拓展知识技能

解剖经典题型

荟萃解题方法

提升思维品质

基础篇

高校自主招生考试直通车

数学（高二）

张雪明　编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

责任编辑 蒋可玉
郁金豹
封面设计 陈燕静
责任营销 张苏明

高校自主招生考试直通车**基础篇**系列

数学（高一） 数学（高二） 物理思维方法 英语阅读

ISBN 978-7-313-10571-4

9 787313 105714 >

定价：39.00元

高校自主招生考试直通车

基础篇·数学(高二)

张雪明 编著

上海交通大學出版社

内容提要

本书有25个专题组成，对高二学习阶段的数学知识点及思维方法进行较为详尽的梳理和必要的拓展．每个专题有知识要点、例题和练习组成．书末附有练习答案和较为详尽的解析．

本书对高中生参加高校自主招生考试、高考及高中阶段的各类考试都有参考价值，对高中生数学学科的分析问题，思维方式，提高解题能力，从而在高校自主招生考试、高考和高中阶段各类考试中取得优异的成绩．

图书在版编目(CIP)数据

高校自主招生考试直通车．基础篇．数学．高二／张雪明编著．—上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10571-4

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第266035号

高校自主招生考试直通车基础篇·数学(高二)

编　　著：张雪明
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海交大印务有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：16.25
字　　数：288千字
版　　次：2013年12月第1版　　印　　次：2013年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-10571-4/G
定　　价：39.00元

前言

“高校自主招生考试直通车·数学系列”有《高校自主招生考试直通车基础篇·数学(高一)》(以下简称《基础篇·数学(高一)》;《高校自主招生考试直通车基础篇·数学(高二)》(以下简称《基础篇·数学(高二)》)和《高校自主招生考试直通车·数学》(以下简称《直通车·数学》).

《基础篇·数学(高一)》和《基础篇·数学(高二)》这两本书在于知识拓展,重视积累;而《直通车·数学》在于实战演练,重视冲刺.

《基础篇·数学(高一)》和《基础篇·数学(高二)》具有特点:

系统性——保证课程的自身逻辑完整.

丰富性——对课本中已有的内容一般不再重复阐述,但依据自主招生考试和高考的要求,对于拓展知识要求到位,齐全.

匹配性——内容结构尽可能与高中各时段的数学内容相匹配.

《直通车·数学》具有特点:

权威性——选题全部是考试真题,所以可以保证内容的导向不会出现偏差.

全面性——对国内主要考试联盟的试题积累齐全.

实践性——奠基篇的分类按实际考试的现实情况划分,便于读者把握考试重点难点;分类篇按考试年份提供真卷,便于读者进行必要的模拟演练.

时效性——根据需要及时改版,逐年把最新的内容添加进去.

高一读者已有知识储备偏少,可能会在学习中遇到因知识缺漏而无法解决的数学问题,虽然在问题编排中注意了这个问题,但估计依然在所难免,如果发生了这样的情况,没事,你只需要跳过去.

对属于中学教材的拓展性内容,由于自主招生的试题难度普遍较高,选配的练习题难度也比较高,所以为了方便读者学习,一般配有比较详细的解答;对自主招生涉及的高等数学内容往往考查比较简单,提供的练习也相对容易,为了不增加篇

幅,一般只配有简单的答案.

自主招生考试与普通高考并不相悖,只是在命题的重点、角度、指向、能力要求的层次等方面有所不同罢了.数学各部分的内容都是相通的,适当地拓展学习,对你数学学科,包括应试能力的提高大有好处.即便你的数学基础不是很好,也可以使用本书,前提是你必须有足够的学习激情和接受挑战的勇气!

另外,本书也适合作为重点高中的各种提高班,如理科班、创新班的教材.

编 者

目录

§01 函数的极限

一、要点

数列极限

数列极限是定义函数极限的基础，主要内容请参考教材.

邻域 设 a 与 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做这个**邻域的中心**，δ 叫做这个**邻域的半径**，记为

$$U_\delta(a)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}_\delta(a)$.

自变量趋向有限值时函数的极限定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的正数 ε，不论它多么小，总存在相应的正数 δ，使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

简述为"$\varepsilon-\delta$"定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.（其中 $\forall$ 表示任意，$\exists$ 表示存在.）

自变量趋向有限值时函数的极限几何意义 任意给定一正数 ε，作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，存在着点 x_0 的一个去心 δ 邻域 $\mathring{U}_\delta(x_0)$，当 x 属于 $\mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间，如图 1.1 所示.

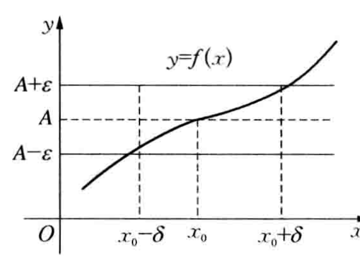

图 1.1

左极限 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $x_0-\delta<$

$x < x_0$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A.$$

右极限 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A.$$

定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$

自变量趋向无穷大时函数的极限定义 如果对于任意给定的正数 ε,总相应存在正数 X,使得满足不等式 $|x| > X$ 的一切 x,所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (x \to \infty).$$

几何意义 任意给定一正数 ε,作平行于 x 轴的两条直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$,则总存在着一个正数 X,使得当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时,函数 $y = f(x)$ 的图形位于这两直线之间,如图 1.2 所示.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 的情形

任给 $\varepsilon > 0$,存在 $X > 0$,当 $x > X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 的情形

任给 $\varepsilon > 0$,存在 $X > 0$,当 $x < -X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

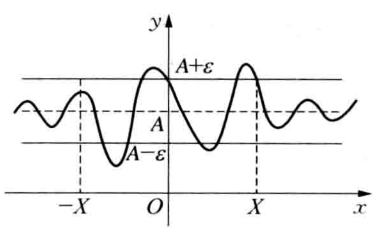

图 1.2

定理 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

水平渐近线 如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$,则直线 $y = c$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

铅直渐近线 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,则直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

极限的四则运算定理 设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$,则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$
$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{其中 } B \neq 0.$$

复合函数的极限运算法则 设函数 $u = \varphi(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在且等于 a,即 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$,但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$,又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x \to x_0$ 时的极限也存在,且 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u \to a} f(u) = A$.

单调有界准则 单调有界数列必有极限.

柯西极限存在准则(柯西收敛原理) 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是对于任意给定的正数 ε,存在着这样的正整数 N,使得当 $m > N$, $n > N$ 时,恒有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ ($\mathrm{e} = 2.718\,28\cdots$).

对第一个重要极限的证明:

先证一个重要不等式 $|\sin x| < |x|$, $\forall x \neq 0$ (当 $x = 0$ 时, $|\sin x| = |x| = 0$).

当 $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{2} > 1 \geqslant |\sin x|$ 时,显然不等式成立. 以下证 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 的情况.

先看 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. 如图 1.3 所示,在单位圆中, AD 为圆的切线. 因为

$$\triangle AOB \text{ 面积} < \text{扇形} \widehat{AOB} \text{面积} < \triangle AOD \text{ 面积},$$

即

$$\sin x < x < \tan x.$$

由上式得 $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$,即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

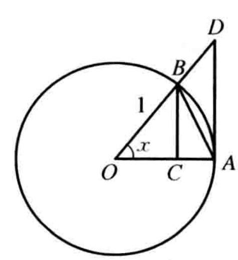

图 1.3

当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$时，在上式中用$-x$代替x，不等式不变，所以对$\forall 0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$，有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

特别地，此时$\dfrac{\sin x}{x}=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<1$，即$|\sin x|<|x|$.

以下用夹逼准则证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 先证$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，即要证$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$. 因为

$$0\leqslant 1-\cos x=2\left|\sin\frac{x}{2}\right|^2\leqslant 2\left|\frac{x}{2}\right|^2\to 0\ (x\to 0),$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，又$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，由夹逼准则即可证得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注 (1) 在运用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$这一重要极限时，可将所要求的极限化为如下的标准形式：

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\quad 或\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)}=1.$$

(2) 由上述证明可得到$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\tan x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{0}{1}=0$.

对第二个重要极限的证明：

先考虑数列情形：

设$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，则数列$\{x_n\}$必收敛，其极限记为e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

证明 由于$n+1$个正数，1，$\underbrace{1+\dfrac{1}{n},\cdots,1+\dfrac{1}{n}}_{n个}$的几何平均值为$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$，

而其算术平均值为 $\dfrac{1+n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}$，因此由平均值的不等式有

$$1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\geqslant\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},$$

所以
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

即 $x_{n+1}\geqslant x_n$，所以$\{x_n\}$单调递增.

又因为 $n+2$ 个正数 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，$\underbrace{1+\dfrac{1}{n},\cdots,1+\dfrac{1}{n}}_{n\text{个}}$ 的几何平均值是 $\sqrt[n+2]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}$，算术平均值是 $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+2}=1$，因此有

$$1\geqslant\sqrt[n+2]{\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}},\quad 即\quad \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leqslant 1,$$

于是 $x_n\leqslant 4$. 因此$\{x_n\}$为单调递增有上界的数列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 把该极限值记为 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$$

再考虑函数情形：

证明 先考虑 $x\to+\infty$，不妨设 $x>1$. 因为$[x]\leqslant x<[x]+1$，所以

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

又当 $x\to+\infty$ 时，整数$[x]\to+\infty$，由夹逼准则和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 即得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

当 $x\to-\infty$ 时，令 $t=-x$，则 $t\to+\infty$，此时

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right),$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

注 令 $\frac{1}{x}=t\to 0$，可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 的等价形式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 对这一重要极限，在实际应用时，可将所要求的极限配凑成标准形式：

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}.$$

常见的等价无穷小(以下等价无穷小均是在 $x\to 0$ 时的情况)

$$\sin x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ \mathrm{e}^{x}-1\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}.$$

连续的定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U_{\delta}(x_0)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

连续的定义 2 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

左连续 若函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 内有定义,且

$$f(x_0-0)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

右连续 若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 内有定义,且

$$f(x_0+0)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

二、例题

(一) 数列极限

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$.

解析 因为 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-(-2)^n}{2\cdot 3^n+3\cdot 2^n}$.

解析 $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-(-2)^n}{2\cdot 3^n+3\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[3-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}{3^n\left[2+3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}=\frac{3-0}{2+3\cdot 0}=\frac{3}{2}.$$

例 3 设 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, k, m\in\mathbf{N}^+$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}$.

解析 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^m}\cdot\frac{a_0+a_1\cdot\dfrac{1}{n}+\cdots+a_k\cdot\dfrac{1}{n^k}}{b_0+b_1\cdot\dfrac{1}{n}+\cdots+b_m\cdot\dfrac{1}{n^m}}$$

$$=\begin{cases}0, & k<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=m,\\ \infty, & k>m.\end{cases}$$

例 4 设 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+n^2+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n^2+n}}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 因为 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^4+n^2+n}}<x_n<\dfrac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1+0}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{n^4+n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+0}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2},$$

所以由夹逼准则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

例 5 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+2)\log_2(n+2)-2(n+1)\log_2(n+1)+n\log_2 n]=$________.

答案 0.

解析 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log_2\dfrac{(n+2)^{n+2}\cdot n^n}{(n+1)^{2(n+1)}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\left[\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right]\right\}$$

$$=\log_2\left(e\cdot\frac{1}{e}\cdot 1\right)=0.$$

例 6 (清华大学) 设$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为 a,小数部分为 b.

(1) 求 a, b;

(2) 求 $a^2+b^2+\frac{ab}{2}$;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b+b^2+\cdots+b^n)$.

解析 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx 2.7$.

(1) $a=2$, $b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(2) $a^2+b^2+\frac{ab}{2}=4+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=5$.

(3) 由于 $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b+b^2+\cdots+b^n)=\frac{b}{1-b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

例 7 (北京大学) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 定义如下:$a_1=1$, $a_2=a_3=2$, $a_4=a_5=a_6=3$, …

(1) 给定自然数 n,求使 $a_l=n$ 的 l 的范围;

(2) 令 $b_m=\sum\limits_{l=1}^{2m^2}a_l$,求 $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{b_m}{m^3}$.

解析 (1) 使 $a_k\leqslant n-1$ 的 k 的个数为 $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$,故 $l\in\left[\frac{n(n-1)}{2}+1, \frac{n(n-1)}{2}+n\right]$.

(2) 使 $a_k\leqslant 2m$ 的 k 的个数为 $1+2+\cdots+2m=\frac{2m(2m+1)}{2}=2m^2+m$,而使$a_k=2m$ 的 k 有 $2m$ 个,即 b_m 中有 1 个 1,2 个 2,…,$2m-1$ 个 $2m-1$,m 个 $2m$,所以 $b_m=1^2+2^2+3^2+\cdots+(2m-1)^2+m\cdot 2m=\frac{(2m-1)m(4m-1)}{3}+2m^2$.

故 $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{b_m}{m^3}=\frac{8}{3}$.

例 8 (清华大学) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$, $f(2x)-f(x)=x^2$,求 $f(x)$.