金·融·计·量

国家社会科学基金资助项目

金融计量与资产组合计算——基于R平台

孟勇 ◎ 著

中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

金·融·计·量

国家社会科学基金资助项目

金融计量与资产组合计算——基于R平台

孟勇◎著

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

金融计量与资产组合计算 ：基于R平台 / 孟勇著
. -- 北京 ：人民邮电出版社，2015.6
ISBN 978-7-115-39122-3

Ⅰ．①金… Ⅱ．①孟… Ⅲ．①金融—计量经济学—研究②金融—数值计算—研究 Ⅳ．①F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第086017号

内 容 提 要

本书讲述 R 软件在金融计量尤其是金融三大支柱之一的资产组合方面的应用。首先详细地介绍了马尔克维茨和布莱克-里特曼资产组合模型，然后重点讲述 R 在计量经济、金融计量和资产组合计算中的函数，并通过实际的股市数据，采用行为金融观点计算比较了马尔克维茨模型和布莱克-里特曼资产组合模型。

本书内容理论与实证相结合，层次性强；函数讲解翔实，工具性强；语言简洁精练，可读性强。通过阅读学习本书，不但可以学习资产组合理论，而且可以进行实战操作应用。

◆ 著　　　孟　勇
　责任编辑　武恩玉
　执行编辑　刘向荣
　责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京京华虎彩印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：14.25　　　　2015 年 6 月第 1 版
　字数：330 千字　　　2015 年 6 月北京第 1 次印刷

定价：59.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

序言 FOREWORD

金融计量——一生的职业

金融计量已经成为近二十年来经济学领域最活跃的研究分支，2014 年诺贝尔奖的颁发再次证明了这一点。Eugene Fama（尤金•法玛）在《Financial Analysts Journal》(《金融分析师杂志》）上发表了文章《Random Walks in Stock Market Prices》(《股票市场价格随机游走》)。在这篇文章中，第一次提到了 Efficient Market（有效市场）的概念，其实有效市场理论的核心是人的心理对市场没有实质作用，即使有作用也是完全随机的并可以相互抵消的。该理论认为人是理性的，可以洞察证券价格的真实价值，即使有偏离也可以马上调整过来。这也就意味着股票市场在短期内是不可能被预测的。随后十几年大量经济学家对此进行研究实证，大量结果支持了有效市场假说，实证上的支持似乎给人一种印象，股票市场时间无论长短都是不可能预测的。但是到了 20 世纪 80 年代，Robert.Shiller（罗伯特•席勒）发现了与前十几年的主流认识形成鲜明对照的经济事实，即股票长期趋势是可以预测的，而且经过几年以后，股票价格波动要远远高于公司分红。实际上就验证了股票市场从长期来看并不是有效的。

两派的争论都大量使用了金融计量方法，证明金融市场不再是不可预测的，而是可以预测的。金融计量的一大核心任务就是预测金融市场的波动及证券资产的价格。所以本书所研究的技术将是对金融市场感兴趣的人最重要的研究和应用工具。通过对于金融模型的实际操作与计算，将会大大加深人们对于金融市场规律的认识。

金融计量经济学是计量经济学的一个分支，它是以经济理论为基础，运用统计与数学工具研究金融现象及其变化规律的一门学科。与宏观和微观计量经济学不同的是，它偏向于金融方向。金融计量经济学已经成为计量经济学领域最活跃的方向之一。在金融领域就业以及不菲的收入已经成为许多学生心中的向往。各大高校学习金融的人数以及开设金融学课程的学校大幅增加，很多学生都在学金融学课程。因此，学生背景多元化是金融学习领域的主要特色，理工科学生具备良好的数学背景，但是缺乏对金融基本知识的掌握；金融学生对金融概念有精湛的理解，但是统计计算能力欠缺。

金融课程的学习离不开金融计算，金融计算是学习、理解和掌握金融的基础和必备能力。我认为目前在国内还没有很优秀的书籍能够同时满足这两方面的需求。本书尝试从几个方面解决目前这些问题。

（1）目前金融计量方面的书籍基本分为两类：一类是纯属介绍理论的，这类书籍集中于介绍金融模型理论，很少涉及模型计算与解释，因此不适合缺乏计算工具知识的学生；另一类是导论性质的，这类书籍适合于统计和数学基础非常有限的学生，书中讨论的模型很浅

显，大量的篇幅集中于最基本的金融与统计模型的介绍与计算，应用范围非常有限。本书计划在简要介绍金融计量理论的基础上，更加注重金融计量模型的计算，以弥补上述不足。

（2）本书注重金融计量技术的应用与可视化操作，不仅介绍理论，便于学习者从理论上理解数学和统计技术，而且更注重数据的可视化操作及建模过程的计算与操作，便于学习者将建模技术应用于金融建模中。本书的重点就是向读者介绍金融领域是如何应用计量经济技术的。

（3）本书使用开源的 R 编程语言，估计金融模型参数，全书围绕一个金融市场的核心问题——如何构建资产组合，从数据获取到最后构建一个合理的资产组合，以问题引出解决方法，通过一个非常系统的方式分析现实金融市场数据，求解金融市场的实际问题。

本书适合于本科生、研究生、高校教师以及广大热爱金融的金融理论与实务学习与实践人员。本书将为以上人员介绍应用广泛的计量经济技术，而且要与金融理论紧密结合，全书围绕一个一个核心主题，系统介绍计量经济方法与软件应用。本书还可应用金融学、证券投资、计量经济本科生和研究生的时间序列及计量经济学课程。

为了尽可能为绝大多数读者所接受，本书尽可能降低统计及数学方面推导的难度，读者只要具备初等的微积分、矩阵代数及基础统计学知识即可。本书将对金融投资方面的现代投资组合理论、资本资产定价模型、套利定价理论、有效市场假说金融市场理论及投资学基础知识做必要介绍，本书重点在于金融模型的计算及分析。这方面详尽的知识需要参阅更经典的教材。

孟勇 E-mail：m7025y@163.com

前 言 FOREWORD

R 是一种用于数据分析和绘图的语言和操作环境，是基于 S 语言的一个 GNV 项目。S 语言是一种自 20 世纪 70 年代末期以来由贝尔实验室首先研发的备受赞誉的语言。R 项目在 20 世纪 90 年代初期由新西兰的奥克兰大学的 Robert Gentleman（罗伯特•金特曼）和 Ross Ihaka（罗斯•哈克）发起并且自 1997 年中期以来由一个国际团队进一步发展。R 在计量经济学领域有着很大的潜力，不管是在研究方面还是在教学方面。至少有三个原因可以说明这一点：（1）R 主要是独立的平台，并且兼容 Microsoft 窗口、Mac 家族的操作系统、不同风格的 Unix/Linux 操作系统。（2）R 是可以从全世界许多镜像站点通过 R 档案网（CRAN）免费下载和安装，学习者可以容易地将 R 安装在计算机上。（3）R 是开放源代码的软件，所有源代码都可免费获得，通过源代码可以从中学习模型并改变和扩展模型。平台的独立性和开放的源代码使 R 成为用于可复制的金融计量研究的理想环境。

本书讲解了用 R 进行计量经济学计算的方法。但它不是一本计量经济学教材。读者最好在阅读之前已经修过一些入门的计量经济学课程，但不必是使用了很多矩阵的课程。本书假定读者一定程度上熟悉矩阵符号，尤其是回归模型的矩阵表述。因此，本书充分强调运用和实践，适合作为基于初级或中级水平的读者使用。本书使用了实际的股市数据集合，给出了模型计算的详细程序和绘图程序。因为绘图是用于统计计算和绘图的 R 系统的优势之一。因此，我们决定自始至终大量利用图形表示，其中一些图形可能并不为人所知。本书还介绍了一些 R 基础知识（尤其是数据结构、图形和编程的基本知识），使得本书更加完整。

本书由国家社会科学基金项目“关于主观资产组合模型的行为金融理论建构与方法研究”资助，项目编号：11BJY013。

编　者

目 录 CONTENTS

第1章 导论

1.1 金融计量与资产组合

广义上讲，金融计量是研究与金融相关的数量问题的。金融计量使用统计技术和经济理论去处理金融问题，当然要大量利用计算机技术去实现。统计方面包括构建金融模型，估计模型参数，对参数进行推断，基于风险的利润调整，估计波动，模型的模拟计算等；金融理论方面包括风险管理，资本资产定价、资产组合，套利策略等。金融数据分析是现代金融学中实证研究核心，也是金融理论研究的基础。股票、债券、期权、期货、外汇等一直是金融研究与实证的主题，其中涉及到金融资产收益率、汇率、利率、通货膨胀率等变量的建模和计算。金融数据分析主要涉及时间序列数据，本书主要介绍了金融建模，特别是模型的计算、检验与预测。金融建模不但有基础性的计量经济模型，更有高端的金融建模的介绍及计算。计算的工具主要是 R，希望通过本书学习者能很快掌握金融计算的基本技能，为将来进一步深入研究与学习奠定扎实的基础。资产定价与资产组合无疑是构建现代金融的基石，本书以资产组合为终极目标，从加入主观观念的资产组合构建的过程建立金融计量的一个实证体系；从资产组合构建的过程学习计量的理论与方法，尤其是计算与实现问题。从构建资产组合这个实际问题出发，读者可以举一反三，带着问题去学习金融计量，能很大程度减少理论的枯燥，也能极大地增强学习效果。

1.2 资产组合模型

本书以经典的马尔科维茨资产组合模型为基础，首先构建与计算马尔科维茨模型，然后在此基础上，构建 Black-Litterman（布莱克-利特曼）资产组合模型。这两个资产组合模型的构建是非常复杂的一个过程，其中涉及了大量的数据处理与统计计算。本书主要考虑两个实证案例，一个是以经典理性模型假设为基础的马尔科维茨模型，另一个是考虑投资人主观观念的 Black-Litterman 投资组合模型。通过这两个模型的计算，读者可以比较深入地掌握金融计量的计算技巧和方法。

1.2.1 马尔科维茨模型简介

马尔科维茨模型本身是一个规划问题，为求解最优权重，我们需推演下面的线性规划

问题：

$$\begin{aligned} &min: w'\Sigma w \\ &s.t\ \ w'r = r_p \end{aligned} \tag{1.1}$$

或者是

$$\begin{aligned} &max\ \ w'r \\ &s.t.\ w'\Sigma w = \sigma_p^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

或者是求解非线性的二次规划问题：

$$max\ \ w'\mu - \frac{\delta}{2} w'\Sigma w \tag{1.3}$$

最后求得的最优权重是：

$$w^* = (\delta\Sigma)^{-1}\mu$$

其中，

w：资产组合权重；

w^*：最优权重；

δ_p^2：资产组合方差；

r：个别资产收益；

r_p：资产组合预期收益；

μ：预期收益；

Σ：协方差矩阵；

δ：风险规避系数；

1.2.2 Black-Litterman 模型简介

Black-Litterman 模型能被概括为下列最优化问题：

$$\begin{aligned} &min\,(E(R)-\Pi)\tau\Sigma^{-1}(E(R)-\Pi)' \\ &s.t.\ \ P\times E(R)' = Q \end{aligned} \tag{1.4}$$

求解这个非线性规划问题可得 Black-Litterman 预期收益

$$E(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q] \tag{1.5}$$

最后利用 Black-Litterman 预期收益结果求解最优权重：

$$\begin{aligned} &max\ \ w'E(R) \\ &s.t.\ w'\Sigma w \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中，

$E(R)$：Black-Litterman 预期收益；

Π：Black-Litterman 均衡收益；

τ：协方差比例因子；

P：观点权重；

Q：观点收益；

（1）若投资者对自己的看法 100%信任，该问题的解（新的组合利润）由下式给出：

$$\overline{E(R)} = \Pi' + \tau\Sigma P'[P\tau\Sigma P']^{-1}[Q - P\Pi'] \tag{1.7}$$

当观点不确定时，解（新组合利润向量 $\overline{E(R)}$）变成了

$$\overline{E[R]} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q] \tag{1.8}$$

其中，

$\overline{E(R)}$：新组合收益率向量（n×1 列向量）

τ：比例尺度

Σ：收益率协方差矩阵（n×n 矩阵）（来自 CAPM）

P：投资者看法所涉及的资产的标示矩阵（k×n 矩阵）

Ω：表征投资者看法的置信度的误差的对角协方差矩阵（k×k 矩阵）

Π：隐含均衡收益率向量（n×1 列向量）（来自 CAPM）

Q：投资者看法向量（k×1 列向量）

（2）当没有任何看法时，$P'\Omega^{-1}P$ 和 $P^{-1}\Omega Q$ 这两项等于零，那么 $\overline{E(R)} = \Pi$，一个单位矩阵 P 表示观点是绝对的（针对相对观点而言），本文认为投资者观点是相互独立的，因此 Ω 的非对角线元素都是零。

两个数学模型的显著区别是马尔科维茨模型没有加入主观观念，但是，Black-Litterman 模型加入了投资者的主观观念，从数学角度讲是对方差协方差矩阵进行了加权处理，使之倾向于主观观念矩阵。从最优结果看，Black-Litterman 模型求解的预期收益实际上是主观观念收益与马尔科维茨模型收益的加权平均。由于有了主观观念的加入就使所得结果更趋于合理。

1.3 资产配置模型及关键指标计算方法

资产组合的配置就是在一个投资组合中选择资产的类别并确定其比例的过程。资产的类别有两种，一种是实物资产，如房产、艺术品等；一种是金融资产，如股票、债券、基金等。当投资者面对多种资产，考虑应该拥有多少种资产、每种资产各占多少比重时，资产配置的决策过程就开始了。

由于各种资产往往有着截然不同的投资性质，投资的事实证明在相同的市场条件下资产的收益有不同的反应，当某些资产的价值下降时，另外一些可能在升值。马尔科维茨的均值方差资产组合方法说明，将投资资本分散投资到收益方向不同的资产中去，可以部分或全部填平在某些资产上的亏损，从而减少整个投资组合的波动性，使资产组合的收益趋于稳定，也就是风险减到最小。

资产配置首先要确定投资范围，然后需要预测各种不同资产的价格，收益率、标准差和相关性，并运用这些变量进行均值-方差最优化，从而选择不同风险收益率的资产组合。关于

这些专业的分析和计算，已有大量理论和工具。从马科维茨到夏普到米勒，从现代投资组合理论到有效市场理论到资本资产定价理论，20 世纪中期以来，金融学家已为充满不确定性的世界刻画出许多投资组合模型。本书就是基于马尔科维茨资产组合模型以及 Black-Litterman 资产组合模型展示全部金融计量的计算过程及结果。

1.3.1 资产价格预测模型

经典的资产组合方法要求对全部交易资产进行选择。这里资产指的是一切负债工具、普通股股票、期权、期货、优先股、房地产、收藏品等。资产选择的主要依据是按照资产的价格，在构建资产组合时，首先要对资产收益进行预测。资产价格或者收益的预测一般使用如下的模型。

1．资本资产定价模型

（1）资本资产定价模型概述

资本资产定价模型（Captial Asset Pricing Model，简称为 CAPM）由美国学者 Sharpe（夏普）在 1964 年提出的。CAPM 模型以证券组合理论为基础，主要是分析了风险和收益的关系。在均衡状态等一系列假设条件下，可以推导出 CAPM 模型的具体形式：

$$E(r_i)-r_f=\beta_i(E(r_m)-r_f) \tag{1.9}$$

$$\beta_i=Cov(r_i,r_m)/Var(r_m)=\sigma_{im}/\sigma_m^2 \tag{1.10}$$

其中 $E(r_i)$表示证券 i 的期望收益，$E(r_m)$为市场组合的期望收益，r_f为无风险资产的收益，$\sigma_{im}=Cov(r_i,r_m)$为证券 i 收益率和市场组合收益率的协方差，$\sigma_m^2=Var(r_m)$为市场组合收益率的方差。

注意：β 表示了某只证券相对于市场组合的风险度量。任何无风险资产的 β 值也一定为零。同时任何 β 值为零的资产的期望回报率也一定为零。如果 β 值为 1，则该资产的期望回报率一定等于市场有效组合的期望回报率。β 值越高，投资于该证券所获得的预期收益率就越高；反之，投资于该证券所获得的预期收益率就越低。

CAPM 模型认为，在均衡条件下，投资者所期望的收益和他所面临的风险的关系可以通过资本市场线（Capital Market Line，简称为 CML）、证券市场线（Security Market Line，简称为 SML）和证券特征线（Characteristic Line，简称为 CL）等公式来说明。

① 资本市场线：

$$E(r_p)=r_f+\sigma_p/\sigma_m(E(r_m)-r_f) \tag{1.11}$$

该公式表示了证券有效组合 p 的风险 σ_p 与该组合的预期收益率 $E(r_p)$关系。

② 证券市场线：

$$E(r_i)=r_f+\beta_i(E(r_m)-r_f) \tag{1.12}$$

该公式表示了证券 i 与市场组合 m 的协方差风险 β_i 与该证券的预期收益率 $E(r_m)$之间的关系。

③ 证券特征线：

$$E(r_i)-r_f=\beta_i(E(r_m)-r_f) \tag{1.13}$$

该公式表示了证券的超额预期收益率与市场超额预期收益率之间关系的表达式。

（2）CAPM 实证检验的三种方法。

CAPM 模型的检验是资产组合模型的一个关键部分，检验方法主要有三种。

第一种检验方式是 Sharpe-Lintner（夏普-林特纳）检验法。检验模型是：

$$R_{it}-\theta=\alpha+\beta_i(r_{Mt}-\theta)+\varepsilon_{it}, \quad t=1, 2, \cdots T, \ i=1, 2, \cdots N \tag{1.14}$$

通过最小二乘法就可以得到 CAPM 模型参数 α，β，Σ（分别是截距项、斜率项和标准差）的估计值 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\Sigma}$。在已知样本数据条件下利用对估计量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\Sigma}$ 对市场是否满足 CAMP 模型进行假设检验，检验的原假设是：$H_0:\alpha=0$。

如果已知 Σ，在服从原假设条件下构建 Wald 统计量进行检验：

$$t_1=\hat{\alpha}'\Sigma^{-1}\hat{\alpha}(T(1+\bar{z}_M^2/S_M^2)^{-1})\sim\chi^2(N) \tag{1.15}$$

如果未知 Σ，在服从原假设条件下构建 T 统计量检验：

$$T^2=\widehat{\alpha'}\Sigma^{-1}\hat{\alpha}(T(1+\bar{z}_M^2/S_M^2)^{-1})\sim\chi^2(N) \tag{1.16}$$

第二种检验方式是在不使用无风险收益率条件下的 BJS（Black，Jensen and Scholes（布莱克，詹森和斯科尔斯），1972）检验。该检验使用的模型仍然是第一种检验方法使用的模型，只是检验使用的数据和抽样方法改变了。方法使用了分段回归。BJS 认为由于误差项横断面可能存在相关性，构造 t 统计值是无效的，样本期内 β 可能是非平稳的，因此当利用大量股票信息估计单个 CAPM 模型是一个非有效的方法。BJS 方法改进了检验法。BJS 方法是将所有股票十等分，构成 10 个投资组合，分别估计各投资组合的 α 和 β，通过 BJS 方法估计得到的参数标准差消除了误差项可能存在相关性的影响。每隔 5 年估计一次 β 值，避免 β 值的非平稳性。

第三种检验方式是 FM-CAPM 检验方法（Fama and MacBeth（法玛，麦克白），1973）。该方法认为 CAPM 模型指预期报酬与风险间存在着线性关系，能用于解释横截面预期报酬。Fama and MacBeth（1973）构建的 CAPM 模型是：

$$E(R_i)=E(R_0)+\beta_i(E(R_m)-E(R_0)) \tag{1.17}$$

其中：R_0 为零贝塔证券报酬，与市场投资组合报酬无关。式（1.17）表明证券 i 的预期报酬是零贝塔证券预期报酬加风险报酬，R_m 为所有股票等权重的报酬。如果 CAPM 成立，那么预期报酬与风险间存在着线性关系，β_i 是对股票 i 风险的度量，高风险高报酬，FM 提出用下面的模型检验 CAPM：

$$R_{it}=\gamma_{0t}+\gamma_{1t}\beta_i+\gamma_{2t}\beta_i^2+\gamma_{3t}s_i+\eta_{it} \tag{1.18}$$

其中，R_{it} 为 t-1 期至 t 期股票 i 的报酬，s_i 为股票 i 的非系统性风险（与 β_i 无关），β_i 为股票 i 的系统性风险，η_{it} 为均值为 0，并与其他变量独立的随机变量。

关于 CAPM 的检验有 3 种假说：

假说 1：$E(\gamma_{2t})=0$，这意味着预期报酬与风险间存在着线性关系。

假说 2：$E(\gamma_{3t})=0$，这意味着非系统性风险对预期报酬无影响。

假说 3：$E(\gamma_{1t})>0$，即风险报酬大于 0。

检验 3 种假说使用线性回归模型系数显著性检验方法。

2．ARIMA（p，d，q）（单整自回归移动平均模型）

由差分算子定义：

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = x_t - Lx_t = (1-L)x_t$$
$$\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = (1-L)x_t - (1-L)x_{t-1} = (1-L)^2 x_t$$
$$\Delta^d x_t = (1-L)^d x_t$$

可推出：如果$x_t \sim I(d)$是d阶单整序列，那么序列w_t是平稳序列：

$$w_t = \Delta^d x_t = (1-L)^d x_t$$

由w_t建立 ARMA（p，q）模型，对于x_t被称为 ARIMA（p，d，q），其中p为自回归项滞后阶数，q为移动平均滞后阶数，d为单整阶数，ARIMA 模型的形式是：

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \cdots + \phi_p w_{t-p} + \delta + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots + \theta_q u_{t-q}$$
$$\Phi(L)\Delta^d x_t = \delta + \Theta(L)u_t \tag{1.19}$$

3．ARCH 和 GARCH 模型

Engle（恩格尔，1982）提出自回归条件异方差模型（AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity，简称为 ARCH）。由均值方程式（1.20）和条件方差方程式（1.21）构成 ARCH（q）模型：

$$y_t = x_t\beta + \varepsilon_t \tag{1.20}$$

ε_t的无条件方差是常数，但是其条件分布为

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0,\ \sigma_t^2)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \tag{1.21}$$

其中ψ_{t-1}是信息集。

方程（1）是均值方程，σ_t^2是条件方差，含义是基于过去信息的一期预测方差；方程（2）是条件方差方程（Conditional Variance Equation），由二项组成：常数ω与 ARCH 项ε_{t-i}^2（滞后的残差平方）

当 q 较大时，采用 Bollerslov（波莱斯勒夫，1986）提出的广义自回归异方差模型（Generalized ARCH，简称为 GARCH），GARCH 模型也是由均值方程和条件方差方程构成，均值方程与 ARCH 相同，但是条件方差方程定义为：

$$\sigma_t^2 = \omega + \Sigma_{i=1}^{q}\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \Sigma_{j=1}^{p}\beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{1.22}$$

其中σ_{t-j}^2为过去的条件方差即预测方差（Forecast Variance）。

1.3.2 资产风险的度量方法

资产风险是指风险资产的价格或收益率的不确定性。对资产未来收益不确定性的度量就是风险度量（Risk Measure）。度量风险的标准有很多，最主要的风险度量标准有以下几种。

1．方差

方差$Var(R)$是最常用的风险度量标准，度量公式是：

$$\hat{\sigma}_1^2 = Var(\hat{R}_i) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(r_{it} - r_i)^2 \tag{1.23}$$

或者修正样本方差：

$$\hat{\sigma}_1^2 = Var(\hat{R}_i) = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(r_{it} - r_i)^2 \tag{1.24}$$

2．下沿风险测度

（1）下沿风险测度（Downside Risk Measure）主要采用 n 阶下偏矩，假设资产 X 收益的分布函数是 $F_X(x)=P\{X\leqslant x\}$，q 为目标收益率，n 阶下偏矩为：

$$LPM_n(q)=\int_{-\infty}^{q}(q-x)^n \mathrm{d}F_X(x) \tag{1.25}$$

（2）二阶下偏矩（或半方差）（Second Order Lower Partial Moments，SLPM）：

$$SLPM(q)=\int_{-\infty}^{q}(q-x)^2 \mathrm{d}F_X(x)=2\int_{-\infty}^{q}(q-x)F_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.26}$$

3．风险价值度量方法

（1）风险价值（Value at Risk，VaR）。一定的资产组合持有期内，在给定的置信水平 p 下，VaR 为预期的最大损失。假设资产的分布是对称分布，发生最大损失的概率为：$P\{X\leqslant VaR_p\}=1-p$ 或者 $P\{X\leqslant -VaR_p\}=p$。可以推算出：

$$VaR_p=-F^{-1}(p) \tag{1.27}$$

（2）条件风险价值（Conditional Value at Risk，CVaR）也就是计算大于预期最大损失的平均值：

$$CVaR_p=E[-X\mid -X\geqslant VaR_p] \tag{1.28}$$

1.3.3 均值方差资产配置模型算法

1．模型建立

设 R_i 表示第 i 种资产的收益率，是一个随机变量均值方差存在，$E(R_i)=r_i$，$Var(R_i)=\sigma_i^2$，$Cov(R_i, R_j)=\sigma_{ij}$，记协方差矩阵为 $\Sigma=(\sigma_{ij})$，x_i 表示投资在第 i 种资产上的份额（在每种资产上分配的比例），$x_i\geqslant 0$（不允许卖空），$i=1，2，\cdots，n$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，称 $R=\sum_{i=1}^{n}x_iR_i$ 为由 n 个资产组成的投资组合。该投资组合的期望收益和方差分别为：

$$\mu_p=E(R)=\sum_{i=1}^{n}x_iE(R_i)=\sum_{i=1}^{n}x_ir_i=x'r \tag{1.29}$$

$$\sigma_p^2=Var(R)=Var(\sum_{i=1}^{n}x_iR_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij}=x'\Sigma x \tag{1.30}$$

显然 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i\leqslant \mu_p\leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$

给定收益率的条件下选择风险最小的投资组合，即指定收益率 $x'r=\mu_p$，求 $x=(x_1，x_2，\cdots，x_n)'$ 使得投资组合的风险 $\sigma_p^2=x'\Sigma x$ 最小。

$$\begin{aligned}&\min_x \sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij}=x'\Sigma x\\ &s.t\quad \sum_{i=1}^{n}x_ir_i=x'r=\mu_p\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

上述优化问题的最优解称为有效投资组合，对任意给定的投资组合期望收益水平 μ_p，都可以得到一个与其相对应的有效投资组合的最小方差 σ^2，全部有效投资组合对应的收益率方差和期望在 σ^2–μ_p（方差–均值）平面上对应的集合称为投资组合的有效边界；在有效边界上不同投资者根据自己对风险和收益的偏好不同，选择各自的最优资产组合。

2．模型计算

模型的求解依据由拉格朗日乘子法，也就是函数对权重 x 求极值：

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} - 2\lambda_1(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - 1) - 2\lambda_2(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i - \mu_p) \\ &= x'\Sigma x - 2\lambda_1(x'I-1) - 2\lambda_2(x'r-\mu_p) \end{aligned} \tag{1.32}$$

于是有

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\Sigma x - 2\lambda_1 I - 2\lambda_2 r = 0$$

所以有 $$x = \Sigma^{-1}(\lambda_1 I + \lambda_2 r)$$

代入约束条件解得：

$$\begin{aligned} (I'\Sigma^{-1} r)\lambda_1 + (r'\Sigma^{-1} r)\lambda_2 &= \mu_p \\ (I'\Sigma^{-1} I)\lambda_1 + (r'\Sigma^{-1} I)\lambda_2 &= 1 \end{aligned} \tag{1.33}$$

令： $A = I'\Sigma^{-1} I$， $B = I'\Sigma^{-1} r$， $C = r'\Sigma^{-1} r$， $\Delta = AC - B^2$，

解上述线性方程组可得：

$$\lambda_1 = \frac{C-\mu_p B}{\Delta}，\quad \lambda_2 = \frac{\mu_p A - B}{\Delta}，$$

所以优化问题的最优解为：

$$\bar{x} = \Sigma^{-1} I \cdot \lambda_1 + \Sigma^{-1} r \cdot \lambda_2 \tag{1.34}$$

对应的最小方差为：

$$\sigma^2(\bar{x}) = \bar{x}'\Sigma \bar{x} = \bar{x}'\Sigma\Sigma^{-1} I \cdot \lambda_1 + \bar{x}'\Sigma\Sigma^{-1} r \cdot \lambda_2 = \lambda_1 + \mu_p \lambda_2 \tag{1.35}$$

3．最优问题解的性质

（1）对任意 μ_p（ $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i \leqslant \mu_p \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$ ），有效投资组合得有效边界是 σ^2–μ_p 平面上的一条抛物线。

（2）由于 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵，所以 $A>0$，$C>0$，且由许瓦茨不等式知 $\Delta = AC - B^2 > 0$ 。μ_p 对应的有效组合 x_μ 对应的方差为：

$$\sigma^2(x_\mu) = \frac{1}{\Delta}(A\mu_p^2 - 2B\mu_p + C) = \frac{A}{\Delta}(\mu_p - \frac{B}{A})^2 + \frac{1}{A}。 \tag{1.36}$$

（3）对任意 μ_p（ $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i \leqslant \mu_p \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$ ），$\sigma^2(x_\mu) \geqslant \frac{1}{A}$；$\sigma^2(x_\mu) = \frac{1}{A}$ 的充要条件是 $\mu_p = \frac{B}{A}$，此时对应的最优解为：$x_\mu = \frac{\Sigma^{-1} I}{I'\Sigma^{-1} I}$。