教育部考试中心组编

根据修订后的2007年
《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写

专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学（一）

考试大纲解析

2007

电大版

中央广播电视大学出版社

根据修订后的2007年
《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写
专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学(一)考试大纲解析

教育部考试中心组编

中央广播电视大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（一）考试大纲解析/教育部考试中心组编．北京：中央广播电视大学出版社，2007.3

（专科起点升本科入学考试参考丛书）

根据修订后的2007年《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写

ISBN 978-7-304-03756-7

Ⅰ.高… Ⅱ.教… Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第004937号

根据修订后的2007年

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写

专科起点升本科入学考试参考丛书

高等数学（一）考试大纲解析

教育部考试中心组编

出版·发行：中央广播电视大学出版社

电话：发行部 010-58840200

总编室 010-68182524

地址：出版社 北京市海淀区西四环中路45号 邮编：100039

发行部 北京市海淀区魏公村路2号27号信箱 邮编：100081

网址：http://www.crtvup.com.cn

经销：新华书店北京发行所

策划编辑 徐东丽

印刷：北京云浩印刷有限责任公司 印数：0001～2000

版本：2007年3月第1版 2007年3月第1次印刷

开本：B5 印张：16.5 字数：315千字

书号：ISBN 978-7-304-03756-7

定价：23.00元

（如有缺页或倒装，本社负责退换）

前　　言

2006年12月，教育部学生司和考试中心组织专家对《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》（以下简称《大纲》）进行了局部修订。

针对《大纲》的上述修订，为帮助专科起点升本科的考生复习备考，我们组织参加《大纲》修订的专家对2005年版的《考试大纲解析》进行了相应的修订。这套书按照修订后的《大纲》的体例和复习考试内容要求进行了深入的阐述和讲解，力求帮助考生全面了解和准确把握《大纲》的内容和要求，从而提高知识水平和能力水平。

本套丛书共10册，即《政治考试大纲解析》、《英语考试大纲解析》、《大学语文考试大纲解析》、《教育理论考试大纲解析》、《高等数学（一）考试大纲解析》、《高等数学（二）考试大纲解析》、《民法考试大纲解析》、《艺术概论考试大纲解析》、《生态学基础考试大纲解析》、《医学综合考试大纲解析》。

书中若有疏漏和不当之处，恳请读者指正。

教育部考试中心

2007年1月

目　录

第一篇　复习内容

第二篇　分类例题解析

第一篇

复习内容

第一章　极限、连续

§1.1 极　限

一、考试大纲要求

1. 理解极限的概念,(对极限定义中"$\varepsilon - N$"、"$\varepsilon - \delta$"、"$\varepsilon - M$"等形式的描述不作要求),能根据极限概念分析函数的变化趋势. 会求函数在一点处的左极限与右极根,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.

2. 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

3. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价). 会运用等价无穷小量代换求极限.

4. 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

二、基本知识

(一)数列的极限

1. 数列的定义

按照某种规律排列的一串无穷尽的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列,简记作$\{x_n\}$. 其中每一个数称为数列的项,x_n称为通项.

2. 数列的性质

(1)单调性　设有数列$\{x_n\}$. 如果对于每个n,都有$x_{n+1} > x_n$(或$x_{n+1} < x_n$),则称$\{x_n\}$为单调增加(或单调减少)数列. 单调增加数列与单调减少数列统称为单调数列.

(2)有界性　设有数列$\{x_n\}$. 如果存在正数M,使得对于一切n,都有$|x_n| < M$,则称数列$\{x_n\}$是有界的. 否则称数列$\{x_n\}$是无界的.

3. 数列极限的定义

设有数列$\{x_n\}$和常数a. 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存

在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 这时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 如果数列没有极限,则称数列发散.

4. 收敛数列的性质

收敛数列必有界. 反之不成立,即有界数列不一定收敛.

5. 数列极限的四则运算法则

设有数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}(b\neq0)$.

(二) 函数的极限

1. 函数极限的定义

(1) $x\to\infty$ 时函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 $|x|>M$ 时有定义,A 为常数. 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 X,使得当 $|x|>X$ 时,不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2) $x\to x_0$ 时函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

(3) 函数的左、右极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧(或右侧)邻近有定义(在点 x_0 可以没有定义),A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得当 $x_0-\delta<x<x_0$(或 $x_0<x<x_0+\delta$)时,不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限(或右极限),记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)$).

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件

$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是左、右极限存在且相等,即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

3. 函数极限的性质

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则其值必定惟一,常称之为极限的惟一性定理.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),则必存在点$x_0$的某一个邻域,在该邻域内,有$f(x)>0$(或$f(x)<0$);

(3)若在点x_0的某一去心邻域内有$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$),且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则必有$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

4. 函数极限的四则运算法则

设有函数$f(x)$,$g(x)$. 如果在自变量x的同一变化过程中,有$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2)$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

5. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$;　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(三)无穷大和无穷小

1. 定义

(1)无穷大的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内(或$|x|>N$时)有定义. 如果对于任意给定的正数M(不论它有多么大),总存在正数δ(或正数X),使得当

$$0<|x-x_0|<\delta(\text{或}|x|>X)$$

时,不等式$|f(x)|>M$恒成立,则称函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷大,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\ (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

(2)无穷小的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内(或$|x|>N$时)有定义. 如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0),$$

则称函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷小.

2. 无穷大和无穷小的关系

在自变量x的某一变化过程中,如果$\lim f(x)=0(f(x)\neq 0)$,则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$;反之,若

$$\lim f(x)=\infty,$$

则

$$\lim\frac{1}{f(x)}=0.$$

3. 无穷小与函数极限的关系

如果在自变量x的某一变化过程中,函数$f(x)$有极限A,则在x的同一变化

过程中,函数 $\alpha(x)=f(x)-A$ 是无穷小;反之,如果函数 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

其中函数 $\alpha(x)$ 在 x 的某一变化过程中为无穷小,则常数 A 是在 x 的同一变化过程中函数 $f(x)$ 的极限.

4. 无穷小的性质

(1)有限个无穷小的和或乘积仍是无穷小;

(2)无穷小与有界函数的乘积是无穷小.

5. 无穷小的比较

设函数 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的两个无穷小.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小,记作

$$\alpha(x)=o(\beta(x));$$

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$,则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同阶的无穷小;

(4)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 等价的无穷小,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

6. 等价无穷小的代换定理

设 $\alpha(x),\alpha'(x),\beta(x),\beta'(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,且

$$\alpha(x)\sim\alpha'(x),\beta(x)\sim\beta'(x),\lim\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}\text{存在},$$

则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

三、例题分析

(一)求数列的极限

求数列极限的方法是:利用极限的四则运算法则和极限存在准则,以及如下的已知极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(\alpha>0,\alpha\text{为常数})=0 \tag{1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e} \tag{1.2}$$

举几个例子说明.

例 1.1 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{n^3+5n^2+n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3+1)(n^2+5n+6)}{2n^5-4n^2+3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4+n^2-3}{n^3-n^2+1}$.

解 这三个数列极限都呈"$\dfrac{\infty}{\infty}$"形式. 且通项都是 n 的有理分式. 求这种形式的极限的方法是:用分子、分母中 n 的次数最高的项(不包括系数)同除分子、分母,然后运用极限四则运算法则及已知数列极限(1.1)求极限.

(1)用 n^3 除分子、分母,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^3+5n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$$

(2)用 n^5 除分子、分母,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1)(n^2+5n+6)}{2n^5-4n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}{2-\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^5}}=\frac{1}{2}$$

(3)用 n^4 除分子、分母,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+n^2-3}{n^3-n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=\infty$$

例 1.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$.

解 这里的极限仍呈"$\dfrac{\infty}{\infty}$"形式,但通项不再是 n 的有理分式,而是 n 的无理分式. 求极限方法仍与例 1.2 相同. 用 n 同除分子、分母,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

例 1.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 这里的极限呈"$\infty-\infty$"的形式. 方法是将其有理化后再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0\end{aligned}$$

例 1.4 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$.

解 这四个极限都呈“1^{∞}”形式. 因此,自然会想到利用重要极限公式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}$；

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{n/2}\right]^{\frac{n}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$

(二) 求函数的极限

求函数的极限的方法是:利用极限的四则运算法则、两个重要极限、无穷小乘有界函数仍是无穷小、等价无穷小代换定理等,以及如下一些已知极限:

$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$($C$ 为常数)； $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0$($\alpha>0$,常数)

$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$($C$ 为常数)； $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$

例 1.5(选择题) 题目中给出四个选项,其中只有一个选项符合题意,请选出符合题意的选项——以下“选择题”的要求相同,不再重申. 下列极限中存在的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}$ D. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

答 应选 B.

分析 因为对于选项 A 来说,当 $x\to+\infty$ 时,$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}\to+\infty$,极限不存在,对于选项 C 来说,当 $x\to 0$ 时,$(2^x-1)\to 0$,$\frac{1}{2^x-1}\to\infty$,极限也不存在;对于选项 D 来说,当 $x\to 0^+$ 时,$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ 当 $x\to 0^-$ 时,$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to 0$,由定义知 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 不存在. 而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

所以应选 B.

例 1.6 已知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在,且 $f(x)=2x^2+3x-3\lim\limits_{x\to 1}f(x)$,求 $f(x)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在,它表示一个确定的数值,记$\lim\limits_{x\to1}f(x)=A$,则有

$$f(x)=2x^2+3x-3A$$

因此
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(2x^2+3x-3A)$$
$$A=5-3A$$

可解得$A=\dfrac{5}{4}$,故

$$f(x)=2x^2+3x-\frac{15}{4}$$

极限呈"$\dfrac{0}{0}$"形式时的计算.

先考虑消去分子、分母为零的因子再求极限.

例 1.7 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$.

解 这极限式是有理分式,且呈"$\dfrac{0}{0}$"形式. 分子分母同时分解因式,消去分子、分母成为零的因式,再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+2}{x+1}=\frac{5}{2}$$

如果极限式不是有理分式,而是无理式,这时一般可通过有理化方法消去使分母成为零的因式,再求极限,看下例.

例 1.8 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$; (2)$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

解 (1)极限呈"$\dfrac{0}{0}$"形式. 分子无法分解因式,将其有理化,得

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{1+x}+2}=\frac{1}{4}$$

(2)极限也呈"$\dfrac{0}{0}$"形式,分子分母须同时有理化,得

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

利用重要极限公式$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

当极限式中含有三角函数时,往往可通过三角恒等变换,再利用重要极限求极限.

例 1.9 求极限:$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$.

解 由三角恒等式 $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$,于是

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

利用等价无穷小代换求极限.

当 $x \to 0$ 时,下面是一些常见的等价无穷小:

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \ln(1+x) \sim x;$$

$$e^x - 1 \sim x; \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

例 1.10 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^m x}{\tan(x^m)}$; (2)$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2+x}$; (3)$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$.

解 (1)因当 $x \to 0$ 时,$\sin^m x \sim x^m$,$\tan(x^m) \sim x^m$ 故

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^m x}{\tan(x^m)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^m}{x^m} = 1$$

(2)因当 $x \to 0$ 时,$1-\cos 2x = 2\sin^2 x \sim 2x^2$,故

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2+x} = 0$$

(3)因当 $x \to 0$ 时,$\sin 2x \sim 2x$,$\ln(1+x) \sim x$,故

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

注意,等价无穷小代换能在乘积和商中进行,不能在加减运算中代换,否则会导致错误.

例如,求极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$时,因 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,$\sin x \sim x$,

则 $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(\cos x-1)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3\cdot\cos x}=-\frac{1}{2}$$

但 $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}\neq\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

即在分子的代数和($\sin x-\tan x$)中,用等价无穷小 x 分别代换和中的项是错误的.

极限呈“$\frac{\infty}{\infty}$”形式时的计算方法.

这种情形求极限的方法与数列的情况类似.

例 1.11 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-3}{x^3-x+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

解 这两个极限都呈“$\frac{\infty}{\infty}$”的形式

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-3}{x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=1$

一般情形有下列结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

以后可以将上述结论作为公式使用. 请读者牢记.

极限呈“$\infty-\infty$”形式时的计算方法.

这种情形,一般可通过“通分”或“有理化”等方法化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”的形式,然后再求极限.

例 1.12 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{12}{8-x^3}-\frac{1}{2-x}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.