



广州中望龙腾软件股份有限公司(ZWSOFT)资助出版

Geometric Computation  
Approximation and Processing

# 几何计算 逼近与处理

王国瑾 刘利刚 著



科学出版社

广州中望龙腾软件股份有限公司 (ZWSOFT) 资助出版

# 几何计算 逼近与处理

王国瑾 刘利刚 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书介绍浙江大学几何设计与图形学的科研团队在最近十二年中的部分理论研究和实际应用成果. 从综述国内外研究现状与工程需求出发, 用简练通俗的语句, 深入浅出地讲述了在几何计算、几何逼近与几何处理这三个热点研究方向的攻关策略、推理技巧与数学建模. 内容包括: 可展曲面、极小曲面、调和曲面、保形插值曲面、特殊拼接曲面、广义 Ball 曲面、带特征线的曲面束、有理圆锥曲线、参数优化曲线、有理曲面导矢界与隐式曲面绘制的计算方法; 曲线曲面的等距逼近、降阶逼近、细分逼近、线性逼近、合并逼近、渐进迭代逼近和有理曲线曲面及其导矢的多项式逼近; 三角网格的生成、优化、蓝噪声采样、参数化与测地线计算; 几何重建与编辑; 三维形状的语义分割、分析、理解以及几何驱动的图像处理等. 本书题材新颖, 接触前沿, 内容丰富, 涉猎广泛, 学科交叉, 面向应用, 为工业产品外形设计和三维几何数据建模提供了崭新工具.

本书可供高等学校、科研院所、工矿企业、软件公司中与计算机辅助设计/制造、产品造型、图像图形处理及数字几何媒体有关的人员阅读, 对有志于从事计算机图形、几何设计与视觉传媒的理论研究者也是很好的入门向导.

### 图书在版编目 (CIP) 数据

几何计算 逼近与处理 / 王国瑾, 刘利刚著. —北京: 科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-043148-6

I. ①几… II. ①王… ②刘… III. ①计算几何-研究生-教材  
IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 017709 号

责任编辑: 鞠丽娜 童安齐 / 责任校对: 王万红  
责任印制: 吕春珉 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中科印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015 年 2 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2015 年 2 月第一次印刷 印张: 38 插页: 4

字数: 868 000

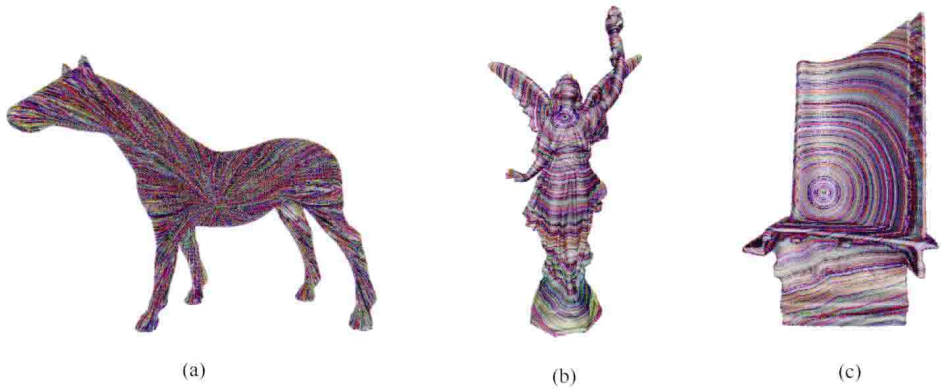
定价: 150.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换 <中科>)

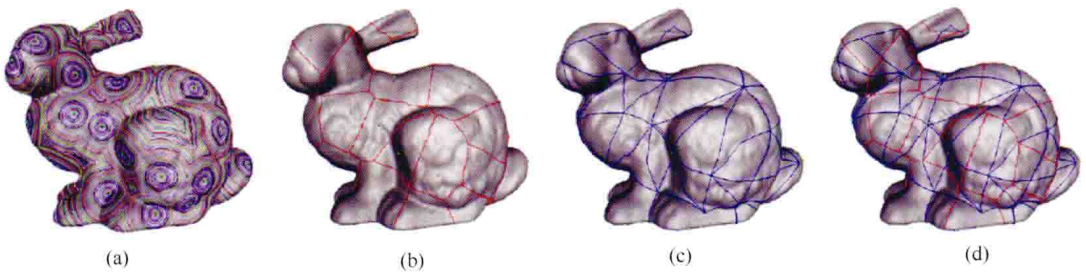
销售部部长电话 010-62142126 编辑部电话 010-62138978-2009

版权所有, 侵权必究

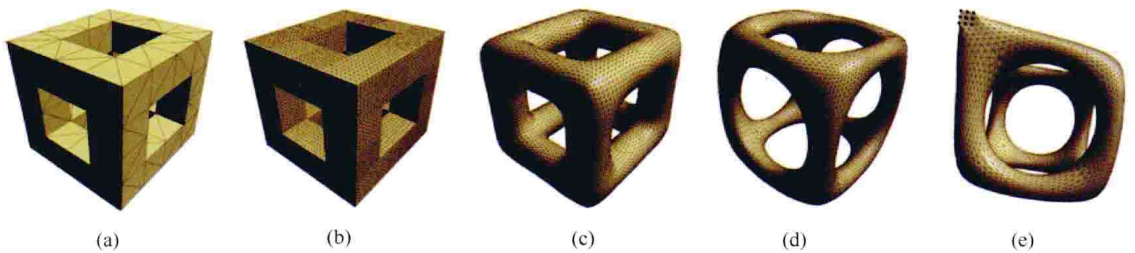
举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303



彩图 1 按 XW 算法计算单源多终点的离散测地线与基于离散测地距离的等距线 (第 19 章第 19.1 节).  
 (a) 96964 个面的 Horse 模型, 从源点到各顶点的离散测地线; (b) 525814 个面的 Lucy 模型,  
 基于离散测地距离的等距线; (c) 1765388 个面的 Blade 模型, 基于离散测地距离的等距线

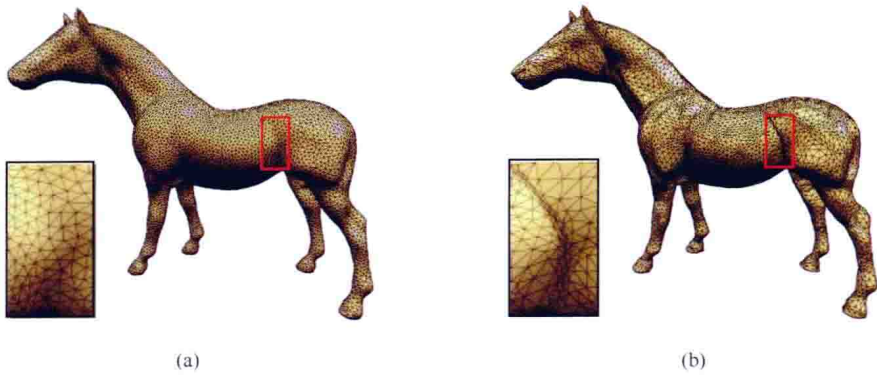


彩图 2 利用 XW 算法近似地算得离散测地等距线、  
 测地 Voronoi 图及测地 Delaunay 三角化 (第 19 章第 19.3 节).  
 (a) 离散测地等距线; (b) 测地 Voronoi 图; (c) 测地 Delaunay 三角化; (d) 为 (b) 与 (c) 的综合

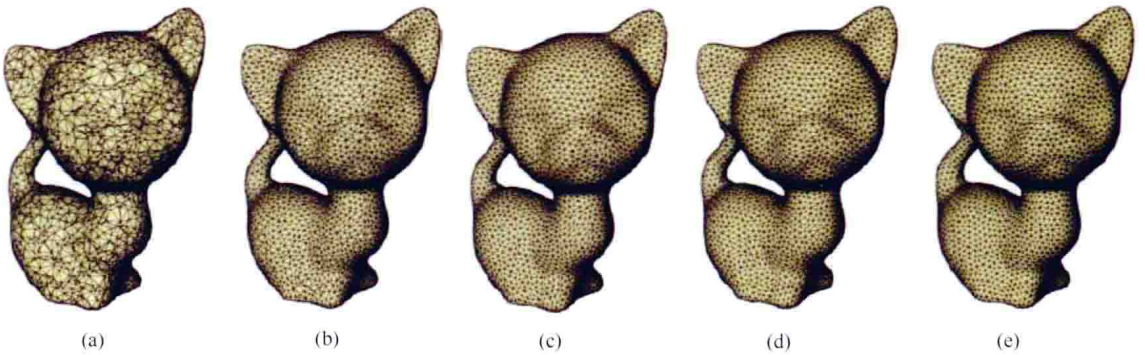


彩图 3 全局 Laplace 优化算法建模 (第 20 章第 20.2 节).  
 (a) 初始控制网格; (b) 细分多次后的网格; (c), (d) 加入三角形重心约束之后的两种全局优化结果,  
 权值为 0.03 和 0.05; (e) 对 (d) 中的优化过程增加了顶点约束

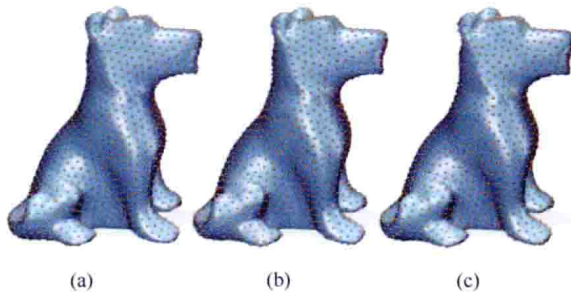




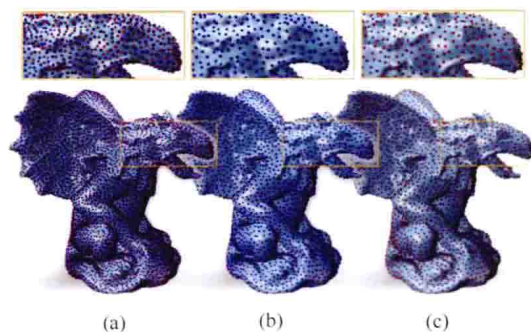
彩图 4 顶点流动的例子(第 20 章第 20.3 节).  
 (a) 原始网格; (b) 顶点流动优化后, 特征区域变得更加明显



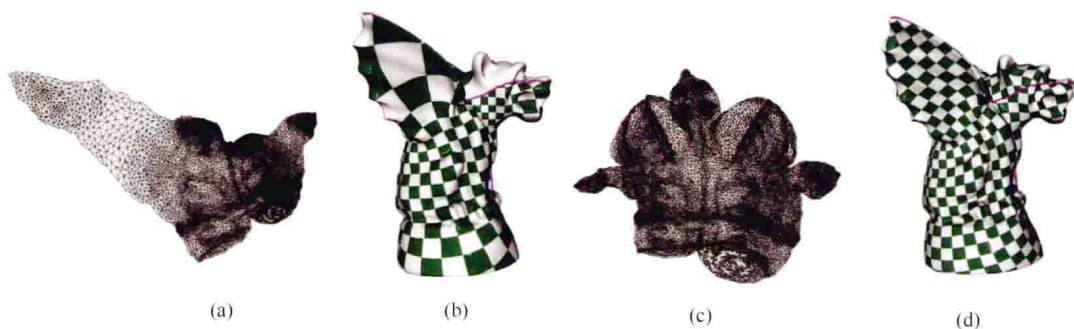
彩图 5 用 CCST 算法在曲面上进行蓝噪采样 5000 个点的一个迭代演化过程(第 21 章第 21.2 节).  
 (a) 初始化结果; (b) 1 次迭代之后; (c) 2 次迭代之后; (d) 5 次迭代之后; (e) 10 次迭代之后生成的最终结果



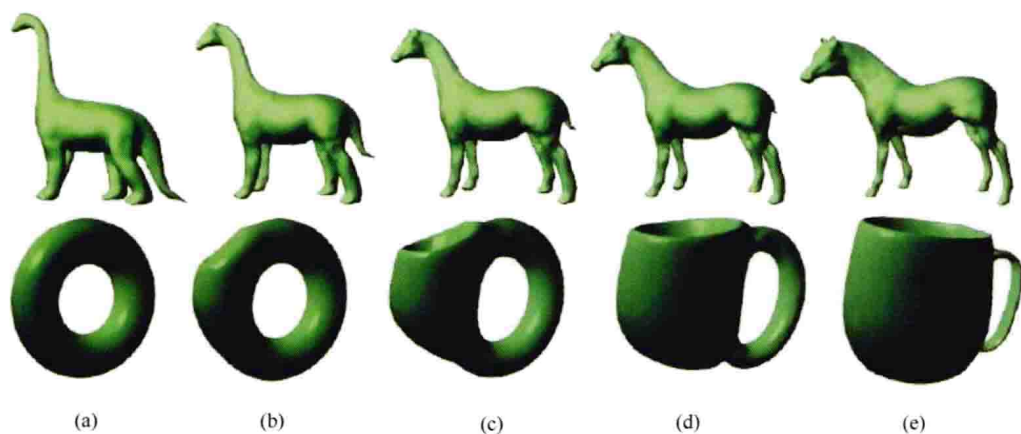
彩图 6 在不同的权值下, 采用 CapCVT 算法在曲面上的蓝噪采样结果(第 21 章第 21.3 节).



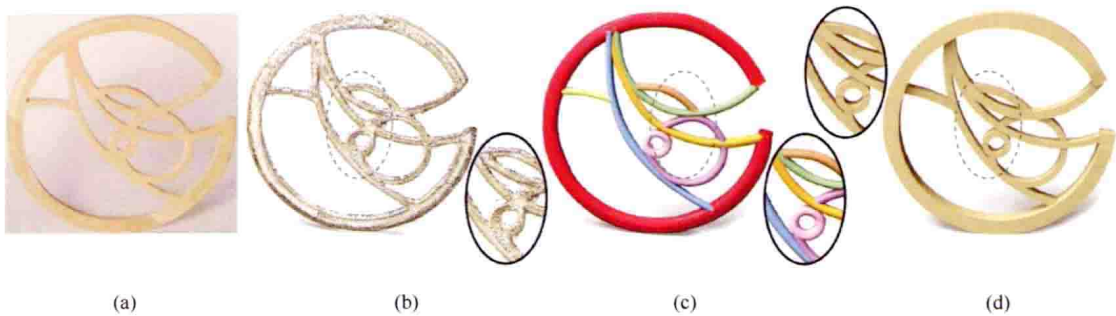
彩图 7 采用 CapCVT 算法在表面上的两类蓝噪采样结果 (第 21 章第 21.3 节).  
 (a) 两类采样分布的并; (b), (c) 各自的采样结果



彩图 8 ASAP 参数化方法与 ARAP 参数化方法的比较 (第 22 章第 22.1 节).  
 (a), (c) 执行两种参数化的结果; (b), (d) 对应的纹理映射的结果



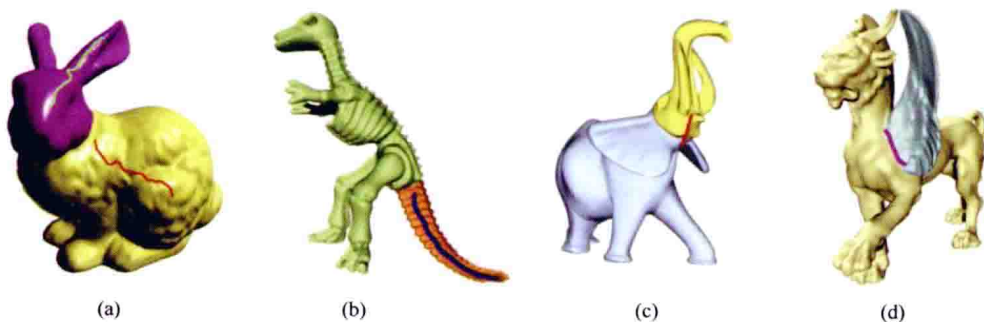
彩图 9 两个三角网格之间的形状混合 (第 22 章第 22.3 节).  
 (a), (e) 网格之间的顶点对应关系由流形参数化方法 (Mani Para) 得到;  
 (b), (c), (d) 网格形状由插值 (a), (e) 中对应的顶点而生成



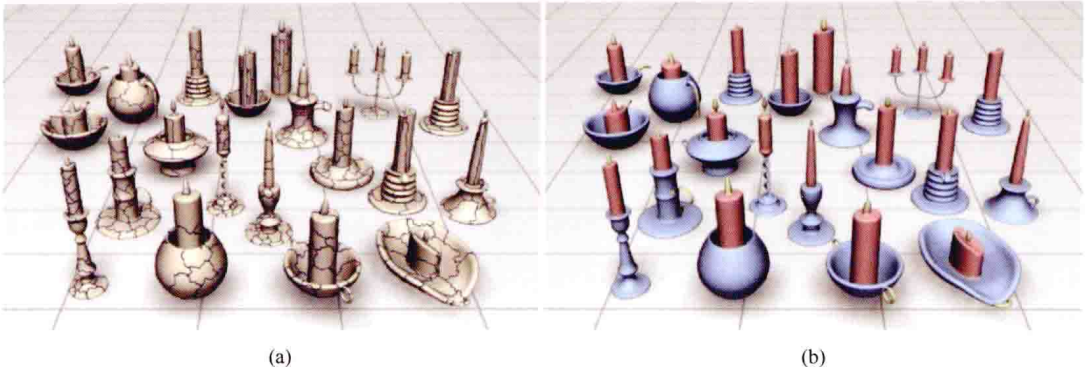
彩图 10 基于动脉蛇模型的重建结果 (第 23 章第 23.1 节).  
 (a) 真实 FIFA 模型的照片; (b) FIFA 模型的 3D 扫描点云数据;  
 (c) 用动脉蛇模型重建的结果; (d) 经过正则化处理后的重建结果



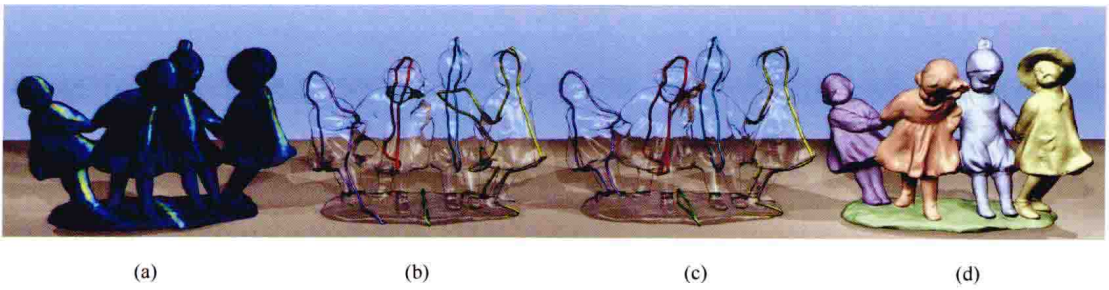
彩图 11 基于单幅图像和不同候选模型的椅子建模结果 (第 23 章第 23.3 节).  
 (a) 真实椅子的照片; (b) ~ (e) 根据 (a) 和不同候选椅子模型  
 (每幅子图的右上角小图) 的建模结果 (每幅子图的左下角大图)



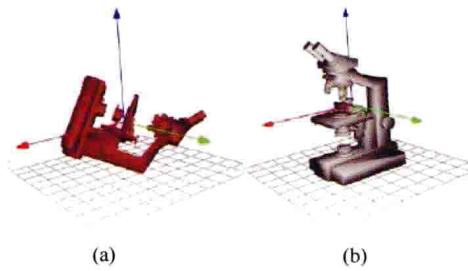
彩图 12 基于区域交互的用户界面 (第 24 章第 24.4 节).  
 (a) 基于前景背景勾画; (b) 基于前景勾画; (c) 垂直于边界勾画; (d) 基于边界勾画



彩图 13 基于子空间聚类方法的多模型联合分割 (第 24 章第 24.5 节).  
 (a) 输入模型集; (b) 联合分割的结果

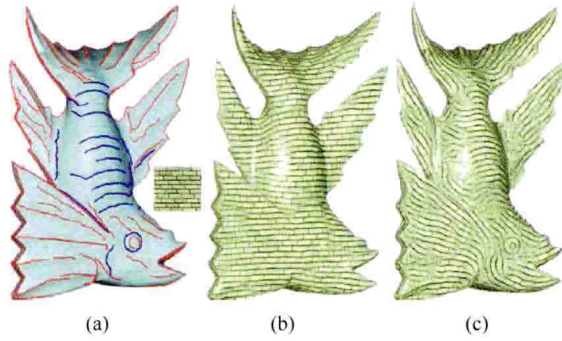


彩图 14 三维小孩模型 (第 25 章第 25.1 节).  
 (a) ~ (c) 局部内蕴反射对称检测; (d) 基于对称的模型分割



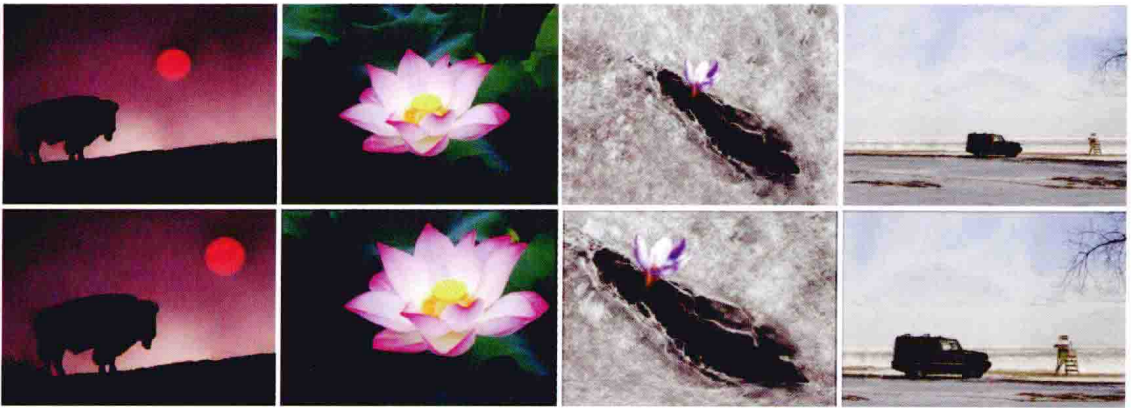
彩图 15 模型直立方向检测 (第 25 章第 25.3 节).  
 (a) 输入模型位于非直立方向; (b) 输出的模型放置在直立方向





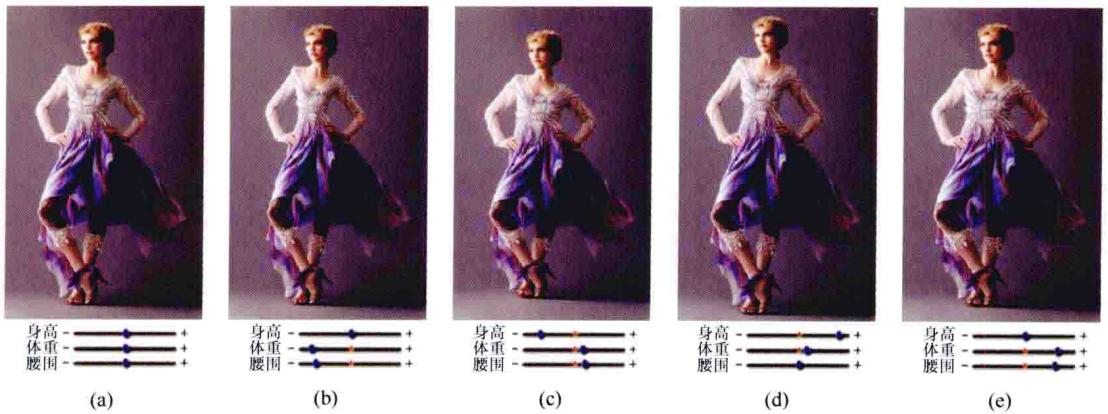
彩图 16 三维形状纹理合成 (第 25 章第 25.6 节).

(a) 曲面的特征线; (b) 未考虑特征的纹理合成结果; (c) 使用特征对齐得到的纹理合成结果



彩图 17 照片构图优化结果 (第 26 章第 26.2 节).

上面 (下面) 一行的每幅图为输入 (输出) 的照片 (结果).



彩图 18 通过调节语义参数 (身高, 体重, 腰围) 来改变人体图像 (第 26 章第 26.4 节).

(a) 输入的图片; (b) ~ (e) 用户通过调节身高 (Height)、体重 (Weight) 和腰围 (Girth) 的不同参数所得到的结果

## 作者简介

**王国瑾**，1944 年生于上海，浙江绍兴人。浙江大学数学系教授，博士生导师。1967 年在浙江大学数学力学系毕业，1970~1978 年在机械工业部所属无锡工厂工作，1981 年在浙江大学应用数学专业获硕士学位，留校任教。1991~1993 年在美国与著名图形学专家 Sederberg 合作研究，2002 年起三次应邀赴香港科技大学合作研究。曾任教育部高校工科数学课程教学指导委员会委员，全国几何设计与计算会议程序委员会主席，应用数学浙江省重点学科负责人，浙江大学理学院学术委员会委员，浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室专家委员会委员及若干期刊的编委。已培养博士 23 名，硕士 26 名，出版专著 1 部(领衔)，获计算机软件著作权 1 项，发表论文 236 篇(含合作)，其中在国际顶级图形刊物 *ACM TOG (SIGGRAPH)* 共 2 篇，在国际顶级几何设计刊物 *CAGD/CAD* 共 24 篇，在国际核心刊物 *JCAM, CI, GMIP, JAT, JACM, CMA, AML, CGF, C&G, COMPUT, MCM* 等共 66 篇。荣誉奖励有：教育部科技进步二等奖(领衔)(1999)，交通部科技进步二等奖(合作)(1989)，陆增镛 CAD&CG 高科技奖一等奖(2002)，浙江省教委科技进步二等奖(1994, 1998)，浙江省高校科研成果二等奖(2007, 2010)，巨人优秀教师奖(1995)，东方通信一等奖(1998)，中兴通讯科研奖(1999)，微软思源工程奖(2004)，浙江大学教育奖(1985, 1986, 1987)等。

**刘利刚**，1975 年生于吉安，江西吉安人。教授，博士生导师。2001 年在浙江大学数学系获应用数学博士学位，此后三年在微软亚洲研究院工作，2004~2012 年在浙江大学数学系任教并任数学系图像图形研究所副所长，此后在中国科学技术大学数学科学学院任教并任国家数学与交叉科学中心合肥分中心图形与几何计算实验室主任。2009~2011 年在美国哈佛大学作访问研究。获国家发明专利 1 项，计算机软件著作权 15 项，发表论文 88 篇(含合作)，其中在国际顶级图形刊物 *ACM TOG* 及国际顶级图形会议 *SIGGRAPH, SIGGRAPH Asia* 共 14 篇，在国际顶级图形刊物 *IEEE TVCG* 共 4 篇，在国际核心刊物 *IEEE CG&A, CAGD, CAD, GM, CGF, C&G, VC* 共 42 篇。荣誉奖励有：教育部与微软亚洲研究院共同颁发的微软青年教授奖(2006)，浙江大学十佳青年岗位能手(2007)，浙江省新世纪 151 人才工程第三层次培养人员(2009)，陆增镛 CAD&CG 高科技奖一等奖(2010)，浙江省第三届高等学校教坛新秀奖(2010)，中国科学院百人计划获得者(2011)，国家自然科学基金委优秀青年基金获得者(2012)，国家自然科学基金二等奖(排名第三)(2013)等。

## 前 言

本书是浙江大学计算机辅助几何设计与图形学教研组 (CAGD & CG Group) 近 12 年来部分科研成果的凝炼与总结. 这个教研组是改革开放初期在著名数学家苏步青教授的亲切关怀与指导下建立的, 参与筹建并隶属于浙江大学应用数学国家重点学科, 是一支活跃在我国计算机图形与几何设计理论及应用领域的科研团队.

自从教研组的第一本专著《计算机辅助几何设计》(高等教育出版社-施普林格出版社, 2001) 编撰出版以后, 我们又以极大兴趣和满腔热情, 继续跟踪国际学术界所提出的理论难点以及我国工业界急需解决的实际问题, 在几何计算、几何逼近与几何处理这三个专业方向的前沿, 进一步开展攻关研究, 取得了丰硕成果, 共有 200 多篇论文发表在 *ACM Transactions on Graphics (ACM SIGGRAPH)* (8 篇), *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* (3 篇), *Computer Aided Geometric Design* (9 篇), *Computer-Aided Design* (10 篇), *ACM Transactions on Sensor Networks*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *Journal of Visualization and Computer Animation*, *Graphical Models*, *Computer Animation and Virtual Worlds*, *Computer Graphics Forum*, *Computers and Mathematics with Applications*, *Applied Mathematics and Computation*, *Applied mathematics letter*, *Computers & Graphics*, *The Visual Computer*, *Science in China (Series A, F)*, *Progress in Natural Science*, *Applied Mathematics*, *A Journal of Chinese Universities (Series B)*, *Computer-Aided Design and Applications*, *Lecture Notes in Computer Science*, *Journal of Information and Computational Science*, 以及《中国科学》、《计算机学报》、《软件学报》、《计算机研究与发展》、《应用数学学报》、《计算数学》、《自动化学报》、《高校应用数学学报》、《计算机辅助设计与图形学学报》等学术刊物上, 另有 8 篇刊登在国际会议论文集. 这些论文绝大多数已被 *Science Citation Index* 或 *Engineering Index Compendex* 摘录, 并有多篇为国际学者引用, 在 CAGD & CG 这一高技术领域为我国争得了一席之地. 尤应提及的是, 教研组师生勇于以创新成果问鼎国际顶级的图形刊物和国际顶级的几何设计刊物, 有 30 多回在这些刊物中展现了浙大人的科研业绩.

随着时光的流逝、研究的深入和形势的变迁, 12 年论文中的公式与定理在今天看来有了更丰富的理论内涵、更稠密的文献脉络及更广袤的应用前景, 由这些成果所引发的国内外后继研究也正在逐步延伸或扩展. 基于这些新现象和新认识, 我们急需对这 12 年论文加以新的思考和新的诠释. 为了按时间

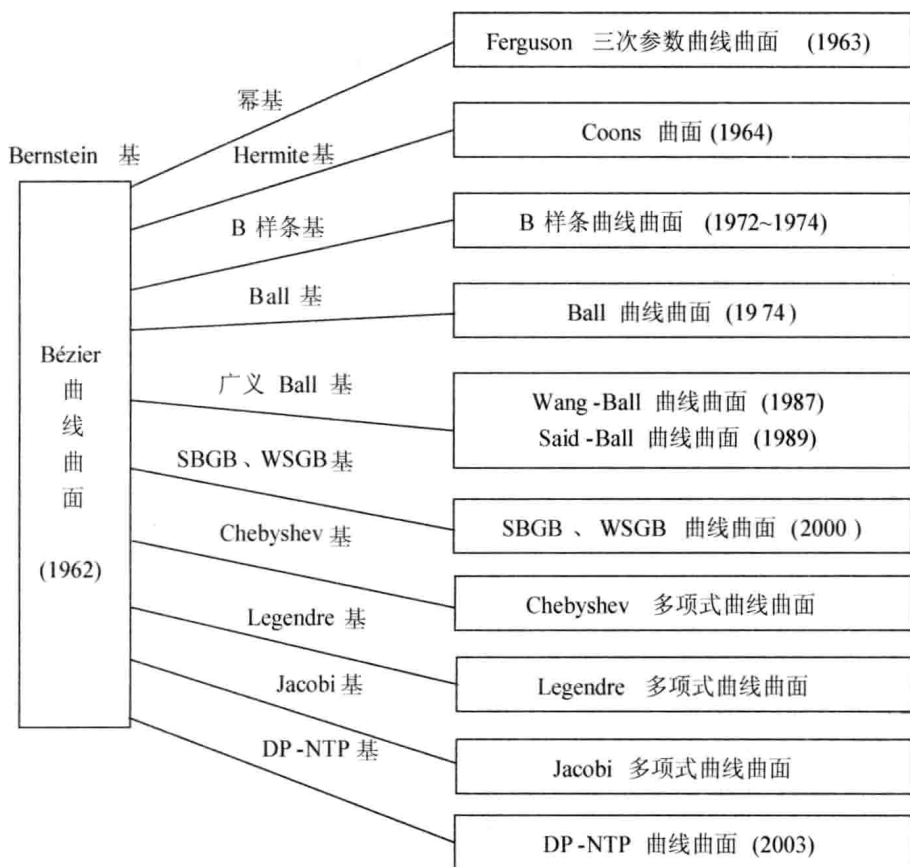
线索从纵的方向更细致且有条不紊地陈述各研究成果的来龙去脉和历史沿革, 为了按理论体系从横的方向更深刻且由果循因地剖析各研究课题的攻关思路和内在关联, 我们把散见于各种期刊的这 200 多篇论文(书中列为“主要文献”)进行了全面整合与重点归纳, 凝炼改写为本书. 这不但有利于科研组自身进行战略性的总结和前瞻性的部署, 以便运筹再战; 也有利于与尊敬的同行进行学术探讨, 以便抛砖引玉; 更有利于与学术界和产业界的广大读者朋友, 包括理论研究专家与工程技术人员, 来携手共享我们的科研成果, 以促进我国计算机图形学和几何设计领域的理论探索、软件开发及人才培养, 并为现代大工业和如日中天的传媒业提供优质高效的外形设计与数字处理新工具, 提高几何建模的有效性、可靠性、经济性、实用性与能动性.

本书取名为《几何计算, 逼近与处理》. 为了阐述它的含义, 首先需要追溯一段历史. 从 20 世纪 60 年代开始, 拜一代宗师 Bézier P.E. (1910~1999), Coons S.A. (1912~1979) 的创新数学模型之赐, 人们可以依据一些型值点, 来对空间曲面作特征设计; 也可以凭借边界曲线的位矢与导矢, 来对空间曲面作超限插值; 其结果在计算机图像系统中快速显示并修改. 这场对于外形描述的“革命”最终催生出一门新兴的交叉学科——计算机辅助几何设计 (CAGD: Computer Aided Geometric Design). 它是真实感图形、动画、虚拟现实中的场景等计算机图形 (CG: Computer Graphics) 乃至各类视频画面的建模基础, 也与计算机辅助设计/计算机辅助制造/计算机辅助工艺分析 (CAD/CAM/CAPP) 有着紧密的联系. 早期 CAGD 的主要研究内容为几何表示 (Geometric Representation), 以后逐渐发展到几何造型 (Geometric Modeling), 两者构成了几何设计的基本理论框架. 几何表示是指便于计算机描述和修改几何形状的数学表达; 几何造型是指在计算机图像仪上对外形曲面和三维实体进行交互式显示、分析与综合的数学方法. 现代几何设计理论拥有三大核心技术: 几何计算 (Geometric Computation)、几何逼近 (Geometric Approximation) 与几何变换 (Geometric Transformation). 几何计算是指几何对象的求值、几何特征的量化、几何关系的判断和几何约束的求解; 几何逼近是指几何外形表达在公差范围内的简化, 即近似几何表达, 或区域几何表达; 几何变换是指几何元素的映射或转化, 用以揭示几何表示的内在本质, 减少几何推理的盲目性, 或改善几何表示的外在形式, 增强几何计算的鲁棒性. 几何计算的重要性体现在其含义中, 它为几何造型或几何设计提供坚实的基石与技术的支撑; 而几何逼近的必要性, 其源盖出于几何大数据通讯/交换/压缩/存储的需要, 出于主流几何设计系统坚持有理多项式表示的需要, 出于优化几何造型的效果与可操作性, 优化曲面求交/求导/求积效率的需要, 或者出于逆向工程中样条曲面渐进迭代拟合等需要.

在 CAGD 学科的发展进程中, 其各个分支的具体内容日臻丰满与清晰. 时至今日, 几何表示主要包括参数曲面或隐式曲面的传统的连续表示和以网



格细分为特征的前卫的离散表示;几何造型主要包括曲面造型与实体造型,曲面造型又包括连续造型(插值,拟合,逼近)和离散造型(网格重建,简化,分割,拼接,编辑,变形等);几何计算主要包括曲面或网格的位置、值域、距离、交集、并集、延拓、升阶、细分、重建、调配、凸包、凸性、曲率、对称性、归一性、光滑性、光顺性、可展性、单调性、保形性、极小性、调和性、再生性、束汇性、包络性、变差缩减性、导矢、导矢界、积分、测地线、曲率线、渐近线、最优参数、形状参数等的计算或判断;几何逼近主要包括曲线曲面的等距逼近、降阶逼近、可展逼近、极小逼近、细分逼近、线性逼近、合并逼近、渐进迭代逼近、区间/圆域/球域逼近、有理曲线曲面及其导矢的多项式逼近、超越曲线曲面的有理多项式/C-Bézier逼近,以及参数曲线曲面的 Ribs-Fans 分解等;几何变换主要包括 Möbius 参数变换、基变换、坐标变换、对偶变换、全正变换、割角变换、等距变换、调和变换、测地变换、参数曲面与隐式曲面的互化、参数曲面与网格曲面或点云曲面的互化等等;例如, CAGD 中,最常用的多项式基之间,相应的曲线曲面之间,其主要转换关系可用下图来表示:



基于几何计算与几何逼近的重要性, 10 多年来, 有关研究得到了迅猛的发展. 本书第一章至第十章、第十一章至第十八章分别是我们开展这两方面研究的成果交汇与凝聚.

在几何计算与逼近的研究日隆月盛之际, 随着激光扫描技术的日渐完善和高档摄录设备的日趋价廉, 随着人们对电子消费的需求升级和对数字媒体的青睐日增, 一个值得注意的几何建模新动向是数字几何处理 (DGP: Digital Geometry Processing) 的研究热潮犹如异军突起, 大气磅礴, 令人刮目相看. 三维 (3D) 数字几何媒体在逆向工程、工业制造、数字娱乐、电子商务、生物医药、数字文化遗产保护等领域得到了普遍的应用, 并正在产生深远的影响. DGP 业已成为计算机图形学、计算机视觉、数字信号处理等学科的一个前沿领域和热门课题.

数字几何, 即三维几何模型, 系指随着三维扫描获取技术的发展而出现的继一维的声音数据、二维的图像数据以及三维的视频数据之后的一种新的数字媒体形式 (引自: *Digital Geometry Processing. SIGGRAPH Course, 2005*). 三维 DGP 旨在用计算机对扫描仪所获取到的三维几何数据进行建模、结构分析、数据优化等处理, 包括几何数据的获取、几何模型的处理以及几何形状的分析. 传统 DGP 主要包括点云获取、数据配准、几何表示、曲面重建、光顺去噪、简化、多分辨率分析、重采样、重网格化、参数化、传输压缩、纹理映射与合成、动画与变形、形状分解、模型匹配与检索等 (引自: Botsch M, Kobbelt L, Pauly M, Alliez P, Levy B. *Polygon Mesh Processing*. A K Peters, Ltd., 2010). 随着三维数据的日益增多及各种三维模型数据库的建立, 三维几何形状的分析 and 理解日益成为当前 DGP 的热点问题, 包括三维形状的语义分割和理解、视觉特征检测、对称检测与分析、模型的感知构建、形状的语义匹配和基于内容的检索等等.

数字几何所描述的对象是三维物体的表面几何, 且以三维曲面为主要表达形式. 有别于本书前十八章所讨论的那些连续曲面形式, DGP 中研究得最多的是以三角网格 (或点云) 来表达的三维几何数据. 三角网格是空间中连续曲面的一种离散化表达方式, 采用分片线性的三角片组合对曲面进行逼近拟合, 使之能够适应计算机处理过程中对性能、效果的需求. 与参数或隐式等其他曲面表达方式相比, 三角网格由于其极高的自由度、简洁的数据结构、快速的渲染过程等优点而得到了广泛应用.

鉴于数字几何处理的显要地位和三角网格的担纲作用, 10 多年来, 国内外学者对三角网格 DGP 的研究情有独钟, 早已形成一道亮丽的风景线. 本书安排从第十九章至第二十六章的篇幅, 重点展示我们在这方面的研究成果.

上面介绍了全书内容, 下面再简述其写作过程. 本书共有 26 章. 首先由王国瑾教授拟定各章内容和细目, 与合作者进行了充分的讨论和修改. 此后, 王国瑾教授撰写了第一章至第十九章, 刘利刚教授撰写了第二十章至第二十

六章，最后由王国瑾教授负责全书的统稿、润色和校订。在写作中，作者遵循了由浅入深的原则，所有必要的基本概念均在各个章节的开始部分，用浅显的语句作简要介绍，并一一注明文献的线索；这样，即使是 CAGD 和 CG 的门外汉，亦可在短期之内加盟入室，一窥堂奥。

本书可供高等院校计算机科学与工程系、应用数学系、信息与数据科学系、机械工程系、航空航天、舰船、汽车、模具、机器人制造、建筑、测绘、勘探、气象、公路铁道设计、服装鞋帽设计、工业造型、数字娱乐、数字通信、电子商务、数字文化遗产保护、工艺美术、生物、医学图像处理等专业的广大师生和研究生阅读；对从事计算机图形、计算机视觉、数字信号处理、数字视频与多媒体方面相关软件的开发人员，对从事工业产品外形设计、制造与工艺系统研制的计算机工作者，对从事与曲面造型、三维大数据建模、三维大数据处理有关理论研究与工程应用的广大科技人员，也有较大参考价值。

在书稿行将付梓之际，作者不禁回忆起科研组师生在创造本书成果时那些刻骨铭心的日日夜夜：欧阳楼机房的彻夜灯光下，我们尝遍了数学推理与编程验算的酸甜苦辣；西子湖畔的求是校园里，我们洒下了辛勤笔耕与穷幽极微的滴滴汗水；每当在攻关中有了新奇的发现，特别是看到草稿纸上一排排密密麻麻的方程式化作了荧光屏中那一帧帧色彩绚烂的曲面变形动画，与预想结果不谋而合时，大家顿时齐声欢呼，其舒畅之情，恰似在盛夏酷暑吃了哈根达斯！对本书成果作出创造性贡献的科研组成员（按获得博士学位的先后为序）为：陈国栋，陈动人，张宏鑫，张景峤，蔺宏伟，章仁江，寿华好，潘建江，董辰世，潘永娟，成敏，胡倩倩，计忠平，赵宏艳，徐惠霞，蔡华辉，陈中贵，张磊，辛士庆，胡建伟，周联，陈军，陈仁杰，张冬梅，蔡鸿杰，周世哲，孟敏，陈杰，刘刚，刘羽，徐寅，金勇，童晶，吴金亮，朱薇，黄伟贤，吴花精灵，李果，郑翰林，樊鲁斌，胡瑞珍，张威；（按获得硕士学位的先后为序）解本怀，蒋素荣，方惠兰，宋文豪，李宏坤，张兴旺，陈笑，任绍忠，王维国，喻春明，田奕丰，杜文超，支德佳，史艳会，王宗政，刘堃，金聪健，韩晓光，沈小勇，周瑾。

在书稿行将付梓之际，作者还想起了以“推敲”两字闻名于世的唐朝诗人贾岛所作的《剑客》一诗：“十年磨一剑，霜刃未曾试，今日把示君，……”。自从首本专著问世以来，科研组正是历经了长达十二寒暑的成果积淀；今天，我们再次把磨炼的成果集成一册呈示读者诸君，其拳拳之心，就是渴望能为业界大众贡献绵薄。回首书稿的写作，作者虽致力于条分缕析，穷源推本，力图由繁返约，厚积薄发，然而因才疏思涩，总不时有短绠汲深之感，书中鲁鱼亥豕之处恐在所难免，祈望读者同仁不吝指正。

本书的写作得到了国家自然科学基金（NSF No. 61070065, 61222206）的资助，本书的出版得到了广州中望龙腾软件股份有限公司的鼎力资助，谨此一并致以衷心的感谢。广州中望龙腾软件股份有限公司是我国 CAD 软件龙头

企业,拥有完全自主知识产权的 CAD/CAM 技术,该公司拥有的 OveriDrive™ 几何内核,是世界领先的三维 CAD 几何内核引擎之一. 作者衷心希望有更多的产业单位来关心与支持学术研究,更期盼本书的理论成果能尽可能为产业界采用,让中国的几何建模与数字媒体事业进一步走向繁荣,走向世界.

2014 年 5 月 作者谨识于  
浙江大学 求是园 欧阳纯美楼



# 目 录

## 几何计算

第一章 可展曲面的表示与计算	1
1.1 可展函数曲面	3
1.1.1 三角域上 $n$ 次 Bézier 函数曲面的可展条件	3
1.1.2 三角域上二次 Bézier 函数曲面的可展条件	4
1.1.3 矩形域上 $n \times m$ 次 Bézier 函数曲面的可展条件	5
1.2 可展参数曲面	7
1.2.1 三角域上 $n$ 次 B-B 参数曲面的可展条件	7
1.2.2 三角域上二次 B-B 参数曲面的可展条件	9
1.2.3 矩形域上 $n \times m$ 次 B-B 参数曲面的可展条件	11
1.3 可展代数曲面	12
1.3.1 $n$ 次代数曲面的可展条件	13
1.3.2 二次代数曲面的可展条件	15
1.3.3 可展代数曲面的工程应用	16
1.4 利用过定曲线的曲面束设计可展曲面	17
1.4.1 定曲线为一般空间曲线	17
1.4.2 定曲线为曲面上等参测地线	19
主要文献	20
参考文献	21
第二章 极小曲面及调和曲面的表示与计算	23
2.1 调和与双调和 Bézier 曲面	24
2.1.1 调和 Bézier 曲面的构造方法及证明	24
2.1.2 双调和 Bézier 曲面的构造方法及证明	26
2.2 $r$ 调和与基于高阶 PDE 的 Bézier 曲面	30
2.2.1 三调和 Bézier 曲面的构造方法及证明	30
2.2.2 $r$ 调和 Bézier 曲面的构造	36
2.2.3 基于高阶 PDE 的 Bézier 曲面	38
2.3 有理调和 Bézier 曲面与调和 B 样条曲面	40
2.3.1 有理调和与有理双调和 Bézier 曲面	40
2.3.2 双三次调和 B 样条曲面	40
2.4 有理极小 Bézier 曲面与极小 B 样条曲面	47