教指委推荐用书

特色专业

普通高等教育电子科学与技术类特色专业系列规划教材

微电子物理基础导论

王 巍 主编

曹 阳 王 振 黄 义 编著

科 学 出 版 社

普通高等教育电子科学与技术类特色专业系列规划教材

微电子物理基础导论

王巍 主编

曹阳 王振 黄义 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书针对微电子学相关专业在后续的专业课学习过程中对物理学基础知识及数学物理方法的需求。论述了在量子力学要用到数学物理方法中的波动方程，以及热传导方程与调和方程的求解方法；量子力学中简要论述薛定谔方程的应用、氢原子的求解、量子力学中力学量的表示及相互间的关系；在热力学与统计物理中，论述了热力学的基本概念、热力学定律、热平衡的判定、玻尔兹曼统计分布、量子统计分布规律。

本书可作为理工科院校的微电子科学与工程、集成电路设计与集成系统、电子科学与技术、电子信息科学与技术等专业的教材，也可供相关专业的研究生、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微电子物理基础导论 / 王巍主编. —北京：科学出版社，2015.5
普通高等教育电子科学与技术类特色专业系列规划教材
ISBN 978-7-03-044463-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①微电子学－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第114473号

责任编辑：潘斯斯 张丽花 / 责任校对：桂伟利
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年6月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015年6月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：367 000

定价：38.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

当今世界科学技术飞速发展，给大学本科教学工作提出了很高的要求。为了贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010～2020年)》，大力提升人才培养水平，全面提高高等教育质量，有必要对课程体系进行科学合理的调整，加强教材建设，构建符合时代发展、充分满足学生专业学习要求的教学体系，为后续的教育教学改革奠定坚实的基础。

集成电路类和电子工程类本科专业强调对物理学基础知识的培养，然而在以往的教学实践中发现原有的课程的物理类设置不合理，尤其是一些物理类的基础课程讲解的内容过于繁复，部分内容与后续的专业学习联系不紧密，导致学生学习任务重、学习效果不佳，课程设置已经远不能适应当今社会对此类人才的要求。在此情形下，根据专家建议，本书拟定了新的教材编写大纲，将数学物理方法、量子力学、热力学与统计物理三门课程中的相关内容糅合在一起，对一些与后续专业课学习关联度不大的内容做了适当删减。本书可以作为高等学校集成电路类、电子工程类专业的学科基础导论课程的试用教材。

本书分为三篇，共13章。其中，第1篇为数学物理方法部分，包括第1～4章，分别讲解偏微分方程的一般概念、波动方程、热传导方程及调和方程的基本定解问题的适定性、求解的方法及其解的性质。波动方程及分离变量法作为重点内容进行讲解。第2篇为量子力学部分，包括第5～8章，分别讨论量子力学的起源、波函数和薛定谔方程、量子力学中的力学量及应用量子力学理论对氢原子进行的分析。重点理解薛定谔方程及应用，求解氢原子得到的结论。第3篇为热力学与统计物理部分，其中，第9～11章分别讨论热力学基本定律和热平衡判据；第12章、第13章分别讨论玻尔兹曼统计分布及量子统计分布。书中带“*”的内容为选讲内容，这些理论可以为下一步学习固体物理、半导体物理、半导体器件物理等专业知识打下很好的物理基础。

本书由王巍教授主编，曹阳博士、王振博士、黄义博士等参与本书的编写工作。研究生董永孟、颜琳淑、梁耀等参与了部分文字录入工作。

由于作者水平有限，书中若存在不当之处，热忱欢迎读者不吝赐教，以便本书不断完善。

作　者

2015年3月

目　录

第1篇 数学物理方法

第1章 偏微分方程概述

1.1 引 言

偏微分方程描述的是一个未知函数及其偏导数之间的关系。偏微分方程经常出现在几乎所有的物理及工程应用领域，并且近年来偏微分方程的应用在以下这些领域，如在生物学、化学、计算机科学(尤其是图像处理与图之间的关系)和经济学(金融)领域中的应用有着爆炸性的增长。事实上，在每一个领域都存在着一定数量的独立变量之间的相互作用，我们试图定义这些变量的函数且通过这些函数来构建方程，从而对一系列的过程进行建模。当未知函数在某一点的值仅依赖于在该点附近所发生的情况时，通常就可以得到偏微分方程。

偏微分方程的分析包含许多方面，19世纪主要的经典方法是研究找到其清晰解的各种方法。偏微分方程在物理学的不同分支中显得越来越重要，每一次对一类新的偏微分方程的求解在数学上取得的进展，都伴随着物理学上的显著进步。例如，由哈密顿(Hamilton)所发明的特征方法推动了光学和分析力学的巨大进步。通过傅里叶法可以得到热传导和波传播的解，而格林(Green)法则是用来研究电磁理论的工具。计算机求解偏微分方程的数值计算方法的引入，使得偏微分方程的研究在近50年获得了最为显著的发展。

理论上，对偏微分方程解的结构了解方面的进展会带动相关计算方法的进步。我们的目的是在真正计算这个方程之前就对这个方程的解的性质有所了解，如有时甚至没有完全解。对偏微分方程的理论分析不仅具有学术上的价值，更加重要的是其具有非常多的应用。需要重点说明的是，目前还存在着一些非常复杂的方程，这些方程甚至在超级计算机的帮助下都无法进行求解。在这种情形下，能做的所有努力就是获得解的定性方面的信息。除此之外，一个非常重要的问题是偏微分方程的结构与其边界条件相关的。一般意义上，偏微分方程来源于一个物理模型或是一个工程上的问题。这些模型所具有的连续性不是非常明显，因而不能自动导出一个可求解的偏微分方程；而且，在大多数情形下，要求这些解是唯一的，且这些解在数据有小的扰动条件下保持稳定。对这些方程理论上的了解可以使我们检查这些条件是否满足。在后续的章节中可以看到，求解偏微分方程的方法有很多种，对于每一种特定类型的偏微分方程都有对应的求解方法。因此，非常重要的一点是在求解方程之前或是在求解过程之中，先对方程有一个深入彻底的分析。

基本的理论问题是包含方程及相应边界条件的问题是否被很好地提出来。法国数学家雅克·阿达马(Jacques Hadamard，1865～1963)发明了一个标注“适定性”。根据他的定义，一个问题如果满足以下准则就具有适定性的解。

(1) 存在性：问题具有一个解。

(2) 唯一性：具有唯一一个解。

(3) 稳定性：方程或是伴随条件的一个微小的变化导致解的微小的改变。

如果一个或是更多的条件不满足，则认为这个问题是非适定性的。数学物理中的基本问题都是适定性的。然而，在一些特定的工程应用中也要处理非适定性的问题。实际上，这些问题是无解的。因此，当面对一个非适定性的问题的时候，第一步就是对其进行适当的修正，以便于使其成为适定性的问题。

1.2 一阶偏微分方程

1. 一阶偏微分方程的定义

偏微分方程是至少包含一项偏微分项的方程，例如

$$\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=xuy^2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

通常可采用下脚标来表示偏微分项。在上述的例子中，可采用以下的符号来表示，如 $u_x=\partial u/\partial x$，$u_{xx}=\partial^2 u/\partial x^2$，$u_{xy}=\partial^2 u/\partial y\partial x$ 等。因而上述的偏微分方程可分别表示成

$$u_x-xu_y=xuy^2$$

和

$$h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}=f(x,y,z) \tag{1.2.1}$$

偏微分方程的解是满足方程的任何函数。我们通常寻找一个满足特定条件的偏微分方程的解，且该解中相互独立的变量均有一套特定的值。作为一个解的例子，方程

$$4u_x+3u_y+u=0 \tag{1.2.2}$$

具有解

$$u(x,y)=\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)$$

式中，f 可以是任何单个变量的微分函数。这一点可以通过将 $u(x,y)$ 代入到偏微分方程中得到验证。根据链式法则，有

$$u_x=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)+\mathrm{e}^{-x/4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(3x-4y)}[f(3x-4y)]\frac{\mathrm{d}(3x-4y)}{\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)+3\mathrm{e}^{-x/4}f'(3x-4y)$$

类似地，有

$$u_y=-4\mathrm{e}^{-x/4}f'(3x-4y)$$

代入方程(1.2.2)，可以得到

$$\begin{aligned}4u_x+3u_y+u&=-\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)+12\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)\\&\quad-12\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)+\mathrm{e}^{-x/4}f(3x-4y)\\&=0\end{aligned}$$

由于f可以自由选择，因此方程(1.2.2)有无穷多个解。

偏微分方程的阶数是出现在偏微分方程中阶数最高的偏微分项的阶数。方程(1.2.2)是一阶偏微分方程，而方程(1.2.1)则是二阶偏微分方程。

2. *一阶偏微分方程的分类*

先给出一般的情形。具有2个自变量x和y的一阶偏微分方程具有以下形式

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0,\quad (x,y)\in D\subset R^2 \tag{1.2.3}$$

式中，F是一个给定函数，$u=u(x,y)$是未知函数。

类似地，具有3个自变量x，y，z的一阶偏微分方程可以写成

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_z)=0 \tag{1.2.4}$$

如果未知函数$u(x,y)$的一阶偏导数项是线性的，则方程(1.2.3)和方程(1.2.4)都被称为拟线性偏微分方程。因此，一般的拟线性偏微分方程一定具有下面的形式：

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \tag{1.2.5}$$

式中，系数a,b,c是变量x,y和u的函数。

下面是几个拟线性偏微分方程的例子。

$$x(y^2+u)u_x-y(x^2+u)u_y=(x^2-y^2)u$$

$$uu_x+u_t+nu^2=0$$

$$x^2u_{xx}-yu_{xy}=u^2$$

如果F对于每一个自变量u，u_x，u_y都是线性的，且这些变量的系数都只是相互无关的变量x和y的函数，则方程(1.2.3)被称为线性偏微分方程。一般地，线性偏微分方程具有如下形式：

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=d(x,y) \tag{1.2.6}$$

式中，系数a，b，c是变量x和y的函数；$d(x,y)$是一个指定的函数。除非作特殊说明，上述的函数都是连续可微的。很显然，线性偏微分方程是拟线性偏微分方程(1.2.5)的一种特例。未知函数及其偏微分项均为线性的偏微分方程，称为线性偏微分方程，如果不是线性的则称为非线性偏微分方程。

下面是几个线性偏微分方程的例子。

$$xu_x+yu_y-nu=0$$

$$nu_x+(x+y)u_y-u=\mathrm{e}^x$$

$$yu_x+xu_y=xy$$

1.3 二阶偏微分方程

1. 二阶偏微分方程的化简

对于一般的线性二阶偏微分方程，有 2 个相互独立的变量 x 和 y，具有以下形式

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu+G=0 \tag{1.3.1}$$

式中，这些系数都是变量 x 和 y 的连续性函数。假定在同一个点(x, y)，有 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 和 $C(x,y)$ 不为零。这样，在每一个点就存在二阶导数项。上面的偏微分方程尽管在形式上简单，但在理论研究和工程应用中则内容丰富，在后续的章节中会详细讨论。

我们可以通过自变量变换的方法来求解一阶偏微分方程。同样，也可采用改变变量的方法将式(1.3.1)变换成一种容易求解的形式。作一般的自变量变换

$$\xi=\xi(x,y), \qquad \eta=\eta(x,y) \tag{1.3.2}$$

假定上述的变换是一对一的，则 Jacobian 行列式不为零，有

$$J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$$

因此，变量的反变换为 $x=x(\xi,\eta)$，$y=y(\xi,\eta)$。设 $w=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$，用链式法则进行计算，有

$$\begin{aligned}
u_x &= w_\xi\xi_x+w_\eta\eta_x \\
u_{xx} &= \xi_w w_\xi+\xi_x(w_{\xi\xi}\xi_x+w_{\eta\xi}\eta_x)+\eta_{xx}w_\eta+\eta_x(w_{\xi\eta}\xi_x+w_{\eta\eta}\eta_x) \\
&= w_{\xi\xi}\xi_x^2+2w_{\eta\xi}\xi_x\eta_x+w_{\eta\eta}\eta_x^2+w_\xi\xi_{xx}+w_\eta\eta_{xx}
\end{aligned}$$

……

经过一系列计算，变换后的偏微分方程具有以下形式

$$aw_{\xi\xi}+2bw_{\xi\eta}+cw_{\eta\eta}+dw_\xi+ew_\eta+fw+g=0 \tag{1.3.3}$$

式中

$$\begin{cases}
a=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2 \\
b=A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+C\xi_y\eta_y \\
c=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2
\end{cases} \tag{1.3.4}$$

其余的系数 d，…，g 也可以很容易写出来，但在这里的讨论中不会用到这些系数项。

经过变换之后的方程(1.3.3)和变换之前的方程(1.3.1)是完全一致的。这是因为在变换过程中没有增加任何的约束条件，因而这种变换必须是可逆的。接下来要做的工作是，选择一种特定的变换来对方程(1.3.3)进行简化。

现在设法选取变换(1.3.2)，使得方程(1.3.3)的二阶偏导数化成最简单形式。注意到式(1.3.4)中 a 和 c 的形式完全一样，仅是将 ξ 换成了 η。因此，如果能找到方程

$$A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=0 \tag{1.3.5}$$

的两个函数无关解 $\varphi=\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi=\varphi_2(x,y)$，就取

$$\xi=\varphi_1(x,y),\qquad \eta=\varphi_2(x,y)$$

此时，方程(1.3.3)中的系数 a 和 c 就变成了零。这样，式(1.3.3)就比式(1.3.1)大为简化了。接下来讨论这种选取的可能性。

关于 φ 的一阶偏微分方程(1.3.5)的求解问题可以化成求下述常微分方程在$(x,\ y)$平面上的积分曲线问题。

$$A\mathrm{d}y^2-2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y+C\mathrm{d}x^2=0 \tag{1.3.6}$$

设 $\varphi_1(x,y)=c$ 是方程(1.3.6)的一族积分曲线，则 $z=\varphi_1(x,y)$ 就是方程(1.3.5)的解。我们称方程(1.3.6)的积分曲线为方程(1.3.1)的特征线，方程(1.3.6)有时也称为特征方程。

为了求得方程(1.3.6)的积分曲线，可将方程(1.3.6)分解成如下两个方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{1.3.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A} \tag{1.3.7b}$$

这时有下面三种情形:

(1)在点(x_0,y_0)附近，$\varDelta\equiv B^2-AC>0$。此时，方程(1.3.7a)和方程(1.3.7b)的右端取相异的实数值，故积分曲线为两族不相同的实曲线，它们可以依次表示成 $\varphi_1(x,y)=c$ 和 $\varphi_2(x,y)=c$。假定 φ_{1x} 及 φ_{1y}，φ_{2x} 及 φ_{2y} 不同时为零，则变换

$$\xi=\varphi_1(x,y),\qquad \eta=\varphi_2(x,y) \tag{1.3.8}$$

是可逆变换。因为此时函数的行列式不为零。选取这样的变换后，方程(1.3.3)中的 a，c 都变成零。同时，由可逆变换不能将二阶偏微分方程变为一阶的性质可知，此时 b 不为零。因此，方程(1.3.3)可化为

$$u_{\xi\eta}=A'u_\xi+B'u_\eta+C'u+D \tag{1.3.9}$$

的形式。其中，A',B',C',D 为 ξ,η 的函数。

如果在式(1.3.9)中再作自变量的变换

$$\xi=\frac{1}{2}(s+t),\qquad \eta=\frac{1}{2}(s-t)$$

则式(1.3.9)变为

$$u_{ss}-u_{tt}=A_1u_s+B_1u_t+C_1u+D_1 \tag{1.3.10}$$

的形式。

(2)在区域 $\varOmega$ 内点(x_0,y_0)附近，$\varDelta\equiv B^2-AC\equiv 0$，并且，$A$，$B$，$C$ 不完全为零，则式(1.3.5)可化为完全平方，即

$$\left(\sqrt{A}\varphi_x+\sqrt{C}\varphi_y\right)^2=0$$

所以特征曲线只有一族，记为 $\varphi_1(x,y)=c$。选取 $\xi=\varphi_1(x,y)$，这时由于 $\varDelta\equiv 0$，所以式(1.3.4)中 b 为

$$b = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + C\xi_y\eta_y$$
$$= \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0$$

因此，式(1.3.4)中 a 和 b 同时为零。任选一函数 $\eta = \varphi_2(x,y)$，只要使 φ_1, φ_2 函数无关，方程(1.3.1)就化为

$$cu_{\eta\eta} = A'u_\xi + B'u_\eta + C'u + D$$

的形式。其中 c 不为零，用 c 除以上式两端，可以得到

$$u_{\eta\eta} = A_1u_\xi + B_1u_\eta + C_1u + D_1 \tag{1.3.11}$$

如果在式(1.3.11)中，再作未知函数的线性变换

$$\upsilon = u\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B_1(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau}$$

可得到关于 υ 的方程

$$\upsilon_{\eta\eta} = A_2\upsilon_\xi + C_2\upsilon + D_2$$

(3) 在点 (x_0, y_0) 附近，$\varDelta \equiv B^2 - AC < 0$。此时，不存在实的特征线，方程(1.3.6)的通积分只能是复数函数。假设

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \mathrm{i}\varphi_2(x,y) = c$$

是式(1.3.7a)的一个通积分，且 φ_x, φ_y 不同时为零，这里 φ_1, φ_2 是实的函数，则 $z = \varphi(x,y)$ 满足

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0$$

为了避免引入复式，作变换

$$\begin{cases} \xi = \mathrm{Re}\,\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) \\ \eta = \mathrm{Im}\,\varphi(x,y) = \varphi_2(x,y) \end{cases} \tag{1.3.12}$$

可以证明，$\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)$ 是函数无关的。事实上，由于 $\varphi(x,y) = c$ 满足式(1.3.7a)，所以

$$A\varphi_x = -(B + \mathrm{i}\sqrt{AC - B^2})\varphi_y \tag{1.3.13a}$$

把实部和虚部分开，有

$$\begin{cases} A\xi_x = -B\xi_y + \sqrt{AC - B^2}\eta_y \\ A\eta_x = -B\eta_y + \sqrt{AC - B^2}\xi_y \end{cases} \tag{1.3.13b}$$

由于 A 不等于零，所以有如下等式成立：

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}\left(\xi_y^2 + \eta_y^2\right)$$

这个行列式不为零，否则就会有 $\xi_y = \eta_y = 0$，由式(1.3.13b)可以得出 $\xi_x = \eta_x = 0$，也就是说 $\varphi_x = \varphi_y = 0$，这与函数 φ 的假设不符。因此，式(1.3.12)中的 $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)$ 是函数无关的。

由于 $\xi + \mathrm{i}\eta$ 满足方程(1.3.5)，代入后将实部和虚部分开，得到

$$A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2$$
$$A\xi_x\xi_y+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+C\xi_y\eta_y=0$$

因此，方程(1.3.1)变换成

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=A'u_\xi+B'u_\eta+C'u+D \tag{1.3.13c}$$

的形式。

2. 二阶偏微分方程的分类

线性二阶偏微分方程的类型，可根据方程(1.3.1)中，B^2-AC 值是大于零、等于零或是小于零来进行分类。

经过计算，可以得到

$$b^2-ac=(B^2-AC)J^2 \tag{1.3.14}$$

其中，B^2-AC 项称为方程(1.3.1)的判别式。方程(1.3.14)显示，变换后得到的偏微分方程和初始的偏微分方程的判别式的符号是相同的，判别式的符号一致性称为变换的不变性。根据 B^2-AC，可将偏微分方程分成以下几种类型。

$B^2-AC>0$，双曲型(波动方程)。

$B^2-AC=0$，抛物型(热传导方程)。

$B^2-AC<0$，椭圆型(调和方程——狄利克雷(Dirichlet)问题，诺伊曼(Neumann)问题)。

习　题

1. 请说明下面的一阶偏微分方程中，哪些是线性的？哪些是拟线性的？

$$(y-z)u_x+(z-x)u_y+(x-y)u_z=0$$
$$(x^2+1)u_x+(y-1)^2u_y=(x+y)u^2$$
$$uu_x+u_t+nu^2=0$$

2. 假设 c 是一个正的常数，请证明 $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ 是方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}$ 的解。

3. 请证明

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct}\varphi(s)\mathrm{d}s$$

是方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}$ 的解。其中，c 是一个正的常数。并证明这一解对于所有的实数 x 满足以下条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$$

4. 请证明下列偏微分方程哪些是双曲形，哪些是抛物形，哪些是椭圆形。

$$u_{xx}-3u_{xy}+2u_{yy}=0$$
$$u_{xx}+a^2u_{yy}=0,\quad a=0$$
$$a^2u_{xx}+2au_{xy}+u_{yy}=0,\quad a=0$$
$$4u_{tt}-12u_{xt}+9u_{xx}=0$$
$$8u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0$$
$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}=0$$

第2章 波动方程

本章详细讨论波动方程。波动方程是双曲型线性偏微分方程中最为重要的一个具体例子。在研究波的传播及物体振动时常会遇到波动方程。2.1 节导出一维波动方程和定解条件，引进定值问题适定性的概念。2.2 节利用达朗贝尔解法，导出弦振动方程柯西问题解的表达式(达朗贝尔公式)，对于非齐次方程运用齐次化原理得到解决。2.3 节中分析了傅里叶变换及其基本性质。在 2.4 节中用分离变量法讨论了弦振动方程的混合问题。2.5 节讨论了高维波动方程的柯西问题，首先用球平均函数法导出三维波动方程柯西问题的表达式(泊松方程)，然后用降维法导出二维波动方程相应的解的表达式。

2.1 一维波动方程

1. 一维弦振动方程

假定一根紧拉着的均匀柔软的弦被固定在两个弦钮之间(如吉他或是竖琴中的弦)。弦线的长为 l，两端固定在 x 轴上 O，L 两点。当它在 (x,u) 平面内平衡位置附近作垂直于 OL 方向的微小横振动时，求这弦上各点的运动规律。选择如图 2.1 所示的坐标系，并以 $u(x,y)$ 表示弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 轴方向的位移。

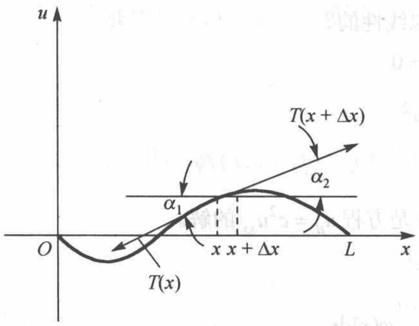

图 2.1

在这弦上任取一小弦段 $(x, x+\Delta x)$，弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.1.1}$$

假定弦仅在平衡位置附近作微小振动，因此 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 很小，于是 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 与 1 相比可以忽略不计，从而

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} 1\mathrm{d}x = \Delta x$$

这样，可以认为这段弦在振动过程中并未伸长。由胡克(Hooke)定律可知，弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变，即张力与时间无关，把在 x 点处的张力记为 $T(x)$。又假定弦是柔软的，因此张力 $T(x)$ 的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向。

作用在这段弦上的力有张力、惯性力、外力，下面写出它们的表达式和平衡条件。

如图 2.1 所示，x 点处的张力 $T(x)$ 在 x，u 两个方向上的分力分别为

$$-T(x)\cos\alpha_1, \quad -T(x)\sin\alpha_1$$

其中，α_1 是张力 $T(x)$ 的方向与水平方向的夹角，负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向。在弦段的另一端 $x+\Delta x$ 处的张力 $T(x+\Delta x)$ 在 x，u 两个方向的分力分别为

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2, \quad T(x+\Delta x)\sin\alpha_2$$

其中，α_2 是张力 $T(x+\Delta x)$ 与水平方向的夹角。

设弦的线密度为 ρ，弦段 $(x,x+\Delta x)$ 在重心 $\bar{x}$ 处的位移为 $u(\bar{x},t)$，则这小段弦在垂直于 x 方向受到的惯性力为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

当弦段没有受外力作用时，根据牛顿第二定律，有

$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2 - T(x)\sin\alpha_1 = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2} \tag{2.1.2}$$

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0 \tag{2.1.3}$$

由于假设弦仅在平衡位置附近作微小振动，所以

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1 \tag{2.1.4}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1 \tag{2.1.5}$$

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{2.1.6}$$

$$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} \tag{2.1.7}$$

于是，式(2.1.3)变为

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0 \tag{2.1.8}$$

所以 $T(x+\Delta x)=T(x)=T$，也就是说，T 是一个常数，从而式(2.1.2)变为

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1.9}$$

应用中值定理得到

$$T\frac{\partial^2 u(x+\tau\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x - \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0<\tau<1$$

消去 Δx，并另 $\Delta x\to 0$，此时 $x+\tau\Delta x\to x$，$\bar{x}\to x$，上式化为

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

记 $\dfrac{T}{\rho}=a^2$，就得到在外力作用时弦振动所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1.10}$$

当存在外力作用时，若在点 x 处外力密度为 $F(x,t)$，其方向垂直于 x 轴，则小弦段 $(x,x+\Delta x)$ 上所受外力为

$$\int_x^{x+\Delta x} F(x,t)\mathrm{d}x$$

此时，方程(2.1.2)的右侧应添加上这一项，因而力的平衡方程变为

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\overline{x},t)}{\partial t^2}=-\int_x^{x+\Delta x} F(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.1.11}$$

在等式两边应用中值定理，并令 $\Delta x\to 0$，所以，式(2.1.11)化为

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-F(x,t) \tag{2.1.12}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{2.1.13}$$

这就是外力作用下弦振动所满足的方程，其中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$，表示单位质量在 x 点处所受的外力。

可以看出，上述的弦振动方程中只含有两个自变量 x,t，其中 t 表示时间，x 表示位置。由于它描写的是弦的振动或波动现象，所以又称为一维波动方程。类似地，可导出二维波动方程(如薄膜振动)和三维波动方程(如电磁波、声波的传播)，它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{2.1.14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{2.1.15}$$

2. 方程的定解问题

上面所导出的弦振动方程(2.1.13)包含有未知函数 $u(x,t)$ 和它的关于自变量的偏导数，是一个偏微分方程。对于偏微分方程，如果有一个函数 $u(x,t)$，具有所需要的各阶连续偏导数，将它代入方程时能使方程成为恒等式，就称这个函数是该方程的解。列出微分方程后，目的就是要从微分方程中求得解。例如，为了了解弦的振动情况，就应该设法求出相应的弦振动方程的解。

可以看到，弦振动方程(2.1.13)描述了弦在作微小横振动时位移函数 $u(x,t)$ 所应满足的一般性规律，但仅利用它还不能完全确定所考察弦的运动状况，这是因为它的运动还与初始状态以及边界所处的状况有关。因此还必须给出一些其他条件。

在上述弦振动问题中，弦的两端被固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点，因此有

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 \tag{2.1.16}$$

它称为**边界条件**。此外，设弦在初始时刻 $t=0$ 时的位置和速度分别为

$$u(x,0)=\phi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x)\qquad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{2.1.17}$$

它被称为**初始条件**。边界条件与初始条件总称为**定解条件**。把弦振动方程(2.1.13)和定解条件(2.1.16)、(2.1.17)结合起来，就得到如下的定解问题：