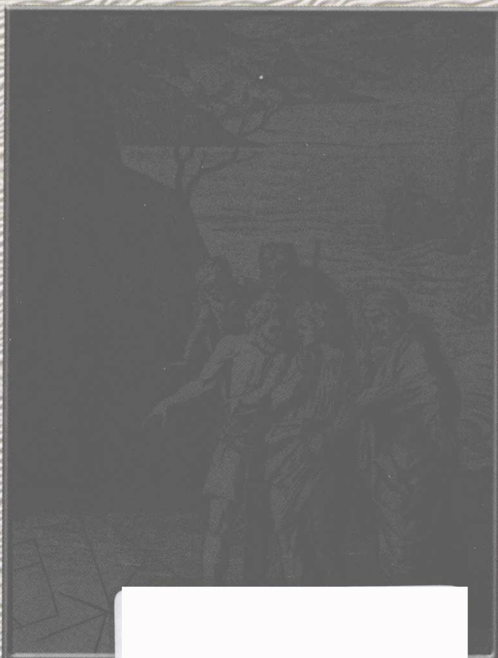
极端原理与解题

王连笑 著



一个思考了半个世纪的问题

什么是极端原理

让思路来得自然

覆盖问题与极端原理

条件隐含在极端情况之中

数学解题的特殊化策略

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

极端原理与解题

王连笑 著

◎ 一个思考了半个世纪的问题

◎ 什么是极端原理

◎ 让思路来得自然

◎ 覆盖问题与极端原理

◎ 条件隐含在极端情况之中

◎ 数学解题的特殊化策略

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

在有限个实数中一定有一个最小数，一个最大数；在无限个自然数中一定有一个最小数——这就是极端原理. 利用这个简单而又通俗的原理可以解决不少与存在性有关的数学问题和其他问题，本书列举了与极端原理和特殊化解题策略有关的例题，其中大部分是数学奥林匹克试题，通过这些例题全面、详尽地介绍了用极端原理解题的思维方法.

本书适合中学数学爱好者（其中大部分初中生都能看懂）阅读，也可以作为中学数学教师开展数学课外活动和进行数学奥林匹克培训的资料.

图书在版编目(CIP)数据

极端原理与解题/王连笑著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-5603-5249-7

Ⅰ. ①极… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①数学一题解
Ⅳ. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 038058 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451−86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 11.5　字数 118 千字
版　　次　2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5249-7
定　　价　28.00 元

⊙ 前言

在一张纸上任意画一些点，然后把这些点用直线联结起来，不管这些点怎么画，一定会有一条直线，这条直线上不多不少，恰好有所画出的点中的两个. 这件事做起来并不难，然而由于这些点的画法（位置）是任意的，点的个数是任意多的（只要是大于1的有限个），要证明对每一种情况，这条直线都存在，就成为一件难事了. 因为任何一种画法都只能是一种特殊情况，特殊情况不能代替一般情况，因而任何一种画法都不能代替证明. 这个问题就是著名的“塞尔维斯特问题”. 本书就从这个问题讲起. 历史上，人们为了寻找这个问题的证明经历了半个世纪，最后还是用极端原理解决了问题.

在有限个实数中一定有一个最大数，有一个最小数，在无限个自然数中也一定有一

个最小数,这就是极端原理.它是一个十分朴素又十分有用的原理,应用极端原理解题,就是把解题的注意力放在所研究问题的极端情况之中(最大距离与最小距离,最大角与最小角,最长边与最短边,最大面积与最小面积,最大数与最小数,最大和与最小和,得分最多与得分最少等等),因为所涉及问题的结论往往就隐含在极端情况之中,矛盾的普遍性存在于特殊性之中,用极端原理去思考,就可以把复杂问题放到一个简单的具体的背景下去思考.因此,考虑极端,思路就会放宽,考虑极端,思路就会来得自然.

本书选择了与极端原理有关的例题(1～13章)和与特殊化有关的例题(14、15章),其中大部分例题是国内外数学奥林匹克试题,通过对这些例题思路的分析,使题目自然而然地得到解决.为了提高读者的思维能力,本书把重点放在"题目的解法是怎么想出来的","解题的入口在哪里"这样一些解题的关键问题上,为了使大部分初中学生也能读懂本书的大部分内容,这里所选的例题大部分只涉及初中知识,但是对思维能力的训练则跨越了初中和高中的界限.作者的目标是希望通过阅读本书,对读者启发解题思路、提高思维能力和开拓数学视野能有所帮助,因此本书是作者献给中学数学爱好者和中学数学教师的一点心意.但是由于作者水平所限,难免力不从心,一定会有不少谬误给读者带来麻烦,切望读者批评指正.

作　者

目录

第1章

一个思考了半个世纪的问题

让我们看图 1.1.

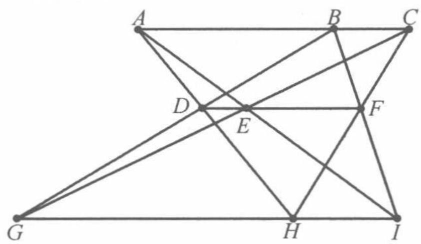


图 1.1

这个图形有些什么特点呢？图中有 9 个点

$$\{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}$$

和 9 条直线

$$\{AC,DF,GI,AH,AI,BG,BI,CG,CH\}$$

并且每 3 个点都在一条直线上，每一条直线上都有这 9 个点中的 3 个点.

这个图形启发我们思考这样一个问题：是不是有这样一个由有限个点组成的集合 S，这些点不全在一条直线上，并且在集合 S 中的任意两点的连线都至少包含着该集合中的另一个点.

这个问题是富有想象力的英籍犹太数学家塞尔维斯特(Sylvester,1814－1897)提出来的,为了叙述方便,我们不妨把塞尔维斯特思考过的这个集合叫作“塞尔维斯特集合”,问题就是:塞尔维斯特集合存在吗?

我们仍然研究图 1.1,因为这个图已经相当“理想”了,图中的各条直线上都有集合 S 中的 3 个点,每两个点所连的直线上都有集合 S 中的第 3 个点.

对照塞尔维斯特集合,这里就有一个细节必须注意,上面说的每两点所连直线上都有第 3 个点,这个事实是“在图中”而不是“在集合 S 中”,那么“在集合 S 中”是否有这个特点呢?

我们不妨看图 1.2,把集合 S 中的两点 C,I 联结起来,直线 CI 上面就没有集合 S 中的点,这就说明集合 S 不是塞尔维斯特理想的集合. 但不要紧,我们只需把 DF 延长与 CI 相交,设这个交点为 J. 点 J 有一定的战略意义,因为把它加进集合 S 中,虽然 S 变成了 10 个点的集合(也是有限个点,不妨叫它为 S',$S'=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J\}$),但是直线 CI 上有了第 3 个点,塞尔维斯特的要求达到了.

然而,好景不长,点 J 加进来后,CI 上没有点的问题解决了,新的有缺欠的点对又出现了,比如 BJ,AJ,FJ,GJ,这些直线上就没有集合 S' 中的第 3 个点. 怎么办? 又要添加新的具有战略意义的第 11 个点,第 12 个点,第 13 个点,……

事实上,当集合 S 中增加了新的点之后,又会出现新的有缺欠的点对,于是,上面的尝试与思考不能不使我们怀疑“塞尔维斯特集合”的存在性.

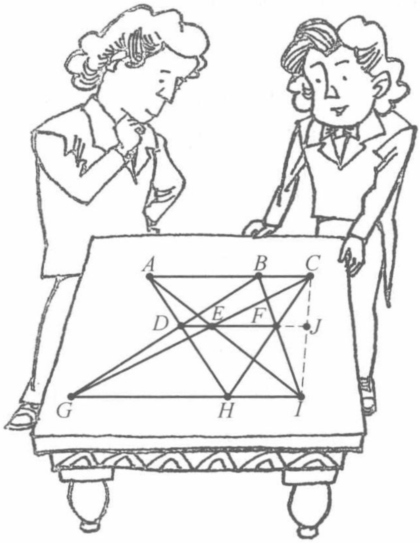


图 1.2

如果把一条仅有集合 S 中两个点的直线叫作“平凡直线”的话，那么，塞尔维斯特集合若不存在，便等价于下述命题成立：

对任意一个至少有两个点的有限点集 S，它的所有点不全在一条直线上，则一定存在一条平凡直线.

当然，这个问题的另一种等价形式（它的逆否命题）就是：

如果集合 S 是由有限个点组成的，并且由 S 中的点决定的每一条直线上都至少有 S 中的 3 个点（即平凡直线不存在），则 S 中的点全都位于同一条直线上.

塞尔维斯特提出这个问题的时间是在 1893 年，这个问题被人们思考了（也许是忽视了）半个世纪，直到 50 年之后的 1933 年才由数学家 T. 伽莱（Gallai）给出

了一个复杂的证明.当然,人们也期待着简单的证明.数学家 L. M. 凯里(Kelly) 不负众望,给出了一个十分简单又十分通俗的证法,这个证明连每个初中学生都能看懂.下面我们就来介绍凯里的这个证明.

设平面上点的集合 S 中有 n 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ $(n\geqslant 2)$,并且这 n 个点不全在同一条直线上,我们证明一定存在一条直线(这条直线即为平凡直线),在它的上面仅有点集 S 中的两个点.

由于 n 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 不全在同一条直线上,这样,这 n 个点中的任何一对点所连的直线都不会包含这 n 个点的全部,因而至少有一个点不在这条直线上.

现在我们考虑这 n 个点中每两点所联结的直线,这样的直线只能有有限条,每一条这样的直线和不在这条直线上的一个点组成一个"线点小组",这种线点小组也只能有有限个,对于每一个线点小组,我们作出这个点到该直线的垂线,得到这个点到该直线的距离,显然,每一个线点小组都伴随着一个"点线距离",这样的距离仍然是有限个.

让我们的思路转向这有限个"点线距离",这有限个距离是有限个正数,而有限个正数中一定有一个最小的正数,设这个最小正数为 d_1(注意,在这里我们之所以不厌其烦地说到"有限"这个词,是因为"有限"是一个关键,如果是无限个正实数,就不一定有最小的正数).

假设 d_1 表示的是点 P_1 到点 P_2 和 P_3 所决定的直线的距离(图 1.3).直线 P_2P_3 是距离出现在极端情况下的一条直线,而我们的目标(寻找平凡直线)就在这

种情况下出现了 —— 事实上，直线 P_2P_3 就是一条平凡直线，即在这条直线上不再有已知 n 个点中的第 3 个点. 因此，问题就归结为证明直线 P_2P_3 是一条平凡直线.

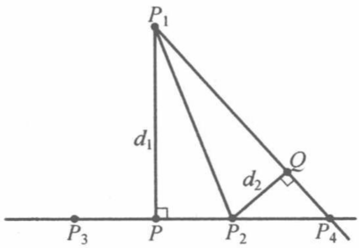


图 1.3

假设在直线 P_2P_3 上不是只有集合 S 中的两个点 P_2，P_3，而是至少还有一个点，设这个点为 P_4.

我们作直线 $P_1P \perp$ 直线 P_2P_3，点 P 为垂足，则

$$P_1P = d_1$$

由于在直线 P_2P_3 上至少有 S 中的 3 个点 P_2，P_3，P_4，则必有两点位于该直线中的点 P 的同一侧，不妨设点 P_2 和 P_4 在点 P 的同一侧，且点 P_2 位于点 P 和 P_4 之间(当然点 P_2 也可能与点 P 重合)，即

$$P_2P_4 \leqslant PP_4$$

注意到点 P_2 与直线 P_1P_4 构成一个“线点小组”，考虑这个小组伴随的“点线距离”，为此作

$$P_2Q \perp P_1P_4$$

垂足为点 Q，设距离 P_2Q 为 d_2. 由 d_1 的最小性可得

$$d_1 \leqslant d_2 \tag{1.1}$$

然而，另一方面，对于 $\mathrm{Rt}\triangle P_4QP_2$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle P_4PP_1$，由于

$$\angle QP_4P_2 = \angle PP_4P_1$$

所以

$$\triangle P_4QP_2 \backsim \triangle P_4PP_1$$

$$\frac{P_2Q}{P_1P} = \frac{P_2P_4}{P_1P_4} < \frac{P_2P_4}{PP_4} \leqslant 1$$

而 $P_2Q = d_2$，$P_1P = d_1$，于是有

$$d_1 > d_2 \tag{1.2}$$

这就导致了式(1.1)与(1.2)的矛盾，这个矛盾表明，在直线 P_2P_3 上还有第三点 P_4 的假设是错误的，即直线 P_2P_3 上只有集合 S 中的两个点 P_2，P_3，因而它是一条平凡直线.

大家从上面的证明中不难看出，这个证明并不复杂，也很易懂，但是人们对这个问题解法的思考竟长达半个世纪. 那么，使塞尔维斯特问题得以解决的“法宝”是什么呢？大家从证明中可以发现，只要找出点线距离最小的那个“线点小组”，那么这个小组中的那条直线就是我们要寻找的平凡直线，目标在极端情况下出现，而“点线距离最小”这个极端值的存在性是不容置疑的，正是这个极端值在证明中起到了举足轻重的作用，真是“踏破铁鞋五十年，解决原来靠极端”.

第2章

什么是极端原理

塞尔维斯特问题的解决依靠了一个十分朴素的原理：在有限个正数中一定有一个最小的正数，这便是极端原理的内容之一. 极端原理是一个极为简单，极为重要，却又极易被人们忽视的事实.

极端原理的具体内容如下：

原理1 设M是由自然数组成的集合，不论M是由全体自然数组成的，还是由一部分自然数组成的，即不论M是由无穷多个自然数组成的，还是由有限个自然数组成的，则M中必有最小数.

原理2 设T是由有限个实数组成的非空集合，则T中必有最大数，也必有最小数.

这两个原理都是非常明显的事实，当然，并不是任何一个数集都有这种极端元素的，例如：

一个由无穷个有理数组成的集合，可能既没有最大数，也没有最小数.

一个由无穷个无理数组成的集合，可能既没有最大数，也没有最小数.

一个由无穷个整数组成的集合,可能既没有最大数,也没有最小数.

上面的两个原理十分简单,却给我们解数学题提供了十分有用的工具和原则.这是因为数的集合中的这种极端元素往往具有特殊的地位,数学上的许多性质往往会通过一些数量上达到极端值的对象反映出来.因此在研究某些数学问题时,就可以对题设中提供的集合,考察其中处于“极端”情况的元素,从这些极端元素出发来思考,把这些极端元素反映出来的性质研究透,问题就会顺理成章地得以解决.比如,数集中的最大数或最小数,包含最多元素的集合或最少元素的集合,点与点之间、点与直线之间的最大距离或最小距离,最大角或最小角,最长边或最短边,最大面积或最小面积,最大周长或最小周长,若干个数的最大和或最小和,方程的最大整数解或最小整数解,比赛中得分最多或得分最少的队员等等,只要这些极端元素存在,在解题中就可以考虑它们,使思路集中.这种用极端原理解题的思考方法,对于解决一些数学问题,特别是解一些存在性问题(因为极端原理即反映极端元素存在这一特性)很起作用.

第3章 让思路来得自然

1990年全国高中数学联合竞赛第二试第三题是笔者编拟的.题目是这样的:

某市有 n 所中学,第 i 所中学派出 c_i 名学生($1 \leqslant c_i \leqslant 39, 1 \leqslant i \leqslant n$)到体育馆观看球赛,全部学生的总数为 $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1\,990$(这是 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1\,990$ 的简写).看台上每一横排有199个座位,要求同一学校的学生必须坐在同一排,问体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能坐下?

作为全国高中联赛的最后一道题,当然有一定的难度,但是这个题目是不是难不可攀呢?其实并不是这样,只要你设身处地地去思考,解这个题目的思路就会来得自然.现在让我们一起到体育馆去,身临其境地解决这个问题.

假如你是体育馆的负责人,这 n 所中学的学生观看比赛的座位将由你来调度,你将怎样去做呢?

图 3.1

这个题目有三个条件:第一个条件是每校学生不超过 39 人,总人数为 1 990 人;第二个条件是看台上每一横排有 199 个座位;第三个条件是同一个学校的学生必须坐在同一横排,而不能分坐在两个横排. 此题有一个目标:安排的横排越少越好.

问题在于要按照题目的条件达到规定的目标.

要求明确了,现在该轮到你操作了,你的思维能力和管理能力将得到考验.

显然,你的第一个念头是,每一横排有 199 个座位,总共又有 1 990 人,如果每排都能坐满学生,这时只需要 10 排就够了. 这当然是最好不过的事情,然而这只能是一个美好的愿望,实际情况并不会那么称心如意、那么理想,因为每所学校的人数在 1 至 39 之间都是有可能的,不可能每一排都凑得那么准,恰好有几个学校的人数之和是 199 人. 这就是说,一定有一些排会有空位,10 排座位当然不够. 我们的调度工作就是在这种具有人数随意性的情况下开展的.

首先安排第 1 排的学生. 从安排第 1 排学生开始就要多为以后着想，就要有“后顾之忧”，为了使所安排的横排最少，就希望让学生尽量往前几排坐，因此第 1 排的学生应该“尽量”地多，此排的空位应“尽量”地少. 这件事能不能做到呢？由于学校只有 n 个，即有限个，而每所学校的学生数也是有限个，把这 n 个数中的任意几个加在一起，它们的和也只有有限个（事实上有 2^n-1 个）. 在这些和中，小于 199 的也是有限个. 因为一排看台上有 199 个座位，我们就把思路集中在小于 199 的那有限个和数中，这些和数中必有一个最大的（极端原理），设这个最大的和为

$$c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_k}$$

我们就把第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 所中学（共 k 所）学生安排在第 1 排，这时第 1 排的空位数

$$x_1=199-(c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_k})$$

就达到最小.

如果第 1 排能够坐满学生，则 $x_1=0$；如果第一排没能坐满学生，则 $x_1>0$.

这时剩下了 $n-k$ 所中学，设其中任一所学校的学生数为 $c_j(j\neq i_1,i_2,\cdots,i_k)$，显然有

$$c_j\geqslant x_1+1$$

因为不然的话，如果 $c_j\leqslant x_1$，就可以在第一排再安排一所学校的学生就座.

我们可以估计出第 1 排的空位数，可以证明 $x_1\leqslant 32$.

事实上，如果 $x_1\geqslant 33$，即第 1 排的空位数超过 32 个，那么剩下的 $n-k$ 所学校的学生数都会超过 33，即 $c_j\geqslant 34$.