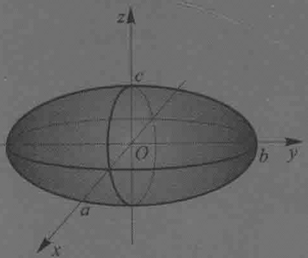
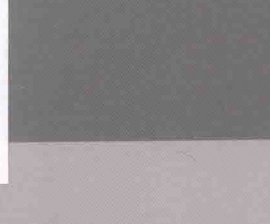
自主创新
方法先行

线性代数

主　编　郭文艳
副主编　徐小平　童小红





高等教育出版社

自主创新
方法先行

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　郭文艳

副主编　徐小平　童小红

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”子课题“科学思维、科学方法在线性代数课程中的应用与实践——以问题驱动线性代数教学”的研究成果。

本书以问题驱动、案例诠释以及几何与代数相结合的理念来组织教学内容，结构严谨，层次清晰。另外，富含其他学科相关的应用案例也是本书的特色，为后续课程和应用实践作了铺垫。全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型共5章，每章配有丰富的习题，并附部分习题答案。

本书可作为高等学校理工类专业线性代数课程教材，也可供相关研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/郭文艳主编. --北京：高等教育出版社，2015.8

ISBN 978-7-04-043367-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第156379号

策划编辑 张长虹　　责任编辑 张长虹　　封面设计 姜　磊　　版式设计 杜微言
插图绘制 郝　林　　责任校对 刘丽娴　　责任印制 田　甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	14.25	版　　次	2015年8月第1版
字　　数	260千字	印　　次	2015年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	22.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　43367-00

前　言

线性代数是大学理工类专业的重要基础课，对后续课程的学习非常重要。该课程所体现的代数方法与几何观念之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法，以及严谨的逻辑推证等，对于强化学生的数学训练，培养学生的逻辑思维是非常有益的。

随着互联网和计算机技术的发展，线性代数在计算技术中的基础地位日益凸显，用代数方法解决实际问题已渗透到众多领域。

本书是科技部创新方法工作专项项目子课题"科学思维、科学方法在线性代数课程中的应用与实践——以问题驱动线性代数教学"的研究成果。编者在对国内外优秀线性代数教材进行仔细研究的基础上，顺应我国高等教育发展的形势，确立了以问题驱动、案例诠释的理念以及代数与几何相结合的表现形式编写线性代数教材的思想。通过增加应用案例，以实例诠释概念，减弱线性代数概念的抽象性；以数学建模的思想，体现线性代数知识的实用性，达到理论对实践的指导目的。全书介绍的十多个应用案例，涉及工程、化学、生物、计算机等多个学科，从不同侧面突出了线性代数的应用性。书中对重要概念几何图形的形象化解释，凸显了数与形的融合，易于学生理解。

参加本书编写的有郭文艳（第1,2,3章），徐小平（第4章），童小红（第5章），其中郭文艳担任主编，徐小平、童小红担任副主编。秦新强、赵凤群教授为本书作主审，王小侠老师对本书进行了试用，他们提出了许多宝贵意见和建议，对书稿的完善起了重要作用，高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，对此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中定有不妥之处，恳请专家、同行以及广大读者不吝赐教。

编　者

2015年4月

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个重要概念,行列式理论是在研究线性方程组的解法中产生的.为了求解二元和三元线性方程组,引入二阶和三阶行列式;类似地,n 元线性方程组的求解需要引入 n 阶行列式的定义.本章首先给出 n 阶行列式的递归定义,接着讨论 n 阶行列式的基本性质和计算方法,最后介绍行列式的应用——求解线性方程组的克拉默法则.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶与三阶行列式的定义

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

式(1.1)中,$x_j(j=1,2)$表示第 j 个未知量,$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$表示第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数,$b_i(i=1,2)$表示第 i 个方程右端的常数项.用第一个方程的 a_{22} 倍减去第二个方程的 a_{12} 倍,消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

当未知量的系数满足 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同理可得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

式(1.1)中两个未知量的取值形式相同,为了便于记忆,人们引入二阶行列式.二阶行列式是由 $2^2=4$ 个数 a_{ij} 排成两行两列的算式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

规定其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

在二阶行列式中,称从左上角到右下角的连线为主对角线,右上角到左下角的连线为副对角线,二阶行列式计算的对角线法则描述为:二阶行列式等于**主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积**.

利用二阶行列式,式(1.1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

解的分母相同,为由方程组的系数排成的二阶行列式,称为系数行列式.分子为以右端的常数项 b_1, b_2 为列分别替换系数行列式中的第 1、2 列构成的二阶行列式.记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

当系数行列式 $D \neq 0$ 时,式(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

利用消元法,可以求得其解为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \\
x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \\
x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

这种复杂的解的形式,可以通过引入三阶行列式进行简化.

三阶行列式是由 $3^2=9$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 排成三行三列的算式:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

其值规定为

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}
\tag{1.5}
$$

即三阶行列式是 6 项的代数和,每一项都是来自不同行、不同列的 3 个元素的乘积,3 项为正,3 项为负,正负项各占一半.类似于二阶行列式的对角线法则,三阶行列式的对角线计算方法如图 1.1 所示.

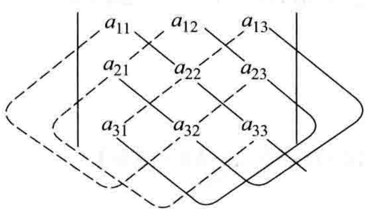


图 1.1 三阶行列式的对角线法则示意图

利用三阶行列式,三元线性方程组在系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.6}$$

时有唯一解,解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.7}$$

其中,$D_j(j=1,2,3)$表示将系数行列式 D 中的第 j 列用方程组右端的常数项 b_1,b_2,b_3为列替换得到的三阶行列式.即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

例 1.1 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+6x_3=2 \\ 4x_2+7x_3=3 \end{cases}$$

解:$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}=21+0+40-0-28-24=9$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}=21+36+40-45-28-24=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}=14+0+30-0-14-18=12$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}=9+0+8-0-12-8=-3$$

因系数行列式 $D=9$,故方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=0,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{4}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{1}{3}$$ ■

利用行列式来表示二元和三元线性方程组的解,其结果非常相似而且简洁、优美,能否将这一形式推广到 n 个方程 n 个未知量的线性方程组中?答案是肯定的,这就是后面我们要给大家介绍的克拉默法则.n 元线性方程组克拉默法则的推导,需要引入 n 阶行列式的定义并建立 n 阶行列式的理论.

1.1.2 n 阶行列式的定义

一阶行列式定义为 $|a|=a$.现在我们来分析二阶行列式和一阶行列式、三阶行列式和二阶行列式之间的关系,从而得到高阶行列式的定义方法.

式(1.2)可改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}|+a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}| \tag{1.9}$$

式(1.5)可改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(-1)^{1+2}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(-1)^{1+3}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

用 M_{1j}表示在原来行列式中划去元素 a_{1j}所在的第 1 行元素与第 j 列元素后剩下的元素按原有的先后次序排成的低一阶的行列式,称为元素 a_{1j}的余子式,$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$称为元素 a_{1j}的代数余子式.式(1.9)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} \tag{1.11}$$

式(1.10)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1.12}$$

式(1.11)表明二阶行列式可以用两个一阶行列式来表示,式(1.12)表明三阶行列式可以用三个二阶行列式来表示.式(1.11)、式(1.12)表明二阶行列式和三阶行列式等于第一行所有元素与其对应的代数余子式乘积之和.由此,可以得到 n 阶行列式的递归定义.

定义 1.1(n 阶行列式) 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 n 行 n 列的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

称为 n 阶行列式,记为 $D=\det(a_{ij})$.当 $n=1$ 时,其值为 $D=|a_{11}|$;当 $n\geqslant 2$ 时,其值为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1.14}$$

其中,$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$,而 M_{1j} 表示在 D 中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行元素与第 j 列元素后剩下的元素按原有的先后次序排成的 $n-1$ 阶的行列式,即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

定义 1.2(余子式与代数余子式) 在 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行元素与第 j 列元素后剩下的元素按原有的先后次序排成的 $n-1$

阶的行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记为 M_{ij};称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的代数余子式.

由余子式以及代数余子式的定义可以看出,在行列式 D 中,元素 a_{ij}的余子式和代数余子式与元素 a_{ij}以及它所在的第 i 行元素和第 j 列元素无关.

式(1.14)表明,当 $n\geqslant 2$ 时,n **阶行列式等于它的第一行元素与其对应的代数余子式的乘积之和,称式(1.14)为 n 阶行列式按第一行展开的公式.**

例 1.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

解:由行列式的定义得

$$\begin{aligned}D&=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&4&1\\4&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&4&1\\3&1&2\\4&2&3\end{vmatrix}+\\&\quad 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3&1\\3&4&2\\4&1&3\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&1\\4&1&2\end{vmatrix}\\&=1\times(-36)+2\times4+3\times4+4\times44=160\end{aligned}$$

■

例 1.3 证明:下三角形行列式(主对角线上(下)方的元素全为零的行列式称为下(上)三角形行列式)

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积.

证明：对行列式的阶数 n 采用数学归纳法.当 $n=2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}$$

结论显然成立.设结论对 $n-1$ 阶的下三角形行列式成立,按定义 1.1 对 n 阶的下三角形行列式有

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

而 M_{11} 是 $n-1$ 阶的下三角形行列式,由假设有 $M_{11}=a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$,所以

$$D=a_{11}M_{11}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

■

显然

(1) 对角行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可证

(2) 副对角线上方元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}$$

1.2 行列式的性质

n 阶行列式的递归定义将 n 阶行列式的计算化为 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算,提供了将高阶行列式用低阶行列式来表示的降阶思想,具有重要的理论价值.当 n 比较大($n\geqslant4$)时,计算变得很复杂.以 $n=5$ 为例,需要化成 20 个三阶行列式或 60 个二阶行列式才能得到结果.一个 n 阶行列式按递归定义需要化成$\frac{n!}{2}$个二阶行列式来计算.但当行列式第一行的元素为零的比较多(除一个元素外,其余元素均为零)且行列式的形状特殊(下三角形行列式或对角行列式)时,计算比较方便.恰当地使用行列式的递归定义来具体计算行列式,建立行列式的相关理论,需要用行列式的定义推导行列式的性质来简化计算.

定义 1.3(转置行列式) 行列式 D 中,互换行列式的行和相应列的位置得到的行列式,称为行列式 D 的转置行列式,记为 D^{T}或 D' ,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.1 行列式与其转置行列式的值相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1.1 表明,在行列式中行和列的地位是等同的,所有对行成立的性质对列也成立.

由性质 1.1 及例 1.3 可知,上三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质 1.2 互换行列式两行(列),行列式变符号.