Shuxue Peiyou Jingsai

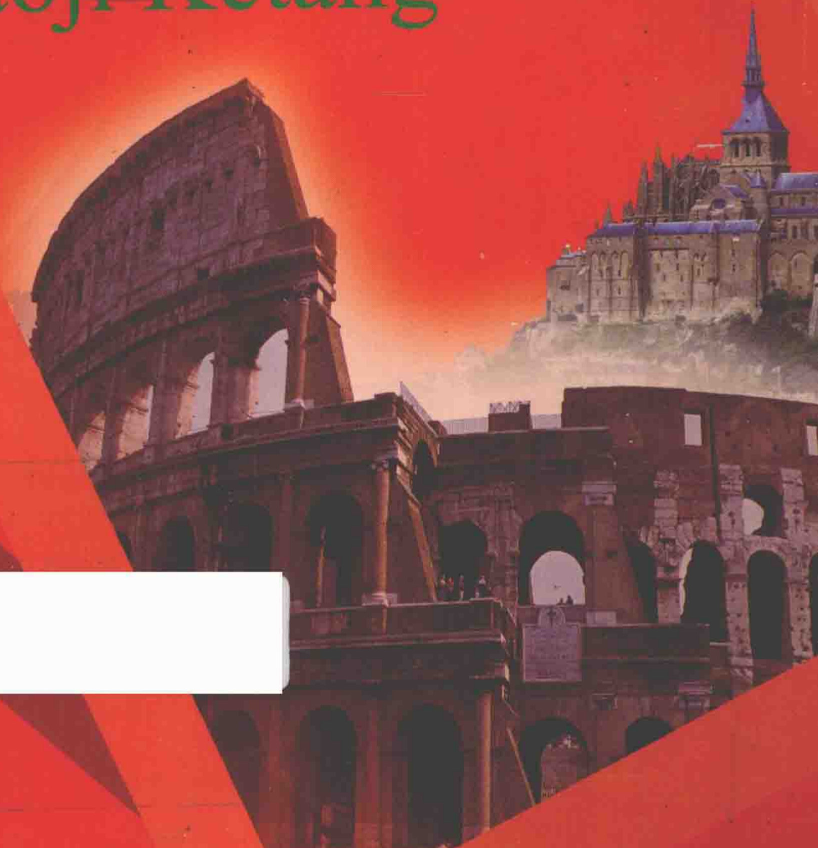
数学培优竞赛

新课标

主编 王能生 陶月电

# 超级课堂

Chaoji Ketang



课堂+培优+中考+竞赛

基础+应用+能力+创新

7年级

华中师范大学出版社

新课标

Shuxue Peiyou Jingsai

# 数学培优竞赛

# 超级课堂

Chaoji Ketang

本册主编：王能生　陶月电

编　　者：王能生　熊新华　沈占立　彭　毅

余俊文　陈起航　占　鳌　汪四友

陈志翔　谢杰明　刘文建　李军华

邵爱玲　万怀生　方　超



## 7年级

華中師範大學出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛超级课堂 7 年级/王能生 陶月电 主编. —4 版

—武汉:华中师范大学出版社,2012.7

ISBN 978-7-5622-5455-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①王… ②陶… Ⅲ.①数学课-初中-教学参考资料

Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 083336 号

数学培优竞赛超级课堂 7 年级

主编:王能生 陶月电

责任编辑:涂 庆

责任校对:万春春

封面设计:甘 英

封面制作:胡 灿

选题设计:华大鸿图编辑室(027—67867361)

出版发行:华中师范大学出版社 ©

社址:湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号

销售电话:027—67867076 027—67865356 027—67867371

邮购:027—67861321

传真:027—67865347

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

网址:http://www.ccnupress.com

印刷:湖北恒泰印务有限公司

督印:章光琼

字数:345 千字

开本:889mm×1194mm 1/16

印张:13

版次:2012 年 7 月第 4 版

印次:2012 年 7 月第 1 次印刷

定价:23.80 元

欢迎上网查询、购书

# 前　言

这套初中新课标《培优竞赛超级课堂》是 2007 年出版的，2008 年、2010 年分别进行了改版修订，目前共有 11 个品种。这套图书自出版以来，共发行了 100 余万册。短短五年，就取得如此不俗的成绩，实属一个奇迹。全套图书好用、实用、够用，主要具有如下特色：

## 一、精心策划，定位准确

现在重点高中的录取一般不以中考的成绩为依据，它更侧重于本校自主命题的考核成绩、学科竞赛成绩及学生的特长。与之对应，也就迫切需要一些能满足培优、竞赛和特长训练方面需求的辅导图书。《培优竞赛超级课堂》丛书正是在这种背景下诞生的。丛书从高端入手，既遵循教学大纲，又超越教学大纲；既源于教材，又不拘泥于教材，一切从实际出发，以“立足培优，面向中考，挑战竞赛，科学训练”为宗旨，以最新教学大纲、竞赛大纲和最新课程标准为依据，以新课标教材内容编排顺序为脉络，将教材知识按年级剖分为若干专题，配合教学进度，顺应学习过程，由浅入深、循序渐进地对初中学生进行技能技巧的训练和学习方法的指导。该丛书针对性强，实用性高，既能帮助多数学生拾遗补缺，增长学习的自信心，又能培养尖子生综合运用学科知识的能力。

## 二、名师编写，质量上乘

一套优秀的图书，不仅要有好的选题策划，还必须要有一流的作者队伍和编辑团队。《培优竞赛超级课堂》的编写队伍可谓名师云集。

王后雄，化学主编，享受国务院政府特殊津贴的著名中学化学教育专家、考试专家，专门从事化学课程与教学论、教育考试等教学及科研工作，是多个省市化学竞赛及大型考试命题人之一。首创的“化学教学诊断学习法”和“中学化学目标控制教学法”在全国 10000 多所中学实验推广，效果显著。由于化学教学、教改、教研及竞赛培训成绩卓著，先后被授予全国劳动模范、全国教育改革“十佳教师”等荣誉称号。

还有数学主编王能生、陶月电、英语主编高分、物理主编张义仁、刘南地等老师，他们均是在本学科享有盛誉的优秀教师。

华中师大出版社编辑室的编辑团队和由这些教育专家、教学一线的特高级教师组成的编写队伍通力合作将这套实用、好用、够用、质量上乘的《培优竞赛超级课堂》奉献给广大的读者朋友。本套书自推出以来，反响非常好，在许多学校刮起了“红色旋风”(我们图书封面是红色的)。《培优竞赛超级课堂》已经帮助不少学生站上在竞赛的领奖台，搭上重点高中的直通车。

## 三、特色鲜明，优在创新

●**理念创新**　每讲推出的“与数学对话”栏目，将把我们带进数学的天堂。此外，我们还可以欣赏到一些历史名题，它们曾以科学本身的魅力，打动过无数探索的心灵，使一代又一代的莘莘学子乐此不疲。这是本套书的一大特色，是培养学生人文科学素养的重要途径。

●**讲法创新**　每讲设计的“典例剖析”栏目，针对考点，精选“母题”，配以优美的解法、举一反三的“变式题组”、“方法视窗”和“规律清单”等等，实现内容讲解的“实、精、透”和学生能力的“培、提、升”双效统一。

●**练法创新**　每讲设置的“能力平台”栏目，在遵循新课标考点的前提下，精选最新典型的中考题、竞赛题，配以经典题和原创题，做到训练“步步为营”，能力“级级提升”。

●**版式创新**　本套书针对教材内容进行专题讲解，对中考、竞赛试题运用“开窗式”的排版形式，双色双栏印刷。疑难之处或需升华之处均以分栏旁批的形式和不同的颜色提醒读者，并佐以名人名言，旨在营造一种文化氛围，让读者在有限的篇幅内获得经典性文化的熏陶和创造性心智的启蒙。

浏览丛书会令你耳目一新，品味丛书会让你受益匪浅。相信你通过使用本书定能在有限的时间内获得最佳的学习效果，衷心希望本书能为你的成功助一臂之力！

# 目录

Contents

# 第1讲 有理数与数轴的数形结合

## 与大师对话

笛卡尔(Rene Descartes，1596—1650)，法国数学家.笛卡尔在数学上的最大贡献是提出了解析几何学的主要思想和方法，并指明了其发展方向.他在《几何学》中，将逻辑、几何、代数方法结合起来，通过讨论作图问题，勾勒出解析几何的轮廓.从此，数和形就走到了一起.


笛卡尔

**数形结合初体验**

想体验一下数形结合吗？以下问题是笛卡尔与欧拉都研究过的，你想试一试吗？

如图1-1中的四个图a、b、c、d都称作平面图，观察图b和表中对应数值，探究其中的规律并作答.

(1)数一数每个图各有多少个顶点、多少条边，这些边围出多少区域，并将结果填入下表中(其中b已填好).

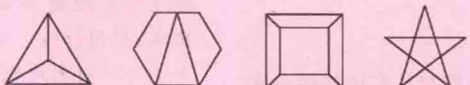

a　　b　　c　　d

图1-1

| 图 | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 顶点数($V$) | 4 | 7 | 8 | 10 |
| 边数($E$) | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 区域数($F$) | 3 | 3 | 5 | 6 |

(2)根据表中的数值，写出平面图的顶点数、边数、区域数之间的一种关系.

$V+F-1=E$

## 典例剖析

### 类型一 用有理数表示相反意义的量

**例1** (2011，宜昌)如果用+0.02克表示一只乒乓球质量超出标准质量0.02克，那么一只乒乓球质量低于标准质量0.02克记作( B ).

A. +0.02克　　B. −0.02克　　C. 0克　　D. +0.04克

【学找切入点】 一种意义的量用正数表示，则其相反意义的量用负数表示.相反意义的量有“上升”与“下降”，“前进”与“后退”，“前”与“后”，“高于”与“低于”，“收入”与“支出”等.

【答案】 B

【变式题组】 1.(2011，丽水)有四包真空小包装火腿，每包以标准克数(450克)为基数，超过的克数记作正数，不足的克数记作负数，以下数据是记录结果，其中表示实际克数最接近标准克数的是( A ).

A. +2　　B. −3　　C. +3　　D. +4

2.(2010，吉林)检测4个足球，其中超过标准质量的克数记为正数，不足标准质量的克数记为负数，从轻重的角度看，最接近标准的是( C ).

+0.9　　−3.6　　−0.8　　+2.5


A　　B　　C　　D

### 知识清单

1.有理数的分类

(1)按定义分类：

- 有理数
  - 整数
    - 正整数
    - 0
    - 负整数
  - 分数
    - 正分数
    - 负分数

(2)按性质分类：

- 有理数
  - 正有理数
    - 正整数
    - 正分数
  - 0
  - 负有理数
    - 负整数
    - 负分数

2.规定了原点、正方向、单位长度的直线叫数轴.

3.任何一个有理数都可以用数轴上的点表示.反过来，数轴上的任何一个点却不一定表示有理数.

### 大师寄语

数无形时少直觉，形少数时难入微，数形结合万般好，隔离分家万事休.

——华罗庚

## 类型二 求数轴上点所表示的有理数

**例 2** (2010,河北)如图 1-2,长方形 $ABCD$ 的顶点 $A,B$ 在数轴上,$CD=6$,点 $A$ 对应的数为 $-1$,则点 $B$ 所对应的数为________.

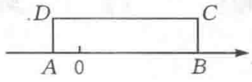


图 1-2

【学找切入点】 由数轴可知 $CD=OA+OB$,又 $OA=1$,则 $OB=5$.从而得到 $B$ 所对应的数是 5.

【解】 $\because CD=OA+OB$,$\therefore OB=CD-OA=6-1=5$.

$\therefore$ 点 $B$ 所表示的数是 5.

【变式题组】 3. 如图 1-3,点 $A$、$B$ 在数轴上对应的有理数分别为 $m,n$,则 $A,B$ 间的距离是________.(用含 $m,n$ 式子表示)

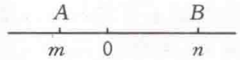


图 1-3

4. 2008 年 8 月 8 日,第 29 届奥运会在北京开幕,5 个城市的国际标准时间(单位:时)在如图 1-4 的数轴上表示,那么北京时间 2008 年 8 月 8 日 20 时应是(   ).

A. 伦敦时间 2008 年 8 月 8 日 11 时　　B. 巴黎时间 2008 年 8 月 8 日 13 时

C. 纽约时间 2008 年 8 月 8 日 5 时　　D. 首尔时间 2008 年 8 月 8 日 19 时

图 1-4

## 类型三 利用数轴比较有理数的大小

**例 3** (2010,金华)如图 1-7,若 $A$ 是实数 $a$ 在数轴上对应的点,则关于 $a,-a,1$ 的大小关系表示正确的是(   ).

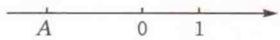


图 1-7

A. $a<1<-a$　　B. $a<-a<1$

C. $1<-a<a$　　D. $-a<a<1$

【学找切入点】 在数轴上画出 $-a$ 所表示的点,即利用数轴上右边的数总比左边的数大来比较大小.

【解】 因为 $a$ 与 $-a$ 到原点的距离相等,所以表示 $-a$ 的点如图 1-8 所示,在数轴上右边的数总比左边的数大. $a<1<-a$,故选 A.

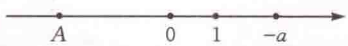


图 1-8

【答案】 A

【变式题组】 5. 若 $a<0,b>0,a+b<0$,则下列关系中正确的是(   ).

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-a>b>-b$

C. $b>-a>-b>a$　　D. $-a>b>-b>a$

6. (2011,成都)已知实数 $m,n$ 在数轴上的对应点的位置如图 1-9 所示,则下列判断正确的是(   ).

A. $m>0$　　B. $n<0$　　C. $mn<0$　　D. $m-n>0$

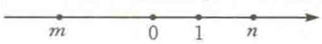


图 1-9

## 类型四 与数轴有关的分类讨论

**例 4** 已知数轴上有 $A$、$B$ 两点,$A$、$B$ 之间的距离为 1,点 $A$ 与原点 $O$ 的距离为 3,那么点 $B$ 对应的数是________.

【学找切入点】 此题可先确定点 $A$ 的位置,再确定点 $B$ 的位置,充分考虑 $A$、$B$ 两点的多种位置关系.

【解】 点 $A$ 到原点 $O$ 的距离为 3,故点 $A$ 表示的数为 3 或 $-3$,因为 $A$、$B$ 之间的距离为 1,当点 $A$ 表示的数为 3 时,点 $B$ 表示的数是 2 或 4;当点 $A$ 表示的数为 $-3$ 时,点 $B$ 表示的数是 $-2$ 或 $-4$,故点 $B$ 对应的数是 2 或 4 或 $-2$ 或 $-4$.

【变式题组】 7. 数轴上有 $A$、$B$ 两点,若点 $A$ 对应的数是 $-2$,且 $A$、$B$ 两点的距离为 3,则点 $B$ 对应的数是________.

8. 点 $A$ 到原点的距离为 3,点 $B$ 到原点的距离为 4,则 $AB$ 之间的距离是________.

## 类型五 利用数轴解决生活实际问题

**例 5** 当父亲是儿子现在年龄时,儿子已经 10 岁,当儿子是父亲现在年龄时,父亲将

### 规律清单

(1)数轴上任意两点间的距离等于较大数对应点的坐标减去较小数对应点的坐标,如图 1-5,$AB=b-a$.

图 1-5

(2)数轴上互为相反数的点在原点两旁,到原点的距离相等,如图 1-6.

①$a=-b$ 或 $a+b=0$;

②$OA=OB$.

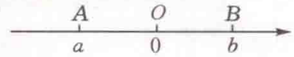


图 1-6

### 方法视窗

比较有理数的大小,可以把这些有理数在数轴上表示出来,利用数轴上右边的数大于左边的数来比较.

### 方法视窗

从数轴上获取有关信息的关键是解决从图形语言到符号语言的转化,主要包括:

①数轴上的点所表示的数的正负性;

②数轴上的点到原点的距离.

### 方法视窗

对某些条件较宽或限制条件较隐蔽的数学问题,往往不能(或较难)以统一的形式解答,此种情况下,必须在所给条件下,把问题划分成若干个与其等价的小问题,然后逐个讨论,综合结果,这种解题方法称为分类讨论.

一般需分类讨论的情形:

①已知条件表述不明;

②图形位置或形状不确定.

是 82 岁，问父子相差几岁？

【学找切入点】　可以借助数轴求解. 如图 1-10，在数轴上将 10 岁，儿子现在的年龄，父亲现在的年龄 82 岁大致标识出来，分别对应 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点，注意一点——父子俩年龄差距是固定不变的.

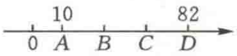



图 1-10

【解】　如图 1-10，设 $AB=BC=CD=x$，则 $3x+10=82$，解得 $x=24$.

【变式题组】　9. 某班有学生 45 名，参加语文竞赛的有 21 人，参加数学竞赛的有 30 人，两科均未参加的有 6 人，问两科均参加的有多少人？

## 类型六　与数轴有关的探索问题

**例 6**　（"希望杯"改编）如图 1-11 所示，圆的周长为 4 个单位长度，在圆的 4 等分点处标上数字 0，1，2，3. 先让圆周上数字 0 所对应的点与数轴上的数 $-1$ 所对应的点重合，再将数轴按逆时针方向绕在该圆上，那么数轴上的数 $-2012$ 将与圆周上的数字________重合.

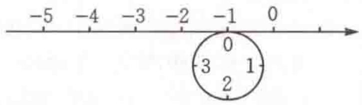



图 1-11

【学找切入点】　数轴上的数与圆周上的数的重合呈周期变化，4 个数字为一个周期.

【解】　从 $-1$ 到 $-2012$，共有 2012 个数，而 $2012\div 4=503\cdots 0$. 由于数轴按逆时针方向绕在该圆上，所以 $-2012$ 与数字 $-4$ 对应的数相同，故填 1.

【变式题组】　10. 如图 1-12，$A$ 是硬币圆周上一点，硬币与数轴相切于原点 $O$（$A$ 与 $O$ 点重合）. 假设硬币的半径为 1 个单位长度，若将硬币沿数轴正方向滚动一周，点 $A$ 恰好与数轴上点 $A'$ 重合，则点 $A'$ 对应的数是________.

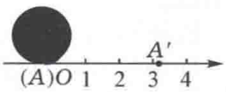



图 1-12

## 研讨乐园

**例 7**　已知 $m$、$n$ 在数轴上的位置如图 1-13 所示. 试比较 $-m$，$-n$，$m$，$n$，$m-n$，$n-m$ 的大小，并且"$>$"连接.


图 1-13

**甲的探究**　用特殊值法：令 $m=-2$，$n=1$，

则 $-m=-(-2)=2$，$-n=-1$，$m-n=-2-1=-3$，$n-m=1-(-2)=1+2=3$.

又 $3>2>1>-1>-2>-3$，

$\therefore n-m>-m>n>-n>m>m-n$.

**乙的探究**　分类讨论法

(1)先按正、负进行初步分类：由 $n>0$，$m<0$ 知正数：$n$，$-m$，$n-m$；负数：$-n$，$m$，$m-n$.

其中 $n$ 与 $-n$，$-m$ 与 $m$，$n-m$ 与 $m-n$ 都是互为相反数.

(2)细加比较：①$n-m>-m>n$；②$-n>m>m-n$.

又 $n>0>-n$，故 $n-m>-m>n>-n>m>m-n$.

**丙的探究**　利用数轴法

分析所求，画出 $-m$，$-n$，$m-n=m+(-n)$，$n-m=-(m-n)$，如图 1-14 所示.

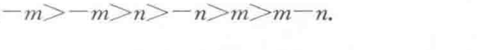



图 1-14

由图 1-14 可知，$n-m>-m>n>-n>m>m-n$.

**思维拓展**

甲的探究：是用特殊值法，通过特殊值进行比较大小.

乙的探究：依正数的特点进行分类，即乙先讨论正、负，再在正、负数内分别讨论.

丙的探究是先根据数轴的意义、有理数加法、相反数的意义，画出数轴上对应的点，再由数轴上右边的数大于左边的数来比较大小.

# 能力平台

## 基础训练

1.(2010,莱芜)如图 1-15,数轴上 $A,B$ 两点分别对应有理数 $a$、$b$,则下列结论正确的是( D ).

A. $ab>0$　　B. $a-b>0$

C. $a+b>0$　　D. $|a|-|b|>0$

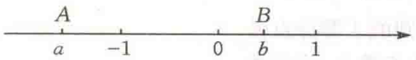


图 1-15

2. 如图 1-16,数轴上一动点 $A$ 向左移动 2 个单位长度到达点 $B$,再向右移动 5 个单位长度到达点 $C$.若点 $C$ 表示的数为 1,则点 $A$ 表示的数为( D ).

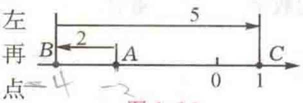


图 1-16

A. 7　　B. 3　　C. $-3$　　D. $-2$

3.(2010,台湾)如图 1-17,数轴上的三点 $A$、$B$、$C$ 所表示的数分别为 $a$、$b$、$c$,判断下列各式正确的是( D ).

A. $(a-1)(b-1)>0$　　B. $(b-1)(c-1)>0$

C. $(a+1)(b+1)<0$　　D. $(b+1)(c+1)<0$

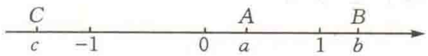


图 1-17

4.(2009,宜宾)数轴上的点 $A$、$B$ 位置如图 1-18 所示,则线段 $AB$ 的长度为( D ).

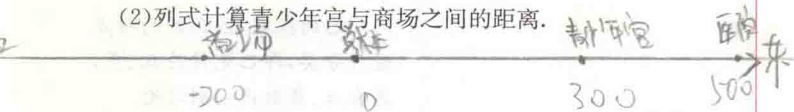
图 1-18

A. $-3$　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5. 在一条东西走向的马路旁,有青少年宫、学校、商场、医院四家公共场所.已知青少年宫在学校东 300m 处,商场在学校西 200m 处,医院在学校东 500m 处.若将马路近似地看做一条直线,以学校为原点,向东为正方向,用 1 个单位长度表示 100m.

(1)在数轴上表示出四家公共场所的位置;

(2)列式计算青少年宫与商场之间的距离.



(2) $300+|-200|=500(m)$

## 培优训练

6.(希望杯)如图 1-19,在数轴上有六个点,且 $AB=BC=CD=DE=EF$,则这条数轴的原点在( B ).

16÷5
3.2

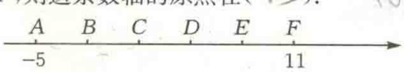


图 1-19

A. 在点 $A,B$ 之间　　B. 在点 $B,C$ 之间

C. 在点 $C,D$ 之间　　D. 在点 $D,E$ 之间

7.("希望杯"改编)在数轴上,坐标是整数的点称为"整点".设数轴的长度单位是厘米,若在这个数轴上随意画出一条长 2012 厘米的线段 $AB$,则线段 $AB$ 盖住的整点至少有( C ).

A. 2010 个　　B. 2011 个　　C. 2012 个　　D. 2013 个

8. 在数轴上,点 $A$ 对应的数是 $-2012$,点 $B$ 对应的数是 19,点 $C$ 对应的数是 $-4032$,记 $A,B$ 两点间的距离为 $d_1$,$A,C$ 两点间的距离为 $d_2$,$B,C$ 两点间的距离为 $d_3$,则有( A ).

A. $d_1>d_2$　　B. $d_2>d_3$

C. $d_1>d_3$　　D. $d_3=2d_1+1$

9.("希望杯"培训)如图 1-20,在数轴上有若干个点,每相邻两个点之间的距离是 1 个单位长,有理数 $a,b,c,d$ 所表示的点是这些点中的 4 个,且在数轴上的位置如图所示,如果 $3a=4b-3$,那么 $c+2d=$ $-2$.

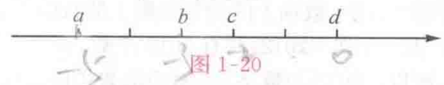


图 1-20

10. 如图 1-21 是小明所画的数轴,数轴上标出的点相邻间的距离都相等,他在清理数轴的旁边的污渍时,不慎将原点 $O$ 与 $C$ 处相应的数擦掉了,请你将它们补上.

图 1-21

## 竞赛训练

11.("希望杯"竞赛)电子跳蚤落在数轴上的某点 $K_0$,第一步由 $K_0$ 向左跳一个单位到 $K_1$,第二步由 $K_1$ 向右跳两个单位到 $K_2$,第三步由 $K_2$ 向左跳三个单位到 $K_3$,第四步由 $K_3$ 向右跳四个单位到 $K_4$,……按以上规律跳了 100 步时,电子跳蚤落在数轴上的点 $K_{100}$ 所表示的数恰是 19.94,试求电子跳蚤的初始位置 $K_0$ 点所表示的数.

$x-1,\ x-1+2,\ x-1+2-3$ —— $x-1+\cdots100$

$x-1+2-3+4-5+6$ —— $-99+100=19.94$

$x=-30.06$

12.(河南竞赛)在数轴上,$N$ 点与原点的距离是 $N$ 点与 30 所对应点之间的距离的 4 倍,那么 $N$ 点表示的数是多少?

$N\leq 0$

$|N-0|=4|N-30|$

$0<N<30$

$-N=4(30-N)$

$N=40$

$N\geq 30$

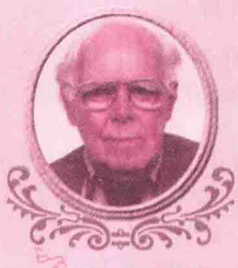
$N=4(30-N)$　　$N=4N-120$

$N=24$　　$N=40$

# 第 2 讲　话说相反数与绝对值

## 与大师对话

马丁·加德纳(Martin Gardner,1914—　),当代美国作家,《科学美国人》杂志的编辑.他以撰写趣味数学文章而闻名于世,有"数学园丁"、"数学传教士"的美称.《科学美国人》杂志数学游戏专栏20余年的连载文章,使他成为"数学神庙的守护神".著有《数学游戏》、《啊哈!灵机一动》等.



马丁·加德纳

### 茶杯与硬币

这是一道如今称为"急转弯"的问题,它自身的喻义已打破人们传统的思维,而向着诡辩方向发展.这也许正是灵机一动!

[问]　如图 2-1,四枚硬币放在三只玻璃杯中,使每只玻璃杯中的硬币数都是奇数.

[答]　奇数个奇数和仍是奇数,这样的问题似乎无解.但请你注意下面的解法——将其中两只玻璃杯摞起来,就找到答案了.(作者注:此题还有其他解答,读者不妨一试)

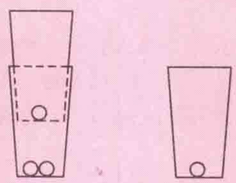


图 2-1

## 典例剖析

### 类型一　互为相反数

**例 1**　若 $2x+1$ 是 $-9$ 的相反数,则 $x=$________.

【学找切入点】　$-9$ 的相反数是 9,则 $2x+1=9$.

【解】　因为 $2x+1$ 是 $-9$ 的相反数,所以 $2x+1=9$,所以 $x=4$.故填 4.

【变式题组】　1.(2011,丽水)下列各组数中,互为相反数的是(　　).

A. 2 和 $-2$　　B. $-2$ 和 $\frac{1}{2}$　　C. $-2$ 和 $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$ 和 2

2.(2010,淄博)下列结论中不能由 $a+b=0$ 得到的是(　　).

A. $a^2=-ab$　　B. $|a|=|b|$　　C. $a=0,b=0$　　D. $a^2=b^2$

### 类型二　绝对值的意义

**例 2**　(2010,株洲竞赛)若 $x$ 的绝对值小于 1,则化简 $|x-1|+|x+1|$ 得(　　).

A. 0　　B. 2　　C. $2x$　　D. $-2x$

【学找切入点】　由 $x$ 的绝对值小于 1 得出 $x$ 的范围,再化简.

【解法 1】　因为 $x$ 的绝对值小于 1,所以 $-1<x<1$.所以 $x+1>0$,$x-1<0$,原式 $=-(x-1)+x+1=-x+1+x+1=2$.故选 B.

【解法 2】　由绝对值的几何意义知,$|x-1|$ 表示数 $x$ 所对应的点与数 1 所对应的点之间的距离;$|x+1|$ 表示数 $x$ 所对应的点与数 $-1$ 所对应的点之间的距离;$|x+1|+|x-1|$ 是指 $x$ 点到 1 与 $-1$ 两点距离之和.又因为 $x$ 的绝对值小于 1,即 $-1<x<1$,由图 2-2 知,$|x-1|+|x+1|=2$.故选 A.

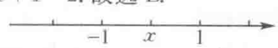



图 2-2

### 知识清单

1. 一个正数的绝对值是它本身,一个负数的绝对值是它的相反数,0 的绝对值是 0.

$$|a|=\begin{cases} a\ (a>0), \\ 0\ (a=0), \\ -a\ (a<0). \end{cases}$$

2. 从数轴上看,$|a|$ 表示数 $a$ 的点到原点的距离;$|a-b|$ 表示数 $a$、数 $b$ 的两点间的距离.

3. 绝对值有如下基本性质:

(1) $|a|\geqslant 0$;

(2) $|a|^2=|a^2|=a^2$;

(3) $|ab|=|a|\cdot|b|$;

(4) $\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|\ (b\neq 0)$;

(5) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;

(6) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

### 规律清单

互为相反数的两数的和为 0.

### 方法视窗

去绝对值的关键是:先判断绝对值里数(式)的正负性,再利用正数的绝对值为它本身,负数的绝对值等于它的相反数,0 的绝对值为 0,进行化简、求值.

【变式题组】 3.(“希望杯”)若 $a<b<0<c<-b$,则 $|a-b|+|c+b|=($　　).

A. $a+b$　　B. $-a-c$　　C. $|a|+c$　　D. $|a-c|$

4.已知有理数 $a$、$b$、$c$ 在数轴上的位置如图 2-3 所示,则 $|a+b|-|b-1|-|a-c|-|1-c|=$________.

图 2-3

5.(2010,华庚杯七年级)互不相等的有理数 $a,b,c$ 在数轴上的对应点分别为 $A,B,C$,如果 $|a-b|+|b-c|=|c-a|$.那么在点 $A,B,C$ 中,居中的点是点________.

## 类型三 与绝对值有关的计算

**例 3** 如果 $|a|=2,|b|=3$,那么 $|a+b|$ 的值等于________.

【学找切入点】 分别求出 $a,b$ 的所有可能值,再分类讨论求值;或利用绝对值的基本性质 $a^2=|a|^2$ 求值.

【解】 因为 $|a|=2$,所以 $a=2$ 或 $a=-2$.因为 $|b|=3$,所以 $b=3$ 或 $b=-3$.

(1)当 $a=2,b=3$ 时,$|a+b|=|2+3|=5$;

(2)当 $a=2,b=-3$ 时,$|a+b|=|2+(-3)|=1$;

(3)当 $a=-2,b=3$ 时,$|a+b|=|-2+3|=1$;

(4)当 $a=-2,b=-3$ 时,$|a+b|=|(-2)+(-3)|=5$.

综上所述,$|a+b|=1$ 或 5.

【变式题组】 6.若 $x$ 的相反数是 3,$|y|=5$,则 $x+y$ 的值为(　　).

A. 8　　B. 2　　C. 8 或 $-2$　　D. $-8$ 或 2

7.若 $|a|=7,|b|=3$,且 $a,b$ 异号,求 $|a+b|-|a-b|$ 的值.

8.(“希望杯”竞赛)如果 $|a|=3,|b|=5$,那么 $|a+b|-|a-b|$ 的绝对值等于__________.

## 类型四 绝对值的非负性

**例 4** 若 $|x-2|+|y+3|=0$,则 $x+y=$________.

【学找切入点】 因为 $|x-2|\geqslant 0,|y+3|\geqslant 0$,所以 $|x-2|,|y+3|$ 中若有一个不为 0(即大于 0),则两者之和不可能为 0.

【解】 $\because$ $|x-2|\geqslant 0,|y+3|\geqslant 0$,而 $|x-2|+|y+3|=0$,

$\therefore$ $|x-2|=0,|y+3|=0$. $\therefore$ $x=2,y=-3$.

$\therefore$ $x+y=2+(-3)=-1$.

【变式题组】 9.若 $|a+2|+|b-1|=0$,则 $|a+2b|$ 的值为(　　).

A. $-4$　　B. $-1$　　C. 0　　D. 4

## 研讨乐园

**例 5** 阅读下面材料:

点 $A$、$B$ 在数轴上分别表示数 $a$、$b$,$A$、$B$ 两点之间的距离表示为 $|AB|$.

当 $A$、$B$ 两点中有一点在原点时,不妨设点 $A$ 在原点,如图 2-4(1),

$$|AB|=|OB|=|b|=|a-b|;$$

当 $A$、$B$ 两点都不在原点时:

①如图 2-4(2),点 $A$、$B$ 都在原点的右边,

$$|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=|a-b|;$$

②如图 2-4(3),点 $A$、$B$ 都在原点的左边,

$$|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=(-b)-(-a)=|a-b|;$$

③如图 2-4(4),点 $A$、$B$ 在原点的两边, .

**思维拓展**

据估计,在科学、事务处理和工业上使用计算机,其四分之一的时间是花在分类问题上的.

——马丁·加德纳

分类讨论的一般步骤:

①确定标准;

②恰当分类;

③逐类讨论;

④归纳结论.

这四个步骤在例 3 中体现得十分明显,同学们好好体会一下“分类讨论”.

但需注意的是,分类并不是越细越好,简洁、充分的分类往往能更快速、准确地解决问题.

**规律清单**

大于或等于 0 的数称为非负数,非负数有以下性质:

①非负数的最小值为 0;

②如果 $n$ 个非负数的和为 0,则每个非负数均为 0.

绝对值是非负数.

**名师支招**

阅读理解题取材广泛,题目的灵活性较大,主要考查学生观察、分析、归纳、抽象、类比等能力.在解答时,需认真仔细地阅读题目,搞清题中各种量的关系、位置或数量特征.在把握本质、理解实质的基础上,作出正确解答.

例 5 较好地体现了数形

$|AB|=|OA|+|OB|=|a|+|b|=a+(-b)=|a-b|$.

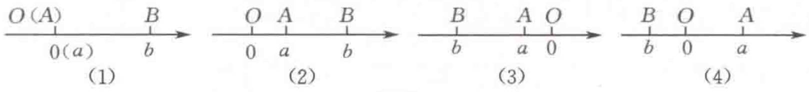



图 2-4

综上,数轴上 $A$、$B$ 两点之间的距离 $|AB|=|a-b|$.

回答下列问题:

(1)数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是________,数轴上表示 $-2$ 和 $-5$ 的两点之间的距离是________,数轴上表示 1 和 $-3$ 的两点之间的距离是________;

(2)数轴上表示 $x$ 和 $-1$ 的两点 $A$ 和 $B$ 之间的距离是________,如果 $|AB|=2$,那么 $x$ 为________;

(3)当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时,相应的 $x$ 的取值范围是________.

**【学找切入点】** 从数轴上可看出 $|a-b|$ 的意义是数轴上表示数 $a$、$b$ 的两点间的距离.

**【解】** (1)3,3,4; (2)$|x+1|$,1 或 $-3$; (3)$-1\leqslant x\leqslant 2$.

**【研讨 1】** 某公共汽车运营线路 $AB$ 段上有 $A,D,C,B$ 四个汽车站,如图 2-5,现在要在 $AB$ 段上修建一个加油站 $M$,为了使加油站选址合理,要求 $A,B,C,D$ 四个汽车站到加油站 $M$ 的路程总和最小,试分析加油站 $M$ 在何处选址最好?


图 2-5

**甲的探究** 设点 $A,B,C,D,M$ 均在数轴上,与之对应的数为 $a,b,c,d,x$,且 $a<d<c<b$.

$MA+MB+MC+MD=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$.

其中 $MA+MB=|x-a|+|x-b|$,由绝对值的几何意义知当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$MA+MB$ 值最小.

同理:当 $c\leqslant x\leqslant d$ 时,$MC+MD$ 值最小.

综上所述,当 $c\leqslant x\leqslant d$ 时,$MA+MB+MC+MD$ 的值最小,即加油站 $M$ 应建在线段 $CD$ 上.

**【研讨 2】** 如果某公共汽车运营线路上有 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5$ 五个汽车站(从左到右依次排列),上述问题中加油站 $M$ 建在何处最好?

**乙的探究** 加油站 $M$ 应建在 $A_3$ 汽车站.

**【研讨 3】** 如果某公共汽车运营线路上有 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 共 $n$ 个汽车站(从左到右依次排列),上述问题中加油站 $M$ 建在何处最好?

**丙的探究** 当 $n$ 为奇数时,加油站 $M$ 应建在 $A_{\frac{n+1}{2}}$ 汽车站处;

当 $n$ 为偶数时,加油站 $M$ 应建在线段 $A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}$ 上.

**【研讨 4】** 根据以上结论,求 $|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-617|$ 的最小值.

**丁的探究** 根据绝对值的几何意义,就是在数轴上找出表示 $x$ 的点,使它到表示 $1,2,\cdots,617$ 各点的距离之和最小.根据【研讨 3】的结论,当 $x=309$ 时,原式的值最小,最小值是 $|309-1|+|309-2|+\cdots+|309-308|+0+|309-310|+\cdots+|309-617|=308+307+\cdots+1+1+2+\cdots+308=95172$.

结合的思想.式子 $|a-b|$ 表示数轴上点 $A(a)$ 到点 $B(b)$ 的距离;式子 $|x+1|$ 表示数轴上点 $A(x)$ 到点 $B(-1)$ 的距离.对于式子 $|x+1|+|x-2|$,我们可以先在数轴上标出式中每个绝对值的零点,即 $-1$,2 对应的点.把数轴分成三个不同的区域:$x<-1$,$-1\leqslant x\leqslant 2$ 和 $x>2$,然后进行分段讨论.

## 规律清单

(1)$|a-b|$ 的几何意义是数轴上表示数 $a$、$b$ 两点间的距离.

(2)如图 2-6,当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,$|x-a|+|x-b|$ 的值最小.

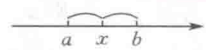



图 2-6

如图 2-7,当 $x=b$ 时,$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的值最小.

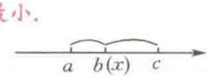



图 2-7

(3)一般地,设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是数轴上依次排列表示有理数的点.

当 $n$ 为奇数时,若 $x=a_{\frac{n+1}{2}}$,则 $|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的值最小;

当 $n$ 为偶数时,若 $a_{\frac{n}{2}}\leqslant x\leqslant a_{\frac{n}{2}+1}$,则 $|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的值最小.

# 能力平台

## 基础训练

1. (2010,宜昌)如图 2-8,数轴上 $A$,$B$ 两点分别对应实数 $a$,$b$,则下列结论正确的是(　　).

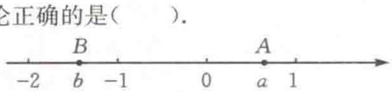



图 2-8

A. $|a|>|b|$　　B. $a+b>0$

C. $ab<0$　　D. $|b|=b$

2. $a$,$b$ 在数轴上的位置如图 2-9 所示,则在 $a+b$,$b-2a$,$|a-b|$,$|b|-|a|$ 中负数的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

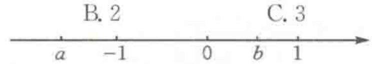



图 2-9

3. 若 $|x|=2$,则 $x=$________;若 $|-x|=2$,则 $x=$________.

4. 绝对值小于 5 的整数有________个.

5. 最大的负整数是________，绝对值最小的数是________，绝对值最小的正整数是________，绝对值最小的负整数是________.

6. 在数轴上表示$+7,-1,0,0.5,-\frac{7}{2}$.

(1)比较这些数的大小，用“<”连接；

(2)求这些数的相反数，并将这些相反数用“<”连接；

(3)求这些数的绝对值，并将这些绝对值用“>”连接.

## 培优训练

7. (1)若$|x-3|=1$，则$x=$________；

(2)若$|a|=a$，则$a$________0；

若$|a|=-a$，则$a$________0；

若$|-a|=-a$，则$a$________0.

8. (1)若$|a|=5,b=-2$，且$ab>0$，则$a+b=$________；

(2)若$|m-n|=n-m$，且$|m|=4,|n|=3$，则$m+n=$________.

9. 若$|x-2|$与$|y+7|$互为相反数，则$x=$________，$y=$________.

10. 若$2|3a-2b|+(4b-12)^2=0$，则$a=$________，$b=$________.

11. (江苏竞赛)如图2-10，在一条笔直的公路上有7个村庄，其中$A,B,C,D,E,F$离城市的距离分别为4，10，15，17，19，20千米，而村庄$G$正好是$AF$的中点.现要在某个村庄建一个活动中心，使各村到活动中心的路程之和最短，则活动中心应建在(　　).

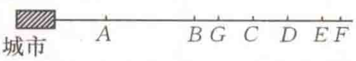



图 2-10

A. $A$处　　B. $G$处　　C. $C$处　　D. $E$处

12. (1)若$ab\neq0$，则$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$不能等于$-2,0,1,2$这四个数中的(　　).

A. $-2$　　B. 0　　C. 1　　D. 2

(2)(2009，“希望杯”竞赛)若$abc\neq0$，则$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$的最大值是________，最小值是________.

13. (1)已知$|a|=4,|b|=3$，且$a$、$b$异号，求$|a+b|-|a-b|$的值.

(2)若$|a|=21,|b|=27$，且$|a+b|=-(a+b)$，求$a-b$的值.

14. 计算下列各式，将结果直接写在横线上：

$|2-3|=$________；$3-2=$________；

$\left|\frac{1}{2}-5\right|=$________；$5-\frac{1}{2}=$________；

$\left|\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right|=$________；$\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=$________.

通过上面几题，你能解决下面的问题吗？

(1)比较上面三组式子的结果，如果设$a$、$b$为有理数，$|a-b|$一定等于$b-a$吗？如果不是，你能举出几个反例吗？

(2)计算：

①$\left|\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right|=$________；(用两个分数差表示即可)

②$|x-1|=$\_\_\_\_\_\_\_\_；$(x\geqslant1)$

③$|x-1|=$\_\_\_\_\_\_\_\_.$(x<1)$

(3)计算：$\left|\frac{1}{2012}-\frac{1}{2011}\right|+\left|\frac{1}{2011}-\frac{1}{2010}\right|+\left|\frac{1}{2010}-\frac{1}{2009}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{2}-1\right|$.

## 自主招生

15. (“希望杯”培训)有如下4个判断性语句：①符号相反的数互为相反数；②任何有理数的绝对值都是非负数；③一个数的相反数一定是负数；④如果一个数的绝对值等于它本身，那么这个数是正数.其中正确的有(　　)个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

16. 数$a$在数轴上位置如图2-11所示，那么$a,-a,\frac{1}{a},\left|-\frac{1}{a}\right|$大小顺序为________.(用不等号连接)

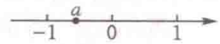



图 2-11

17. (2009，“希望杯”竞赛)如果有理数$a,b$使得$\frac{a+1}{b-1}=0$，那么(　　).

A. $a+b$是正数　　B. $a-b$是负数

C. $a+b^2$是正数　　D. $a-b^2$是负数

18. 如图2-12，在环形运输线路上有$A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$ 6个仓库，现有某种货物的库存量分别为50吨、84吨、80吨、70吨、55吨和45吨.要对各仓库的存货进行调整，使得每个仓库的存货相等，但每个仓库只能向相邻的仓库调运，并使调运的总量最小.求各仓库向其他仓库的调运量.

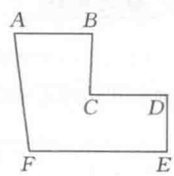



图 2-12

# 第3讲　有理数的加减乘除运算

## 与大师对话

华罗庚

华罗庚(1910—1985),世界著名数学家,中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论等多方面研究的创始人和开拓者.国际上以华氏命名的数学科研成果就有"华氏定理"、"怀依—华不等式"、"华氏不等式"、"普劳威尔—加当华定理"、"华氏算子"、"华—王方法"等.

**算一算**

华罗庚说,只要踏进数学花园的大门,你们随时随地都会发现数学中有许许多多有趣的东西.下面是他喜爱的"极简单的例子":

我家有9个人,每人每天吃半两油,一个月(以30天算)共吃几斤几两油?(注:当时使用的是一斤十六两制)请你先试一试.

**[解法1]**　列出算式 $0.5\times9\times30\div16$,计算得 $8\frac{7}{16}$,即共吃油8斤7两.

**[解法2]**　动一动脑筋,很容易心算得:每人每天半两,每人每月不是一斤差一两吗?九人每月吃油就是九斤差九两,即八斤七两.

如果一个月按31天算,解法2就更显得比解法1好,既快又方便.华罗庚说:"比较一下,就知道数学是个怎样有趣、怎样活泼的一门科学了."

**大师寄语**

见繁即变,见简即用.
不拘一法,乃为通术.
——沈括

## 典例剖析

**类型一　有理数的加减乘除混合运算**

**例1**　计算:(1) $-\frac{4}{9}\times3-4\div\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{3}+8\times\left|-\frac{9}{4}\right|$;

(2) $-16-\left(0.5-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{3}\times[-2-(-27)]-\left|\frac{1}{8}-0.52\right|$.

**【学找切入点】**　混合运算的关键是运算符号、运算顺序和灵活地运用运算律.

**【解】**　(1)原式 $=-\frac{4}{9}\times3-4\times\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{5}{3}+8\times\frac{9}{4}$

$=-\frac{4}{3}+\frac{100}{9}+18=\frac{88}{9}+18=27\frac{7}{9}$;

(2)原式 $=-16-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\times3\times(-2+27)+\frac{1}{8}-0.52$

$=-16+\frac{1}{6}\times3\times25+0.125-0.52$

$=-16+12.5+0.125-0.52=-3.895$.

**【变式题组】**　1.计算:(1) $0.75+\frac{1}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)$;

(2) $-\frac{22}{7}\times\left(\frac{22}{7}-\frac{4}{3}\right)\times\frac{7}{22}\div\left(-\frac{22}{21}\right)$.

**类型二　乘法分配律的运用**

**例2**　计算:(1) $\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times(-20)$;

**规律清单**

(1)若有理数 $a$、$b$ 互为相反数,则 $a+b=0$.

若有理数 $a$、$b$ 互为倒数,则 $a\cdot b=1$.

(2)由于相反数的引入,加减法可以统一为加法;由于倒数的引入,乘除法可以统一为乘法;由于绝对值的引入,有理数的运算可以转化为小学的加减乘除和确定运算结果的符号问题.

**方法视窗**

有理数的混合运算,应注意以下运算顺序:

(1)先算乘方,再算乘除,最后算加减;

(2)同一级运算,从左算到右;

(3)如有括号,先做括号内的运算,按小括号、中括号、大括号依次进行.

(2)$(-3.59)\times\left(-\frac{4}{7}\right)-2.41\times\left(-\frac{4}{7}\right)+6\times\left(-\frac{4}{7}\right)$;

(3)$3\frac{2011}{2012}\times(-1006)$.

【学找切入点】 (1)直接利用乘法分配律 $a(b+c)=ab+ac$;(2)逆用乘法分配律,将$-\frac{4}{7}$提到括号外;(3)将$3\frac{2011}{2012}$转化为$\left(4-\frac{1}{2012}\right)$,从而构造成乘法分配律的模式,进而再利用乘法分配律计算.

【解】 (1)原式$=\frac{4}{5}\times(-20)-\frac{3}{4}\times(-20)+\frac{1}{2}\times(-20)=-16+15-10=-11$;

(2)原式$=\left(-\frac{4}{7}\right)\times(-3.59-2.41+6)=\left(-\frac{4}{7}\right)\times0=0$;

(3)原式$=\left(4-\frac{1}{2012}\right)\times(-1006)=4\times(-1006)+\left(-\frac{1}{2012}\right)\times(-1006)$

$=-4024+\frac{1}{2}=-4023\frac{1}{2}$.

【变式题组】 2. 计算:(1)$(-36)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)$;

(2)$-5\times\left(+7\frac{1}{3}\right)+7\times\left(-7\frac{1}{3}\right)+12\times\left(-7\frac{1}{3}\right)$;

(3)$57\times\frac{55}{56}+27\times\frac{27}{28}$.

方法视窗

运用分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 常用三种方法:

(1)直接运用,做到各项"都"乘;

(2)逆用运用,先"提"后算;

(3)构造分配律,注意模式.

## 类型三 有理数的巧算中的凑整法、分组法、倒序相加法

**例3** (广西竞赛)计算:$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+\cdots+\frac{58}{60}+\frac{59}{60}\right)$.

【学找切入点】 观察每个括号内结果的特点.

【解法1】 原式$=\frac{1}{2}+1+1.5+2+\cdots+29.5=\frac{(0.5+29.5)\times59}{2}=885$.

【解法2】 原式$=0.5+1+1.5+2+\cdots+29.5$

$=(0.5+1.5+\cdots+29.5)+(1+2+\cdots+29)$

$=\frac{(0.5+29.5)\times30}{2}+\frac{(1+29)\times29}{2}=885$.

【解法3】 设原式之和为 $s$,对每个括号内的各项都倒写相加,显然其和不变,即

$s=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{59}{60}+\frac{58}{60}+\frac{57}{60}+\cdots+\frac{2}{60}+\frac{1}{60}\right)$.

将原序和倒序相加,其相应两项之和为1,则有

$$2s=1+2+3+4+\cdots+59=\frac{(1+59)\times59}{2}=30\times59,$$

$$\therefore\ s=15\times59=885.$$

【变式题组】 3. 计算:$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2010}+\frac{3}{2010}+\cdots+\frac{2009}{2010}\right)$.

名师支招

计算时需要观察规律,本例三种解法分别从三个角度着眼:

解法1是配成59个"对子";

解法2是分组;

解法3是倒序与正序的综合运用.

上述三种解法在计算中的运用十分广泛.

## 类型四　有理数的巧算中的拆项法

**例4**　(2011,济宁)观察下面的变形规律:

$$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2};\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\cdots$$

解答下面的问题:

(1)若 $n$ 为正整数,请你猜想 $\frac{1}{n(n+1)}=$________;

(2)证明你猜想的结论;

(3)求和:$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2009\times2010}$.

【学找切入点】　观察变形的规律:每一个分数的分子都是1,分母是相邻两个整数的积.根据这一特点可以把每一个分数拆成两个分数之差,这样从第二项起,每一项与后面相邻一项正负相抵,只剩下第一项和最后一项之差.

【解】　(1)$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

(2)证明:$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$.

(3)原式$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2010}=\frac{2009}{2010}$.

【变式题组】　4.(2010,赤峰)观察式子:$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\cdots$.由此计算:$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{2009\times2011}$.

5.(2010,淮安)观察下列各式:

$1\times2=\frac{1}{3}(1\times2\times3-0\times1\times2)$,

$2\times3=\frac{1}{3}(2\times3\times4-1\times2\times3)$,

$3\times4=\frac{1}{3}(3\times4\times5-2\times3\times4)$,

…

计算:$3\times(1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100)=$(　　).

A. $97\times98\times99$　　B. $98\times99\times100$　　C. $99\times100\times101$　　D. $100\times101\times102$

6.(2011,城市杯)计算:$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}=$________.

## 类型五　数字谜

**例5**　(第15届"希望杯")如下表,在3×3的方格表中填入九个不同的正整数:1,2,3,4,5,6,7,8和 $x$,使得各行、各列所填的三个数的和相等,请确定 $x$ 的值,并给出一种填法.

表1

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | $x$ |
| | | |

表2

| | | |
|---|---|---|
| | | $c$ |
| $a$ | $b$ | $x$ |
| | | $d$ |

表3

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 8 | 1 |
| 2 | 4 | 9 |
| 7 | 3 | 5 |

【学找切入点】　分析整体信息可知:表中各行、各列三数之和是相等的正整数,则 $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+x}{3}=12+\frac{x}{3}$.分析与 $x$ 有关的交叉信息,可恰当引进不同字母表示

**方法视窗**

形如 $\frac{1}{n(n+1)}$ 的分式可拆成 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 的形式,这样拆项抵消是分式计算中的常用技巧,而更一般的形式为:

① $\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$;

② $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

那么,聪明的你,能推出以下这个式子的拆法吗?

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=?$

**思维拓展**

该题就是著名的"九宫格"游戏,最早起源于中国古代的《河图洛书》,就连小说《射雕英雄传》都记有其破解口诀:戴九履一,右三左七,二四为肩,六八为足.这样填出来的结果如下表所示.