdot 4^2-4\cdot 5^2)+\cdots+[(2n-1)(2n)^2-2n(2n+1)^2]=-n(n+1)(4n+3)$$

对一切自然数 n 都成立。

72. 设 $S_1=1^2$,$S_2=1^2+2^2+1^2$,$S_3=1^2+2^2+3^3+2^2+1^2$,

$\cdots, S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2$。用数学归纳法证明:公式 $S_n = \frac{n(2n^2+1)}{3}$ 对所有的自然数 n 都成立。

73. 是否存在常数 a、b、c,使得等式

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{12}(an^2 + bn + c)$$

对一切自然数 n 都成立?并证明你的结论。

74. 设数列 $\{a_n\}$ 满足关系式① $a_1 = \frac{1}{2}$;

② $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n \geqslant 1)$。

试证:数列通项公式为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$。

75. 已知对任意的 $n \in N$,$a_n > 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^3 = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_j)^2$,求证:$a_n = n$。

76. 求证:$3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ 是 14 的倍数,其中 n 是非负整数。

77. 证明:n 为任意自然数时,$(3n+1) \cdot 7^n - 1$ 能被 9 整除。

78. 试证:n 为任意自然数 $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$ 能被 24 整除。

79. 证明:$x^n - na^{n-1}x + (n-1)a^n$ 能被 $(x-a)^2$ 整除($n \in N$)。

80. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式为 $S_n = \frac{\pi}{12}(2n^2 + n)$,求证:对任意自然数 n,都有

$$\sin a_n \cdot \sin a_{n+1} \cdot \sin a_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1)^{n-1}。$$

81. 设 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$,数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} \cdot \mathrm{tg}^n\theta$,记 $S_{2n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$,求证:对于任何自然数 n,

$$S_{2n} = \frac{1}{2}(\sin 2\theta)[1 + (-1)^{n+1}\mathrm{tg}^{2n}\theta]。$$