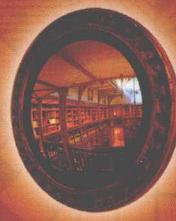
FARMING-READING NOTES

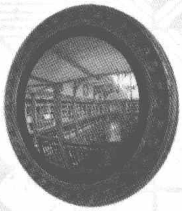


耕读笔记（上卷）

一位农民数学爱好者的初数探索

● 邓寿才 著

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

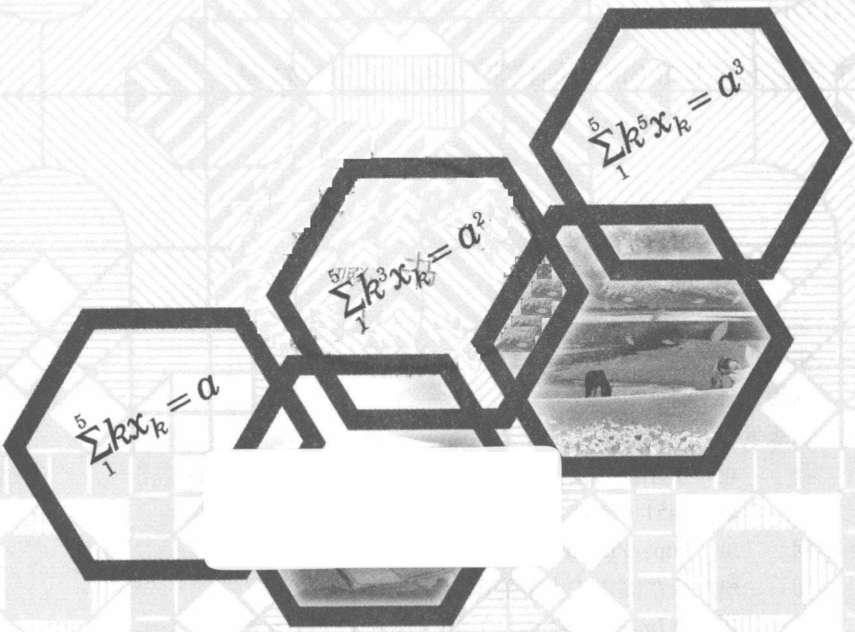


FARMING-READING NOTES

耕读笔记（上卷）

——一位农民数学爱好者的初数探索

● 邓寿才　著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分八个部分，每部分相对独立成文. 本书主要介绍了初等数学中的几类数列和不等式题目，同时给出了详细的解答，有些题目给出了多种证明或解答方法，得到了新的结论，并进行了推广.

本书适合初等数学爱好者阅读研究.

图书在版编目(CIP)数据

耕读笔记：一个农民数学爱好者的初数探索. 上卷/邓寿才著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-5603-5275-6

Ⅰ.①耕… Ⅱ.①邓… Ⅲ.①初等数学-普及读物 Ⅳ.①O12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 067342 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 12.5　字数 235 千字
版　　次　2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5275-6
定　　价　28.00 元

◎ 作者简介

邓寿才老师于1962年7月13日生于四川省泸州市纳溪区上马镇八角仓村(原文昌乡银坪村).1980年上马高中毕业后回家务农(现为百度收录人物).在家乡代理过中小学课程,担任过农村基层干部,在北京餐饮业做过会计,砖厂做过苦工,在山洞拉过煤,在建筑社做过苦工.

在广东中山市东升求实学校任教两年,从2010年秋至今在成都优优数学学校和成都聚名师学校(共28个校区)担任数学教学总监.在2011年和2012年邓老师两次参加四川省高中数学冬令营赛前培训,主讲不等式专题内容.

邓寿才老师的人生道路艰辛曲折,饱经风霜,但他一直坚强,从不向困难屈服.他不抽烟,不打牌,却喜欢利用业余时间从事文化活动,如看书学习,听歌唱歌,写旧体诗(至今创作诗篇一百余首,1995年以来在北京荣获首届诗歌大赛二等奖,在专辑《闪光的青春》上登载"敬纪邓盛钢的诗三百首"),但邓老师最喜欢的文化活动是学习数学,思考数学,研究数学,写作数学(欣赏和研究数学的美,妙,趣等特点).年轻时在《数学通讯》《数学通报》《中等数学》等期刊上发表论文.从2008年至今,在年刊《数学奥林匹克与数学文化》第2-6期(刘培杰主编,第6期将于2015年底出版,每期500余页)上发表六十余中长篇数学论文,目前已在哈尔滨工业大学出版社出版专著《新编平面解析几何解题方法》《数学奥林匹克不等式散论》,《数学奥林匹克不等式欣赏》.于2014年10月已出版《初等方程妙题集锦》,于2014年底出版《趣味初等数论选美与欣赏》《初等函数研究与欣赏》.在2015年底将出版《初

等数学解题方法全书》. 本集《耕读笔记》是邓老师的最新力作,倾注了他的全部心血与激情,具有结构完美、内容丰富、风格精彩等特点. 此外,2015 年底将出版他的代表作《三角不等式研究与欣赏》,《几何不等式研究与欣赏》. 届时读者可品味到书中的经典趣味,奇异与美妙. 感受到作品让人陶醉,令人神往!

◎ 目录

一　几道数列妙题的探讨 …… 1

二　以旧翻新——关于一道数列妙题的探讨 …… 34

三　两个趣味几何不等式的推广 …… 64

四　一个代数不等式的探讨 …… 69

五　一个创新不等式的研究 …… 72

六　一组代数不等式妙题的欣赏 …… 102

七　一类优美不等式的多解与初探 …… 142

八　一道国家集训队测试题的研究 …… 165

编辑手记 …… 178

一　几道数列妙题的探讨

我们知道,数列不仅是历届高考考查的重点内容,而且也是小学奥数、中学奥数考查的一部分. 在波光闪闪的数列题海上,有许多美妙趣味的数列妙题,美如海面漂浮闪光的宝珠,让人欣喜,让人偏爱. 本书略举几例进行探讨和欣赏,以之视为美的品味与享受.

(一)

例 1　数列 $\{a_n\}$ 定义如下:$a_1=a_2=a_3=1$

$$a_{n+1}=\frac{1+a_{n-1}a_n}{a_{n-2}}\quad (n\geqslant 3)$$

证明:此数列的每一项都是整数.

其实,在许多高中奥数资料中,都有这道妙题,让我们先欣赏漂亮的证明.

证明　我们用数学归纳法证明下面的三个结论同时成立:

(ⅰ)对任意 $n\in\mathbf{N}^+$,都有 $a_n,a_{n+1},a_{n+2}\in\mathbf{N}^+$;

(ⅱ)对任意 $n\in\mathbf{N}^+$,都有 $a_n\mid(1+a_{n+1}a_{n+2})$;

(ⅲ)对任意 $n\in\mathbf{N}^+$,都有 $a_{n+1}\mid(a_n+a_{n+2})$.

由 $a_4=2$ 知它们对 $n=1,2$ 成立.

现设它们对 $n-1,n$ 成立,考虑 $n+1$ 的情形,由递推式知

$$a_{n+3}=\frac{1+a_{n+1}a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{a_n}\left(1+a_{n+1}\cdot\frac{1+a_na_{n+1}}{a_{n-1}}\right)$$
$$=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+1}^2a_n}{a_{n-1}a_n}.$$

由(ⅲ)知

$$a_n\mid(a_{n-1}+a_{n+1})\Rightarrow a_n\mid(a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+1}^2a_n)$$

而由(ⅱ)知

$$a_{n-1} \mid (1+a_n a_{n+1}) \Rightarrow (a_{n-1}, a_n) = 1$$

并且

$$a_{n-1} \mid (a_{n-1} + a_{n+1}(1+a_n a_{n+1}))$$

这表明 $a_{n+3} \in \mathbf{N}^+$,因此对 $n+1$,(ⅰ)成立.

注意到

$$1+a_{n+2}a_{n+3} = 1+a_{n+2}\left(\frac{1+a_{n+1}a_{n+2}}{a_n}\right)$$

$$\Rightarrow a_n(1+a_{n+2}a_{n+3}) = a_n + a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+2}^2$$

结合(ⅲ)可知,有

$$a_{n+1} \mid a_n(1+a_{n+2}a_{n+3})$$

而由(ⅱ)知$(a_n, a_{n+1}) = 1$,故(ⅱ)对 $n+1$ 也成立,最后

$$a_{n+1} + a_{n+3} = a_{n+1} + \frac{1+a_{n+1}a_{n+2}}{a_n} = \frac{1+a_{n+1}(a_n + a_{n+2})}{a_n}$$

$$\Rightarrow a_n(a_{n+1} + a_{n+3}) = 1 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}a_{n+2} = a_{n+2}a_{n-1} + a_{n+1}a_{n+2}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} \mid a_n(a_{n+1} + a_{n+3})$$

由(ⅱ)知,$(a_n, a_{n+2}) = 1$,故(ⅲ)对 $n+1$ 也成立.

综上可知,结合(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)对所有 $n \in \mathbf{N}^+$ 都成立,所以对所有 $n \in \mathbf{N}^+$,都有 $a_n \in \mathbf{N}^+$.

回顾上述证明的技巧是:对结论(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)同时使用数学归纳法证明,反之,用数学归纳法证明结论(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)同时成立,而在具体证明时,“兵分三路,各个击破”,然后又将这三个结论“互相配合,互相支援”,漂亮地完成了证明,这种奇特的归纳技巧是独特的,新颖的.

观察数列$\{a_n\}$的递推式

$$a_{n+1} = \frac{1+a_{n-1}a_n}{a_{n-2}} \quad (n \geqslant 3) \tag{1}$$

其外形结构并不复杂,从 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ 和式(1)可计算出前几项依次为

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 7, a_7 = 11, a_8 = 26, \cdots$$

从这组数字中难以发现内在规律,猜测不出通项来,好奇心强烈的人也许会问:“题目中数列$\{a_n\}$的通项可求吗?”

分析 (ⅰ)由递推式(1)得

$$\begin{cases} a_{n+1}a_{n-2} = a_{n-1}a_n + 1 \\ a_{n+2}a_{n-1} = a_n a_{n+1} + 1 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1}a_{n-2} - a_{n+2}a_{n-1} = a_n a_{n-1} - a_n a_{n+1}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n+2} + a_n) \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n-2} + a_n} \quad (n \geqslant 3) \tag{2}$$

作代换,令

$$b_n=\frac{a_{n+2}}{a_n}\Rightarrow\begin{cases}b_1=\dfrac{a_3}{a_1}=1\\ b_2=\dfrac{a_4}{a_2}=2\end{cases}$$

于是,式(2)化为

$$b_{n-1}=\frac{1+b_n}{1+\dfrac{1}{b_{n-2}}}\Rightarrow\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\frac{1+b_n}{1+b_{n-2}}\quad(n\geqslant 3)$$

$$\Rightarrow\frac{b_{k-1}}{b_{k-2}}=\frac{1+b_k}{1+b_{k-2}}\quad(3\leqslant k\leqslant n)$$

$$\Rightarrow\prod_{k=3}^{n}\frac{b_{k-1}}{b_{k-2}}=\prod_{k=3}^{n}\left(\frac{1+b_k}{1+b_{k-2}}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{b_{n-1}}{b_1}=\frac{(1+b_{n-1})(1+b_n)}{(1+b_1)(1+b_2)}$$

$$\Rightarrow 6b_{n-1}=(1+b_{n-1})(1+b_n)$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{5b_{n-1}-1}{b_{n-1}+1}\quad(n\geqslant 2)\tag{3}$$

从式(3)知,数列$\{b_n\}$是分式线性递推数列,其不动点方程为

$$x=\frac{5x-1}{x+1}\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=2+\sqrt{3}\\ x_2=2-\sqrt{3}\end{cases}$$

又从递推式(3)可得

$$\frac{b_n-x_1}{b_n-x_2}=\frac{(5-x_1)b_{n-1}-(x_1+1)}{(5-x_2)b_{n-1}-(x_2+1)}=\frac{(3-\sqrt{3})b_{n-1}-(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})b_{n-1}-(3-\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow\frac{b_n-(2+\sqrt{3})}{b_n-(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})\cdot\frac{b_{n-1}-(2+\sqrt{3})}{b_{n-1}-(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})^2\cdot\frac{b_{n-2}-(2+\sqrt{3})}{b_{n-2}-(2-\sqrt{3})}$$

$$=\cdots=(2-\sqrt{3})^{n-2}\cdot\frac{b_2-(2+\sqrt{3})}{b_2-(2-\sqrt{3})}=(-1)(2-\sqrt{3})^{n-2}$$

$$\Rightarrow\frac{b_n-(2+\sqrt{3})}{b_n-(2-\sqrt{3})}=-(2-\sqrt{3})^{n-2}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})^{n-1}}{1+(2-\sqrt{3})^{n-2}}\quad(n\geqslant 1)$$

这即为数列$\{b_n\}$的通项公式.

(ⅱ)注意到数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的所有项均为正数,而且

$$b_1b_2\cdots b_{n-2}=\frac{a_{n-1}a_n}{a_1a_2}(n\geqslant 3)=a_{n-1}a_n\Rightarrow\ln a_{n-1}+\ln a_n=\ln(b_1b_2\cdots b_{n-2})\tag{4}$$

作代换,令

$$t_n=\ln a_n,B_{n-2}=\ln(b_1b_2\cdots b_{n-2})\quad(n\geqslant 3)$$

于是式(4)转化为

$$\begin{aligned}&t_n+t_{n-1}=B_{n-2}\quad(n\geqslant 3)\\&\Rightarrow(-1)^n t_n-(-1)^{n-1}t_{n-1}=(-1)^n B_{n-2}\\&\Rightarrow(-1)^k t_k-(-1)^{k-1}t_{k-1}=(-1)^k B_{k-2}\quad(3\leqslant k\leqslant n)\\&\Rightarrow\sum_{k=3}^{n}\left[(-1)^k t_k-(-1)^{k-1}t_{k-1}\right]=\sum_{k=3}^{n}(-1)^k B_{k-2}\\&\Rightarrow(-1)^n t_n-(-1)^2 t_2=\sum_{k=3}^{n}(-1)^k B_{k-2}\end{aligned}$$

注意到 $t_2=\ln a_2=\ln 1=0$ 得

$$\begin{aligned}t_n&=(-1)^n\sum_{k=3}^{n}(-1)^k B_{k-2}\\\Rightarrow\ln a_n&=(-1)^n\sum_{k=3}^{n}(-1)^k B_{k-2}\\\Rightarrow a_n&=\mathrm{e}^{f(n)}\end{aligned}\tag{5}$$

其中

$$f(n)=(-1)^n\sum_{k=3}^{n}(-1)^k B_{k-2}$$

$$B_{k-2}=\ln(b_1b_2\cdots b_{k-2})\quad(3\leqslant k\leqslant n)$$

式(5)即为数列$\{a_n\}$的通项.

通过上述探讨知,虽然数列$\{a_n\}$的递推式

$$a_{n+1}=\frac{1+a_{n-1}a_n}{a_{n-2}}\quad(n\geqslant 3)\tag{1}$$

显得简洁美观,但是它涉及连续四项 $a_{n-2},a_{n-1},a_n,a_{n+1}$ 的分式递推式,欲求出它的通项公式却颇费周折,让人感到“不经一番寒彻骨,怎得梅花扑鼻香.”

(二)

俄罗斯中学奥数中有一道非常优美的数列题:

例 2 在无穷数列$\{x_n\}$中,$x_1>1,x_1\in\mathbf{Q}^+$,且

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{[x_n]}\quad(n\in\mathbf{Q}^+)\tag{1}$$

求证:数列$\{x_n\}$中有无穷多个项为正整数.

可以说数列$\{x_n\}$中的各项均为正有理数，而且其递推式(1)并不复杂，非常简洁，但却含有高斯符号“[　]”，根据题目的结论知，无穷数列$\{x_n\}$中有无穷多项为正整数，那么余下的无穷多项均为正分数.

于是，我们试问：“数列$\{x_n\}$中哪些项才是正整数呢?”看来这个问题提得好，提得妙，但要准确地回答它，就不那么容易了.

“精诚所至，金石为开”，我们不妨投石问路；设无穷数列$\{x_n\}$中所有正整数的项依次为

$$x_{a_1},x_{a_2},\cdots,x_{a_n},\cdots$$

那么由下标组成的无穷正整数列$\{a_n\}$的通项可求吗?

这个新的问题虽然抽象，却具有抽象美、趣味美，让人产生美妙的联想…….

(ⅰ)当$x_1=m(m\geqslant 2,m\in\mathbf{N}^+)$时，利用递推式(1)进行推算

$$x_2=m+\frac{1}{m},x_3=m+\frac{2}{m},\cdots,x_m=m+\frac{m-1}{m}$$

$$x_{m+1}=x_m+\frac{1}{[x_m]}=(m+\frac{m-1}{m})+\frac{1}{m}=m+1,\cdots$$

如此继续下去，得

$$x_1=m,x_{m+1}=m+1,x_{2m+2}=m+2,x_{3m+4}=m+3$$
$$x_{4m+7}=m+4,\cdots,x_{a_n}=m+n-1 \tag{2}$$

其中下标数列$\{a_n\}$满足规律

$$a_1=1,a_2=m+1,a_3=2m+2,a_4=3m+4,a_5=4m+7,\cdots$$

它具有递推关系

$$a_{n+1}=a_n+(m+n-1)\quad(n\geqslant 1)$$
$$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=(m-2)+n\quad(n\geqslant 2)$$
$$\Rightarrow a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_n-a_1)+a_1$$
$$=(n-1)(m-2)+(2+3+\cdots+n)+1=(n-1)(m-2)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\Rightarrow a_n=(n-1)m+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\quad(n\geqslant 1)$$

这种情况说明：当$m\geqslant 2$为给定正整数即$x_1=m\geqslant 2$为整常数时，无穷数列$\{x_n\}$的第1项，第$m+1$项，第$2m+2$项，第$3m+4$项，第$4m+7$项，…，第a_n项，…均为正整数，且

$$x_{a_n}=m+n-1\in\mathbf{N}^+$$

(ⅱ)当$x_1\notin\mathbf{N}^+$时，设$x_1=m+\frac{q}{p}$，其中$m\geqslant 1,1\leqslant q<p,m,p,q\in\mathbf{N}^+$，且$(p,q)=1$.

下面分两种情况讨论：

(1°)当 $p|m$ 时，设 $m=rp(r\in\mathbf{N}^+)$有

$$x_1=rp+\frac{q}{p}=m+\frac{q}{p}$$

$$x_2=m+\frac{q}{p}+\frac{1}{rp}$$

$$x_3=m+\frac{q}{p}+\frac{2}{rp}$$

$$\vdots$$

$$x_{r(p-q)+1}=m+\frac{q}{p}+\frac{r(p-q)}{rp}=m+1$$

利用前面的结论，继续下去，将产生无穷多项正整数，其通项为

$$x_{T(k)}=m+k\quad(k\in\mathbf{N}^+)\tag{3}$$

其中 $$T(k)=r(p-q)+(k-1)m+\frac{1}{2}(k-1)k+1$$

也可以将式(3)改写为

$$x_{b_n}=m+n\quad(n\in\mathbf{N}^+)$$

其中

$$b_n=r(p-q)+(n-1)m+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

(2°)当 $p\nmid m$ 时，总存在一个正整数 k，使得 $p|(m+k)$，设 $k=\lambda p-m\in\mathbf{N}^+$，即 $m+k=\lambda p$.

仿照上面，继续操作

$$x_1=m+\frac{q}{p},x_{m+1}=m+1+\frac{q}{p}$$

$$x_{2m+2}=m+2+\frac{q}{p}$$

$$\vdots$$

$$x_{f(k+1)}=m+k+\frac{q}{p}$$

其中 $$f(k+1)=km+k$$

再继续操作下去，有

$$x_{f(k+1)+t+1}=m+k+\frac{q}{p}+\frac{t}{m+k}=m+k+\frac{q}{p}+\frac{t}{\lambda p}$$

取 $t=\lambda(p-q)\in\mathbf{N}^+$，且记

$$g(k+1)=G(k)=f(k+1)+\lambda(p-q)+1$$

$$x_{G(k)}=m+k+\frac{q}{p}+\frac{\lambda(p-q)}{\lambda p}=m+k+1$$

再继续操作下去将有

$$x_{G(k)+m+k+1}=m+k+2$$
$$x_{G(k)+2(m+k)+3}=m+k+3$$
$$x_{G(k)+3(m+k)+6}=m+k+4$$
$$\vdots$$
$$x_{G(k)+(h-1)(m+k)+C_h^2}=m+k+h$$

其中
$$C_h^2=\frac{1}{2}h(h-1)\quad(h=1,2,\cdots)$$

如果记 $\beta(k,h)=G(k)+(h-1)(m+k)+C_h^2$ 那么

$$x_{\beta(k,h)}=m+k+h \tag{4}$$

由于 h 可取所有正整数，因此 $\beta(k,h)$ 就有无穷多个正整数值，因此已知数列 $\{x_n\}$ 中，不论 x_1 取大于或等于 2 的正整数，还是取大于 1 的有理数，均有无穷多个正整数.

(ⅲ)式(4)中的下标比较庞大复杂，具体是

$$\beta(k,h)=G(k)+(h-1)(m+k)+C_h^2$$

其中

$$G(k)=f(k+1)+\lambda(p-q)+1$$
$$f(k+1)=km+a_{k+1}$$
$$a_{k+1}=\frac{1}{2}k(k-1)+1$$
$$C_h^2=\frac{1}{2}h(h-1),\lambda=\frac{m+k}{p}$$

即为
$$\beta(k,h)=km+\frac{1}{2}k(k-1)+2+\frac{m+k}{p}(p-q)+(h-1)(m+k)+\frac{1}{2}h(h-1)\quad(h=1,2,\cdots)$$

这一惊人的结果在考验人的耐心.

(ⅳ)若将递推式(1)改变为

$$x_{n+1}=[x_n]+\frac{1}{[x_n]}$$

与
$$x_{n+1}=[x_n]+\frac{1}{x_n}$$

显然不可能.

若将式(1)改为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{[x_n]} \tag{5}$$

那么情况又将如何呢?

为了探讨递推式(2),我们不妨先取

$$x_1=m\ (m\geqslant 2,m\in\mathbf{N}^+)$$

$$\Rightarrow x_2=m-\frac{1}{m}=(m-1)+(1-\frac{1}{m})$$

$$\Rightarrow x_3=(m-\frac{1}{m})-\frac{1}{m-1}$$

$$\Rightarrow x_4=(m-\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1})-\frac{1}{m-1}=m-\frac{1}{m}-\frac{2}{m-1}$$

$$=(m-1)+(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1})$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow x_{t+2}=m-\frac{1}{m}-\frac{t}{m-1}$$

令

$$\frac{1}{m}+\frac{t}{m-1}=1\Rightarrow t=\frac{(m-1)^2}{m}\notin\mathbf{N}^+$$

这表明当首项 x_1 取整数 $m\geqslant 2$ 时,往后数列 $\{x_n\}$ 的所有项均不为正整数.

再设 $x_1=m+\dfrac{q}{p}$,其中 $p,q,m\in\mathbf{N}^+$,且 $m\geqslant 1,1\leqslant q<p,(p,q)=1$,那么有

$$x_1=m+\frac{q}{p}\Rightarrow x_2=m+\frac{q}{p}-\frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow x_3=m+\frac{q}{p}-\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1}$$

$$\Rightarrow x_4=m+\frac{q}{p}-\frac{1}{m}-\frac{2}{m-1}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow x_{t+2}=m+\frac{q}{p}-\frac{1}{m}-\frac{t}{m-1}$$

令

$$\frac{q}{p}-\frac{1}{m}-\frac{t}{m-1}=-1$$

$$\Rightarrow t=\frac{m-1}{p}\cdot\frac{(p+q)m-p}{m} \tag{6}$$

注意到 $(m-1,m)=1$,观察式(6)知,欲使 $t\in\mathbf{N}^+$,必须 $p\mid(m-1)$,$m\mid p$,显然这是不可能的,因此 $t\notin\mathbf{N}^+$.

这表明,当 x_1 取大于 1 的正分数时,满足递推式(5)的无穷数列 $\{x_n\}$ 无正整数项.

综合上述,我们得到结论:

设 $\{x_n\}$ 为无穷正有理数列,且

$$x_1>1,x_{n+1}=x_n-\frac{1}{[x_n]} \tag{5}$$

如果首项 $x_1=m\geqslant 2(m\in\mathbf{N}^+)$,那么数列$\{x_n\}$只有一项 $x_1\in\mathbf{N}^+$ 为正整数;如果 $x_1>1$ 且 $x_1\notin\mathbf{N}^+$,那么对一切 n,数列$\{x_n\}$中没有正整数项.

(三)

1999 年全国高中数学联赛中有一道关于数列的妙题是:

例 3　给定正整数 n 和正数 M,对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列$\{a_n\}$,试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$的最大值.

我们先用四种方法解答本题.

解法一　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d,a_{n+1}=\alpha$,则

$$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=(n+1)\alpha+\frac{n(n+1)}{2}d$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\alpha+\frac{nd}{2}=\frac{S}{n+1}\\&\Rightarrow M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=(\alpha-nd)^2+\alpha^2\\&\qquad=\frac{4}{10}(\alpha+\frac{nd}{2})^2+\frac{1}{10}(4\alpha-3nd)^2\\&\qquad\geqslant\frac{4}{10}(\frac{S}{n+1})^2\\&\Rightarrow|S|\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}\end{aligned}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}(\alpha-nd)^2+\alpha^2=M\\4\alpha-3nd=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}\\d=\dfrac{4}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{N}}{n}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S&=(n+1)(\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{M}+\frac{n}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{M}}{n})=(n+1)\frac{5}{\sqrt{10}}\sqrt{M}\\&=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}\end{aligned}$$

且由于此时 $4\alpha=3nd$,故

$$a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{1}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2$$
$$=\frac{4}{10}\times\frac{10}{4}M=M$$
$$S_{\max}=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$

解法二 利用柯西(Cauchy)不等式有

$$\begin{aligned}S&=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+a_{2n+1})\\&=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+2a_{n+1}-a_1)\\&=\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)\\&\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{[3^2+(-1)^2](a_{n+1}^2+a_1^2)}\\&\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}\end{aligned}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}a_1^2+a_{n+1}^2=M\\\dfrac{a_{n+1}}{3}=\dfrac{a_1}{(-1)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-\dfrac{\sqrt{10M}}{10}\\a_{n+1}=\dfrac{3\sqrt{10M}}{10}\end{cases}\Rightarrow S_{\max}=\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$

解法三 利用三角换元,设

$$\begin{cases}a_1=\sqrt{M}\gamma\sin\theta\\a_{n+1}=\sqrt{M}\gamma\cos\theta\end{cases}\quad(0<\gamma\leqslant1,0\leqslant\theta<2\pi)$$

$$\Rightarrow S=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+a_{2n+1})=\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)$$

$$\gamma=\frac{n+1}{2}(3\sqrt{M}\gamma\cos\theta-\sqrt{M}\gamma\sin\theta)=\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}\cdot\gamma\cos(\theta+\varphi)$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}\gamma=1,\theta+\varphi=2\pi\\\tan\varphi=\dfrac{1}{3},\tan\theta=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-\dfrac{\sqrt{10M}}{10}\\a_{n+1}=\dfrac{3\sqrt{10M}}{10}\end{cases}\Rightarrow S_{\max}=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$

解法四 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,那么

$$\begin{aligned} S &= a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} \\ &= (a_1 + nd) + [a_1 + (n+1)d] + \cdots + (a_1 + 2nd) \\ &= \frac{n+1}{2}(2a_1 + 3nd) \end{aligned}$$

设 λ,μ 为待定系数,应用柯西不等式有

$$\begin{aligned} M(\lambda^2+\mu^2) &\geqslant [a_1^2 + (a_1+nd)^2](\lambda^2+\mu^2) \\ &\geqslant [\lambda a_1 + \mu(a_1+nd)]^2 = [(\lambda+\mu)a_1 + n\mu d]^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(\lambda^2+\mu^2) \geqslant [(\lambda+\mu)a_1 + n\mu d]^2 \quad (1)$$

令

$$\begin{cases} \lambda+\mu = n+1 \\ n\mu = \dfrac{3}{2}n(n+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2}(n+1) \\ \mu = \dfrac{3}{2}(n+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2+\mu^2 = \frac{10}{4}(n+1)^2$$

$$\Rightarrow |S| \leqslant \sqrt{(\lambda^2+\mu^2)M} = \frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M} \quad (2)$$

等号成立仅当

$$\begin{cases} a_1^2 + (a_1+nd)^2 = M \\ \left(\dfrac{a_1+nd}{a_1}\right)^2 = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_1| = \dfrac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{M} \\ |a_1+nd| = \sqrt{\dfrac{9}{10}M} \end{cases} \Rightarrow S_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$

本赛题不仅优美,而且具有趣味性. 它主要考查赛者如何灵活巧妙地应用等差数列的基本知识解题. 上述解法一的特点是巧妙配方,解法二的特点是巧妙应用柯西不等式,解法三的特点是巧妙应用三角代换,解法四的特点是巧妙应用待定系数. 总之,以上四种解法"八仙过海,各显神通",均有异曲同工之妙.

一种优美的解法,常常启发我们进行思考,然后将题目进行漂亮的推广,上面的解法四启示我们,本题可以推广为:

推广 1 设 M 为正常数,p,q,k,m 为给定的自然数,且满足 $0 \leqslant k < m$,$0 \leqslant p < \frac{1}{2}(m+k) \leqslant q$,指数 $\theta > 1$;等差正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{p+1}^{\theta} + a_{q+1}^{\theta} \leqslant M \quad (1)$$

求 $S = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{m+1}$ 的最大值.

显然,当取 $\theta = 2, p = 0, q = n, k = n, m = 2n$ 时,此推广即为本题.

解 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1,公差为 d,那么