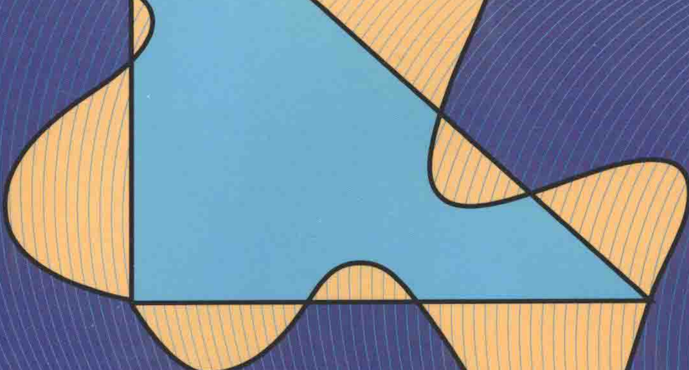
微积分习题与解答

王元　方源



高等教育出版社

WEIJIFEN XITI YU JIEDA

微积分

习题与解答

王元　方源

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题与解答/王元，方源编．--北京：高等教育出版社，2015.7

ISBN 978-7-04-042745-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… ②方… Ⅲ.①微积分-高等学校-习题集 Ⅳ.①O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第101104号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李华英 李 鹏　　封面设计 王凌波
版式设计 杜微言　　责任校对 刘春萍　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京天顺鸿彩印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	28	版　　次	2015年7月第1版
字　　数	460千字	印　　次	2015年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号 42745-00

微觀博覽知萬物
自有群分
積學窮經悉規矩
各如其分

序

《微积分》作为一本大学一年级的数学教材, 在学习的时候, 做一定数量的习题, 使学习者熟练地掌握微分与积分的技术, 且明白微积分中的诸概念, 是完全必要的!

但是, 是否需要一本“习题解答”呢? 对此有完全不同的看法! 不赞成者认为: 有了习题解答, 会使学习者有依赖思想, 不去主动克服困难, 演算习题, 而去参看或照抄习题解答。赞成者则认为: 习题解答对学习者仍有很好的帮助, 特别对自学者更有帮助。在做完习题后, 再对照习题解答, 可以帮助他们了解自己做得对错, 或了解到, 自己经过努力思考后, 而没有做出来的习题的做法, 这会有助于提高学习质量及增强学习者的信心。我们是赞成有习题解答的, 特别相信, 对于愿意学好微积分的学习者来说, 习题解答对他们会有所帮助。

这本习题解答的题目是由前一作者编制的, 他给出了前五章单号习题的全部解答及后面八章 (第六章至第十三章) 单号计算题的答案。后一作者则完成了剩下的工作。

这本习题解答除少量简单的证明题外, 均为计算题, 学习者做一部分即可, 例如全部单号题目。在做习题的时候, 可以仔细写出一部分习题解答, 其他题目, 经思考有了想法后, 再参看一下习题解答, 对比一下就可以了。

在本书出版过程中, 高等教育出版社的编辑王丽萍、李华英、李鹏做了大量工作, 除了良好的编辑工作外, 他们还指出了部分习题解答的错误并给予了更正。由于我们对某些章节的题解, 先给出单号习题解答, 后给出双号习题解答, 所以给排版带来了不少麻烦, 出版社克服了种种困难, 作了很好的排版, 我们谨在此表示最衷心的感谢。

方 源、王 元

2015 年 3 月 15 日

《微积分》序

本书的英文版 *Calculus* (Fong Yuen, Wang Yuan) 于 2000 年在德国 Springer 出版社出版, 畅销全球。其内容是为所有当代理、工、商等专业大学生设计的。本书之论点是以轻松但不失严谨的态度去书写。内容先以丰富的范例作启示, 进而引进严谨的概念及定理。全书一气呵成, 共 13 章。

阅读及了解数学是一种艺术, 它与阅读其他各种文献不同! 数学典籍之阅读者必须作出大量的实践 —— 那就是要解答书中的所有习题。故本书亦提供了大量的习题, 以提升学习的效果。在过去 10 余年间, 本书不只获得同业教授们的好评, 同时亦被德国之《数学评论》(Zentralblatt für Mathematik) 评为微积分教材或自学课本的良好选择。

最后, 本书两位作者皆由衷地感谢高等教育出版社自然科学学术著作分社的分社长王丽萍女士大力支持原著以中文版在国内面世。同时亦感谢 Springer 出版社的邝志鸿副执行总裁把本书的中文版权无条件归还给作者, 让神州大地之学子能一窥初等分析 (微积分) 的玄奥。

方 源、王 元

2014 年 3 月 3 日于北京

《微积分》前言

1995 年我应台湾 “中研院” 之邀, 访问了该院数学研究所两个月。数论学家于靖负责接待我。为了让我更广泛地了解台湾的数学与数学家, 于靖特别安排我到台湾不少大学作一两天的短暂访问与停留, 其中在台南的成功大学停留了 10 天。这是仅有的一次长时间的外访。在成功大学期间, 由代数学家方源接待我。

在成功大学期间, 方源曾提议与我合写一本 “微积分” (Calculus) 教材, 我同意了。我原本以为他有一个初稿 (或讲义), 由我来作些补充。待看到他的稿子后, 才知道是一本用英语撰写的完美的书, 我已无事可做了。剩下的工作只有将他的手稿译成中文, 并将习题演算一遍, 我就承担了这项工作。

英文稿在 1996 年由 Springer 出版社出版了一个预印版, 共两千册, 仅限于在台湾发行。封面及每一页上均印有 “Uncorrected proofs not to be copied” 的字样, 预印版很快销售完, 反映不错。2000 年, Springer 出版社正式出版了英文版。

方源有不少好的心得, 例如第二章 “极限与连续” 讲到 ε–δ 理论时, 对于给定的 ε, 他用具体地算出 δ 的办法来讲, 这样就将这个通常使初学者颇感 “抽象” 的内容, 变成了可计算的事情。这与中学的定量数学基本上相同了。又如在第五章 “积分法” 中, 方源举了商高定理 (或毕达哥拉斯定理) 的推广, 以激发读者看到微积分与初等数学的本质差异, 等等。

我想本书的中文版及其习题解答的出版还是必要的。这将有利于我国更多的青年, 特别是自学者, 以本书为入门, 进入高等数学的学习。我要借此机会衷心感谢高等教育出版社及王丽萍分社长、李华英编辑和李鹏编辑的大力支持, 以及他们完美的编辑工作。

王　元

2013 年 12 月 1 日于北京

王元

中国著名数学家, 中国科学院院士。1930 年生, 江苏镇江市人。1952 年毕业于浙江大学数学系, 经数学家陈建功院士及苏步青院士推荐到中国科学院数学研究所工作。在华罗庚院士亲自指导下研究数论, 成绩卓越。他首先研究了著名的 “哥德巴赫猜想”, 其成果领先全世界。在 1980 年和同门师兄弟陈景润、潘承洞共同获得国家自然科学一等奖。

王元院士曾任中国科学院数学研究所所长、研究员、中国数学会理事长、《数学学报》主编、联邦德国《分析》杂志编委、新加坡世界科技出版公司顾问、中国奥林匹克数学会理事长。主要著作有《哥德巴赫猜想》文集、《数论在近似分析中的应用》(与华罗庚合著) 和 *Calculus* (与方源合著的英文版《微积分》), 专业研究论文百余篇均发表于当代世界著名的数学期刊。

方源

台湾著名数学家, 1948 年生于香港, 1979 年获英国爱丁堡大学数学博士。专攻代数学、数学教育及代数自动机理论。现就职于广东技术师范学院。曾任台湾成功大学应用数学研究所特聘教授 34 年 (终身职)、成功大学高等数学研究中心主任、国际学术组主任、大学出版中心主任。于 1984 年及 1989 年先后受聘为爱丁堡大学及奥地利开普勒 (Kepler) 大学客座教授各为期 1 年, 讲授近世代数及分析学。

1991 年获台湾教育主管部门颁发特优数学讲座教授大奖 (全台湾仅 1 人), 同年获聘为开普勒大学终身亚洲首席顾问教授, 1993/94 年名列美国 Marquis 世界名人录, 1993 — 2012 年任《代数集刊》副主编 (中国科学院数学研究所主办)。著有专书 10 册及近百篇研究论文, 发表于当代国际知名的出版社及数学期刊。

目录

1

导引

习题 1.2

1. 命 $A=\{1,2,5\}, B=\{3,5,7\}, C=\{2,3,4\}$ 及 $D=\{1,2,4,6\}$. 试求下面各表达式

(i) $A\cap B$.　　(ii) $A\cup B$.
(iii) $A\cap C$.　　(iv) $A\cup C$.
(v) $A\cap D$.　　(vi) $A\cup D$.
(vii) $B\cap C$.　　(viii) $B\cup C$.
(ix) $B\cap D$.　　(x) $B\cup D$.
(xi) $C\cap D$.　　(xii) $C\cup D$.

解 (i) $A\cap B=\{5\}$.　　(ii) $A\cup B=\{1,2,3,5,7\}$.
(iii) $A\cap C=\{2\}$.　　(iv) $A\cup C=\{1,2,3,4,5\}$.
(v) $A\cap D=\{1,2\}$.　　(vi) $A\cup D=\{1,2,4,5,6\}$.
(vii) $B\cap C=\{3\}$.　　(viii) $B\cup C=\{2,3,4,5,7\}$.
(ix) $B\cap D=\varnothing$.　　(x) $B\cup D=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
(xi) $C\cap D=\{2,4\}$.　　(xii) $C\cup D=\{1,2,3,4,6\}$.

2. 求证定理 1.2.12 中除命题 (vi) 的第一部分之外的所有命题.

证 (i) 由 $x\in X$ 可知 $x\in X\cup Y$, 所以 $X\subseteq X\cup Y$. 同样 $Y\subseteq X\cup Y$.

(ii) 由 $x\in X\cap Y$ 得知 $x\in X$ 及 $x\in Y$, 所以 $X\cap Y\subseteq X$ 及 $X\cap Y\subseteq Y$.

(iii) 由 $X\subseteq Y$ 得知 $X\cup Y=Y$. 反之, 由 $X\cup Y=Y$ 可知 $X\subseteq Y$.

(iv) 由 $x\in X$ 及 $X\subseteq Y$ 可知 $x\in X\cap Y$. 另一方面 $X\cap Y\subseteq X$, 所以 $X\cap Y=X$. 反之, 由 $x\in X$ 及 $X=X\cap Y$ 得知 $X\subseteq Y$.

(v) 显然 $X\cup(X\cap Y)\supseteq X$. 现在往证 $X\supseteq X\cup(X\cap Y)$. 若 $x\in X\cup(X\cap Y)$, 则 $x\in X$ 或 $x\in X\cap Y$, 对于后者, 即 $x\in X$ 且 $x\in Y$. 总之 $x\in X$, 所以 $X\supseteq X\cup(X\cap Y)$. 从而 $X=X\cup(X\cap Y)$. 类似地, 可以证明 $X\cap(X\cup Y)=X$.

(vi) $x \in (X \cap Y)' \Leftrightarrow x \in U, x \notin X \cap Y$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x \in U, x \notin X) \text{ 或 } (x \in U, x \notin Y) \\ &\Leftrightarrow x \in X' \text{ 或 } X \in Y' \\ &\Leftrightarrow x \in X' \cup Y'. \end{aligned}$$

即

$$(X \cap Y)' = X' \cup Y'.$$

(vii) $x \in X \cup Y \Leftrightarrow x \in X$ 或 $x \in Y \Leftrightarrow x \in Y$ 或 $x \in X$. 即 $x \in Y \cup X$. 所以 $X \cup Y = Y \cup X$, 同理可证 $X \cap Y = Y \cap X$.

(viii) $x \in X \cup X \Leftrightarrow x \in X$ 或 $x \in X \Leftrightarrow x \in X$, 即 $X = X \cup X$. 同理可证 $X \cap X = X$.

(ix) $x \in X \cup (Y \cup Z) \Leftrightarrow x \in X$ 或 $x \in Y \cup Z \Leftrightarrow x \in X, x \in Y$ 或 $x \in X, x \in Z \Leftrightarrow x \in X \cup Y$ 或 $x \in Z \Leftrightarrow x \in (X \cup Y) \cup Z$. 即 $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$. 同理可证 $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

(x) 的证明类似于 (ix).

3. 求证定理 1.2.13.

证 (i) $x \in S \cup \varnothing \Leftrightarrow x \in S$ 或 $x \in \varnothing$, 即 $S \cup \varnothing = S$.

(ii) $x \in S \cap \varnothing \Leftrightarrow x \in S$ 且 $x \in \varnothing$. 没有这样的 x, 即 $S \cap \varnothing = \varnothing$.

(iii) $x \in S \cup U \Leftrightarrow x \in S$ 或 $x \in U$, 即得 $S \cup U = U$.

(iv) $x \in S \cap U \Leftrightarrow x \in S$ 且 $x \in U$, 所以 $S \cap U = S$.

(v) $x \in \varnothing' \Leftrightarrow x$ 可以是 U 中任何元素, 所以 $\varnothing' = U$.

(vi) $x \in U' \Leftrightarrow$ 任何元素都不能属于 U', 所以 $U' = \varnothing$.

(vii) $x \in S \cup S' \Leftrightarrow x \in S$ 或 $x \in S'$, 所以 $S \cup S' = U$.

(viii) $x \in S \cap S' \Leftrightarrow x \in S$ 且 $x \in S'$. 因为没有 x 能同时属于 S 与 S', 所以 $S \cap S' = \varnothing$.

4. 求证 $X \cap (X' \cup Y) = X \cap Y$.

证 $x \in X \cap (X' \cup Y) \Leftrightarrow x \in X$ 且 $x \in X' \cup Y \Leftrightarrow x \in X$ 且 $x \in X'$ 或 $x \in Y \Leftrightarrow x \in X$ 且 $x \in Y \Leftrightarrow x \in X \cap Y$, 即 $X \cap (X' \cup Y) = X \cap Y$.

5. 命 A, B 为集合及 $A - B = \{x \in A | x \notin B\}$. 求证 $A - B = B' - A'$.

证 $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ 且 $x \notin B \Leftrightarrow x \notin A'$ 且 $x \in B' \Leftrightarrow x \in B' - A'$, 即 $A - B = B' - A'$.

6. 我们定义集合的算子 Δ 如下: 若 A, B 为集合, 则

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

求证下列各命题

(i) $A\Delta B = B\Delta A$. (ii) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.
(iii) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$. (iv) $A\Delta A = \varnothing$.
(v) $A\Delta\varnothing = A$.

证 (i) 已知 $(A-B)\cup(B-A) = (B-A)\cup(A-B)$, 此即 $A\Delta B = B\Delta A$.

(ii) $A\Delta(B\Delta C) = A\Delta((B-C)\cup(C-B)) = (A-(B-C)\cup(C-B))\cup((B-C)\cup(C-B)-A)$, 所以若 $x\in A\Delta(B\Delta C)$, 则 $x\in A-(B-C)\cup(C-B)$ 或 $x\in(B-C)\cup(C-B)-A$. 我们不妨假定 $x\in A-(B-C)\cup(C-B)$, 即 $x\in A, x\notin(B-C)\cup(C-B)$, 亦即 $x\in A, x\notin\{y\in B, y\notin C$ 或 $y\in C, y\notin B\}$, 即 $x\in A$, $x\in\{y\in B, y\in C$ 或 $y\notin B, y\notin C\}$. 我们不妨假定 $x\in A, x\in B, x\in C$. 今往证明 $x\in(A\Delta B)\Delta C$. 由定义可知

$$(A\Delta B)\Delta C = ((A-B)\cup(B-A)-C)\cup(C-(A-B)\cup(B-A)),$$

其中 $C-(A-B)\cup(B-A)$ 表示集合 $x'\in C, x'\notin(A-B)\cup(B-A)$. 即 $x'\in C, x'\notin\{y\in A, y\notin B$ 或 $y\in B, y\notin A\}$, 亦即 $x'\in C, x'\in\{y\in A, y\in B$ 或 $y\notin A, y\notin B\}$. 这说明 $x\in C-(A-B)\cup(B-A)$, 自然有 $x\in(A\Delta B)\Delta C$. 因此 $A\Delta(B\Delta C)\subseteq(A\Delta B)\Delta C$. 同样可证 $A\Delta(B\Delta C)\supseteq(A\Delta B)\Delta C$. 所以 $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

(iii) $A\cap(B\Delta C) = A\cap((B-C)\cup(C-B)) = (A\cap(B-C))\cup(A\cap(C-B))$. 若 $x\in A\cap(B\Delta C)$, 则 $x\in A\cap(B-C)$ 或 $x\in A\cap(C-B)$, 不妨假定 $x\in A\cap(B-C)$, 即 $x\in A, x\in B, x\notin C$, 所以 $x\in A\cap B, x\notin A\cap C$. 今往证明 $x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$, 由于

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C) = ((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B)),$$

所以当 $x'\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$, 则 $x'\in(A\cap B)-(A\cap C)$ 或 $x'\in(A\cap C)-(A\cap B)$. 不妨假定 $x'\in(A\cap B)-(A\cap C)$, 即 $x'\in A\cap B$, $x'\notin A\cap C$. 因此 $A\cap(B\Delta C)\subseteq(A\cap B)\Delta(A\cap C)$. 类似地可以证明

$$A\cap(B\Delta C)\supseteq(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

故得

$$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

(iv) $A\Delta A = (A-A)\cup(A-A) = \varnothing$.

(v) $A\Delta\varnothing = (A-\varnothing)\cup(\varnothing-A) = A\cup\varnothing = A$.

7. 对于 $f(x)=x/(1+x)$ 与 $g(x)=\sqrt{1+x^2}$, 试求出下列各值 (如果可能):

(i) $(f+g)(1)$. (ii) $f\cdot g(-1)$.

(iii) $(f-g)(2)$. (iv) $(f/g)(2)$.

(v) $f\circ g(0)$. (vi) $f\circ g(\sqrt{3})$.

解 (i) $(f+g)(1)=\dfrac{1}{1+1}+\sqrt{1+1}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$.

(ii) $f\cdot g(-1)$. 因为 $f(-1)$ 不存在, 所以 $f\cdot g(-1)$ 不存在.

(iii) $(f-g)(2)=\dfrac{2}{1+2}-\sqrt{1+2^2}=\dfrac{2}{3}-\sqrt{5}$.

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)=\dfrac{\frac{2}{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$.

(v) $f\circ g(0)=f(g(0))=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

(vi) $f\circ g(\sqrt{3})=f(g(\sqrt{3}))=f(2)=\dfrac{2}{3}$.

8. 若 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 与 $g(x)=|x|$, 试求 $f\circ g(x)$ 与 $g\circ f(x)$ 的表达式.

解 $f\circ g(x)=f(g(x))=f(|x|)=\sqrt{|x|-1}$,

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-1})=|\sqrt{x-1}|$.

9. 试求 g 与 f 使 $h=g\circ f$, 此处

(i) $h(x)=\sqrt{x+7}$. (ii) $h(x)=(x+1)^{10}$.

解 (i) 命 $f(x)=x+7$, $g(x)=\sqrt{x}$, 则 $h(x)=g\circ f(x)=g(x+7)=\sqrt{x+7}$.

(ii) 命 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^{10}$, 则 $h(x)=g\circ f(x)=g(x+1)=(x+1)^{10}$.

10. 命 $\theta_1(x)=x,\theta_2(x)=1/x,\theta_3(x)=1-x,\theta_4(x)=1/(1-x),\theta_5(x)=(x-1)/x$ 及 $\theta_6(x)=x/(x-1)$, 则 $\theta_2(\theta_3(x))=\theta_2(1-x)=1/(1-x)=\theta_4(x)$, 即 $\theta_2\circ\theta_3=\theta_4$. 实际上, 这六个函数中的任意两个函数的复合在函数复合运算下都是闭的. 试填写下面的复合表:

$\circ$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
θ_1						
θ_2			θ_4			
θ_3						
θ_4						
θ_5						
θ_6						

然后利用上表寻求以下各表达式

(i) $\theta_2\circ\theta_2\circ\theta_2\circ\theta_2$. (ii) $\theta_1\circ\theta_2\circ\theta_3\circ\theta_4\circ\theta_5\circ\theta_6$.

(iii) f 使得 $f\circ\theta_5=\theta_1$. (iv) f 使得 $f\circ\theta_2\circ\theta_5=\theta_1$.

(v) f 使得 $\theta_2\circ\theta_3\circ f=\theta_5$. (vi) f 使得 $\theta_2\circ f\circ\theta_3=\theta_4$.

解

$\circ$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
θ_2	θ_2	θ_1	θ_4	θ_3	θ_6	θ_5
θ_3	θ_3	θ_5	θ_1	θ_6	θ_2	θ_4
θ_4	θ_4	θ_6	θ_2	θ_5	θ_1	θ_3
θ_5	θ_5	θ_3	θ_6	θ_1	θ_4	θ_2
θ_6	θ_6	θ_4	θ_5	θ_2	θ_3	θ_1

(i) $\theta_2\circ\theta_2\circ\theta_2\circ\theta_2=\theta_2\circ\theta_2\circ\theta_1=\theta_2\circ\theta_2=\theta_1$.

(ii) $\theta_1\circ\theta_2\circ\theta_3\circ\theta_4\circ\theta_5\circ\theta_6=\theta_1\circ\theta_2\circ\theta_3\circ\theta_4\circ\theta_2=\theta_1\circ\theta_2\circ\theta_3\circ\theta_6=\theta_1\circ\theta_2\circ\theta_4=\theta_1\circ\theta_3=\theta_3$.

(iii) 由 $f\circ\theta_5=\theta_1$ 得 $f=\theta_4$.

(iv) 由 $f\circ\theta_2\circ\theta_5=\theta_1$ 得 $f\circ\theta_6=\theta_1$, 再得 $f=\theta_6$.

(v) 由 $\theta_2\circ\theta_3\circ f=\theta_5$ 得 $\theta_4\circ f=\theta_5$, 再得 $f=\theta_4$.

(vi) 由 $\theta_2\circ f\circ\theta_3=\theta_4$ 得 $\theta_2\circ f=\theta_2$, 再得 $f=\theta_1$.

习题 1.3

1. 用域的代数公理及它们的推论证明下面熟知的结果, 此处 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

(i) $a\cdot b=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$. (ii) $-(-a)=a$.

(iii) $a\cdot b\neq 0\Rightarrow (a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$.

证 (i) 若 $a=0$, 则结论成立. 若 $a\neq 0$, 则由公理 7 可知存在 a^{-1} 使 $a^{-1}\cdot a\cdot b=a^{-1}\cdot 0=0$. 再由 $a^{-1}\cdot a=1$ 及公理 5 得 $b=0$.

(ii) 由例 1.3.1, 公理 5, 公理 6 与公理 8 可知

$$0=-1\cdot(a-a)=-1\cdot a-1\cdot(-a)=-a-(-a).$$

所以

$$a=a-a-(-a)=0-(-a)=-(-a).$$