考研数学

2016

必做986题

Necessary 986 Exercises for Math Exam

主编 杨超 姜晓千 方浩

一切伟大的思想和行动，
都有一个微不足道的开始！

数一、数二、数三混编
互鉴互补，避免遗漏重点题型

赠送 凭封底账号密码观看
重点讲解视频（详见封三）

中国政法大学出版社

考研数学必做986题

主　编　杨超 姜晓千 方浩

中国政法大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

考研数学必做 986 题:2016/杨超, 姜晓千, 方浩主编. —北京:中国政法大学出版社, 2015.2
ISBN 978-7-5620-5918-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①杨… ②姜… ③方… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 037893 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印	北京市平谷县早立印刷厂
开　本	710mm×1000mm　1/16
印　张	32
字　数	610 千字
版　次	2015 年 2 月第 1 版
印　次	2015 年 2 月第 1 次印刷
定　价	59.80 元

前　言

在考研数学的备考过程中，一般分为基础阶段，强化阶段和冲刺阶段。每个阶段选择不同的教材复习，做不同的难度的习题是很重要的，可以起到提高效率，建立信心，事半功倍的作用。

考生在基础阶段（3—5 月）一般使用同济大学出版社出版的高等数学，复习基本概念，基本原理，公式，并且做课后习题。课后习题有些不属于考纲内容，例如用极限的定义的证明题，近似计算等；有些课后题又过于简单。

强化阶段（6—10 月底），把握整体，形成体系，总结题型，方法，重点，难点。这个阶段应选择一本较好的习题集进行系统训练。要逐步学会灵活运用三基来解决问题，加强综合题的练习，以提高所学知识分析问题和解决问题的能力。

（考研数学必做 986 题）就是为了帮助考生在基础阶段，强化阶段所遇到的问题而编写的。全书分为高等代数，线性代数，概率论与概率论统计三部分，后两部分由姜晓千和方浩老师编写，每章节的内容又分基础题和强化题，这是本书的一大亮点，此书并没有只是把习题堆砌在一起，让学生分不清难度的差异，盲目乱做一番，效率不高，影响复习进度。本书的第二大亮点在于题本身的质量：全面，典型，不重不落，还有部分前瞻性的试题，之前只是在面授课堂中出现，这是我们整个团队多年教学智慧的汇总。

最后给各位广大考生在使用此书提几个建议：（历届考生的经验教训）

六忌：

（1）只看答案，不动笔练习。

（2）只背方法，不重理解

（3）只做难题，不重基础。

（4）做题翻书，不牢记公式

（5）闷头做题，不互相交流。

（6）突击复习，不持之以恒

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索，我们团队与广大考生一起努力与进步，预祝广大考生 2016 年金榜题名。

杨超

2015.1.27 广州

目　　录

第一部分

高等数学

第一章　函数

【百日筑基篇】

1. 证明：定义在对称区间$(-l,l)$内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$. 试求 $f(g(x))$，$g(f(x))$，$f[f(g(x))]$，$f[g(f(x))]$.

3. 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

5. 设 $f(x)=e^{\arcsin x}$，$f(\varphi(x))=x-1$，求 $\varphi(x)$ 的表达式和定义域.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a>0)$.

求证：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.

7. 求下列函数的反函数：

(1)$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\quad(x>0)$；

(2)$y=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0;\\ e^x, & x>0.\end{cases}$

8. 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 和 $f(x)$ 都是$(-\infty,+\infty)$内的单调增加函数. 若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，试证明必有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

9. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|,$$

试证明：$F(x)=f(x)+x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

【高分进阶篇】

1. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数且 $|a|\neq|b|$，求函数 $f(x)$ 的解析式并证明它是奇函数.

2. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}e^{\sin x},x\neq 0$ 是 (　　)

(A) 周期函数　　(B) 奇函数

(C) 单调函数　　(D) 有界函数

3. $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}\quad(-\infty<x<+\infty)$ 是 (　　)

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 偶函数

4. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，则其中为奇函数的是 (　　)

(A) $f[f(x)]$　　(B) $g[f(x)]$

(C) $f[g(x)]$　　(D) $g[g(x)]$

5. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=x-[x]$ 是 (　　)

(A) 无界函数　　(B) 周期为 1 的周期函数

(C) 单调函数　　(D) 偶函数

6. 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x)))}_{n\text{次复合}}$.

7. 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ (　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

【百日筑基篇答案】

1.【证】设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的任一函数，令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$\psi(-x)=-\psi(x)$，而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$.

2.【解】(1) 令 $x+1=u$，则 $g(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1$，故 $g(x)=x^2-x+1$.

由于对一切 x 有 $x^2-x+1>0$，所以

$$f(g(x))=g(x)=x^2-x+1.$$

(2) $g(f(x))=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(3) 由于 $f(g(x))=x^2-x+1>0$，

所以 $\quad f[f(g(x))]=f(g(x))=x^2-x+1.$

(4) 由于 $g(f(x))>0,\forall x\in\mathbf{R}$.

所以

$$f[g(f(x))]=g(f(x))=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

3.【解】设 $t=\frac{x-1}{x}$，得 $x=\frac{1}{1-t}$，代入原式得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},$$

即
$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x}, \qquad ①$$

再设 $\frac{n-1}{n}=\frac{1}{1-x}$，可得 $x=\frac{1}{1-n}$，代入上式得

$$f\left(\frac{1}{1-n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{2(n-1)}{n},$$

即
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x},$$

即
$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=-f\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{2(x-1)}{x}. \qquad ②$$

将 ② 式代入 ① 式得

$$f(x)-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x^2-x+1)}{x(1-x)}. \qquad ③$$

由已知式和 ③ 式得 $\quad f(x)=x+\frac{x^2-x+1}{x(1-x)}.$

4.【解】$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\e^0, & |x|=1,\\e^{-1}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\1, & |x|=1,\\e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

5.【解】由 $f(x)=e^{\arcsin x}$ 得 $f(\varphi(x))=e^{\arcsin\varphi(x)}$，

又 $f(\varphi(x))=x-1$，

所以
$$e^{\arcsin\varphi(x)}=x-1.$$
即
$$\arcsin\varphi(x)=\ln(x-1),\varphi(x)=\sin[\ln(x-1)],$$
因 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\ln(x-1)\leqslant\frac{\pi}{2}$，且 $x-1>0$，解得

$\varphi(x)$ 的定义域为$[1+e^{-\frac{\pi}{2}},e^{\frac{\pi}{2}}+1]$.

6.【证】
$$\begin{aligned}&f(x+y)+f(x-y)\\=&\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})\\=&\frac{1}{2}a^x(a^y+a^{-y})+\frac{1}{2}a^{-x}(a^y+a^{-y})\\=&\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})\\=&2f(x)\cdot f(y).\end{aligned}$$

7.【解】(1) 由原式解出 $x=y\pm\sqrt{y^2-1}$. 因 $x>0$，故取 $x=y+\sqrt{y^2-1}$. 反函数为
$$y=x+\sqrt{x^2-1}\quad(-\infty<x<+\infty).$$
(2) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\\ln x, & x>1.\end{cases}$

8.【证】设 x_0 为三个函数公共定义域内的任一点，则有 $\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0)$. 由题设知 $f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$，$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)]$，于是 $\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$. 同理可证 $f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$. 由 x_0 的任意性推得结论成立.

9.【证】任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，有
$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1,$$
而
$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1,$$
所以
$$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2.$$
即 $F(x_1)<F(x_2)$，故 $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

【高分进阶篇答案】

1.【解】令 $t=\dfrac{1}{x}$,则已知方程变为 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=c\,t$.

与此等价可以表示成为 $af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$,联立,得方程组

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}, & ① \\ bf(x)+af\left(\dfrac{1}{x}\right)=cx, & ② \end{cases}$$

将 ① 式两边乘 a,② 式两边乘 b,并相减,得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ca}{x}-bcx,\ f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

由于$\dfrac{a}{x}$,bx 是奇函数,故函数 $f(x)$ 是奇函数.

2.【解】应选(D).

方法一:排除法.

(1) 虽然 $\sin x$ 是周期函数,但$\dfrac{\sin x}{x}$不是周期函数,所以 $f(x)$ 不是周期函数,排除选项(A);

(2) 因为 $f(-x)=\dfrac{-\sin x}{-x}e^{-\sin x}=\dfrac{\sin x}{x}e^{-\sin x}\neq -f(x)$,所以 $f(x)$ 不是奇函数,排除选项(B);

(3) 当 $x=k\pi\neq 0$ 时,$f(x)=0$;当 $x\neq k\pi$ 时,$f(x)\neq 0$,故 $f(x)$ 不是单调函数,排除选项(C);

由排除法知选(D).

方法二:直接验证 $f(x)$ 是有界函数.

因为 $f(x)$ 为初等函数,所以要验证 $f(x)$ 为有界函数,只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ 均存在.

因为
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}e^{\sin x}=1.$$

且
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}e^{\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot(\sin x\cdot e^{\sin x})=0,$$

所以 $f(x)$ 为有界函数,故选(D).

3.【解】应选(D).

4.【解】应选(A).

5.【解】应选(B).

$y=x-[x]$ 的图像如图 1-1-1 所示.

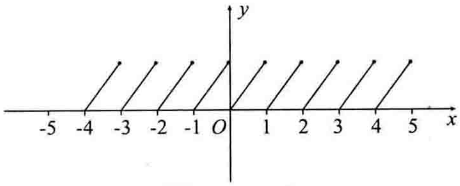

图 1－1－1

6.【解】 $$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

根据 $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 的特点,可考虑用数学归纳法推算.设

$$f_k(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x)))}_{k\text{次复合}}=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则 $$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

由数学归纳法知,对任何自然数 n,都有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

7.【解】应选(D).

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ 2+f(x), & f(x)>0.\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$;当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant 0$,故

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-(-x), x\geqslant 0,\\ 2+x^2, \quad x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

所以选(D).

第二章　极限与连续

【百日筑基篇】

1. 下列说法是否可作为"数列$\{x_n\}$以a为极限"的定义？

(1) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数N，当$n \geqslant N$时，$|x_n - a| \leqslant \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数N，当$n \geqslant N$时，$|x_n - a| < k\varepsilon$，其中$k > 1$为常数.

(3) $\exists$ 正整数N，$\forall \varepsilon > 0$，当$n \geqslant N$时，$|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$总存在正整数N，当$n \geqslant N$时，恒有$|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的　　(　　)

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

3. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$\{y_n\}$为任意数列，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$?举出适当的例子.

4. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有　　(　　)

(A) $a_n < b_n$对任意n成立　　(B) $b_n < c_n$对任意n成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$不存在

5. 当$x \to 0$时，$e^{x^2} - (ax^2 + bx + c)$是比$x^2$高阶的无穷小，其中$a,b,c$是常数，则　　(　　)

(A) $a = 1, b = 2, c = 0$　　(B) $a = c = 1, b = 0$

(C) $a = c = 2, b = 0$　　(D) $a > b = 1, c = 0$

6. 请讨论以下问题：

(1) 若$\lim f$存在，$\lim g$不存在，试问$\lim(f + g)$，$\lim(f \cdot g)$一定存在吗？

(2) 若$\lim f$和$\lim g$均不存在，讨论以上同样的问题.

7. 求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

8. 求$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$.

9. 求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

10. 求$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

11. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

12. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

13. 求$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

14. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

15. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\ln\cos x}$.

16. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0)$.

17. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}\right)$.

18. 求$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

19. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

20. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

21. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

22. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

23. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\ln(1+2x)^3}$.

24. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

25. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

26. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

27. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^4}$.

28. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}$.

29. 当$x\to 0$时，$\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t^2)\,dt$是$(1-\cos x)^{\frac{1}{3}}$的几阶无穷小？

30. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

31. 把$x\to 0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$按从

低阶到高阶的顺序排列.

32. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

33. 设$A\geqslant 0,B\geqslant 0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n+B^n}$.

34. 证明数列$\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\cdots$有极限.

35. 设$a>0,x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}},\cdots$. 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

36. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$,求$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

37. 设$f(1)=1,f'(1)=2$,求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)-1}{x^2-1}$.

38. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$内可导,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在. 求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

39. 求$\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

40. 求极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdot\cdots\cdot(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}$.

41. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{2+x}\,\mathrm{d}x$.

42. 证明:若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

43. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b\neq0$,求常数$a,b$.

44. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,求常数$a,b$.

45. 函数$f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}$在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是$x=$ (　　)

(A)0　　(B)1　　(C)$-\dfrac{\pi}{2}$　　(D)$\dfrac{\pi}{2}$

46. 求函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$的间断点,并指出其类型.

47. 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq0,\\ 0, \quad x=0\end{cases}$在$x=0$处的连续性、可微性及导函数的连续性.

48. 设函数$f(x)$对任意x均满足等式$f(1+x)=af(x)$,且有$f'(0)=b$,其

中 a,b 为非零常数,则 ( )

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$

49. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则 ( )

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

50. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

【高分进阶篇】

1. 当 $x\to 1$ 时,$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为 ( )

(A) 2　　(B) 0

(C) ∞　　(D) 不存在但不是 ∞

2. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是 ( )

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

3. 设 $a>0,x_1>0$,且定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

4. 设 $f(x)$ 一阶连续可导,且 $f(0)=0,f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\arcsin x}}=$ ( )

(A) e^{-1}　　(B) e　　(C) e^2　　(D) e^3

5. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt,g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ( )

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小