

萬 有 文 庫

第二集七百種

王 雲 五 主 編

數 理 精 蘊

(八)

清 聖 祖 數 編

商 務 印 書 館 發 行

數理精蘊

(八)

清聖祖敕編

數理精蘊下編卷二十三

體部一

立方

立方者等邊六面之體積也。以形而言。雖爲六面十二邊之所合。以積而言。則爲自乘再乘之數。因其縱橫與高俱相等。故十二邊皆如一線。得其一邊而十二邊莫不相同。其積之也。自線而面。自面而體。次第相乘而後得其全積。其開之也。必次第析之而後得其一邊。是故古人立爲方廉長廉之制。每積三位而得邊之一位。所謂一千商十定無疑。三萬纔爲三十餘。九十九萬不離十百萬。方爲一百推是也。其法先從一角而剖其體。以自一至九自乘再乘之數爲方根。與實相審量其足減者而定之。是爲初商。初商減盡無餘。則方根止一位。若有餘實。卽初商方積外。別成一缺角三面磬折體。其附初商之三面者。謂之方廉。其附初商之三邊者。謂之長廉。其附初商之角者。謂之隅。廉有三。故以三爲廉法。隅惟一。而隅之三面卽符於三長廉之端。合三方廉三長廉一隅。始合次商之數。故商除之法。以初商自乘三。因爲三方廉面積。視初商餘實。足方廉面積幾倍。卽定爲次商。乃以次商乘三長廉爲三長廉面積。又以次商自乘爲小隅面積。共合三方廉三長廉及一小隅面積。以次商數乘之。爲次商廉隅之共積。所謂初商方積外。別成一缺角三面磬折體者是也。如次商外尙有不盡之實。則初商次商方積外。仍爲三方廉三長廉一小隅。

又成一三面磬折體。但較前方廉愈大。長廉愈長。而隅愈小耳。凡有幾層廉隅。俱照次商之例遞析之。實盡而止。如開至多位實仍不盡者。必非自乘再乘之正數。此開立方之定法也。體形不一。而容積皆以立方爲準。故立方爲算諸體之本。諸體必通之立方而法乃可施也。

設如正方體積一百二十五尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積一百二十五尺。自末位起算。每方積三位。定方邊一位。今積止有三位。則於五尺上作記定單位。以自一至九自乘再乘之方根數與之相審。知與五尺自乘再乘之數恰合。乃以五尺書於方積五尺之上。而以五尺自乘再乘之一百二

十五尺。書於方積原數之下。相減恰盡。即得開方之數爲五尺也。如圖甲乙丙丁戊己正方體形。每邊皆

五尺。其中函一尺小方體一百二十五。自邊

計之爲五尺。自面計之則爲五尺。自乘之

十五尺。自通體計之則爲五尺。自乘再乘之

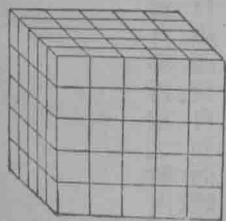
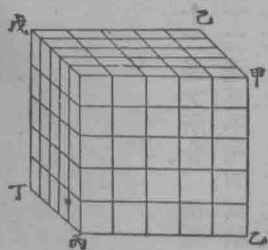
一百二十五尺。以積開之。則與五尺自乘再

乘之數相準。故商除之恰盡也。蓋方積爲三

位。是以方邊止一位。方積即五尺。自乘再乘

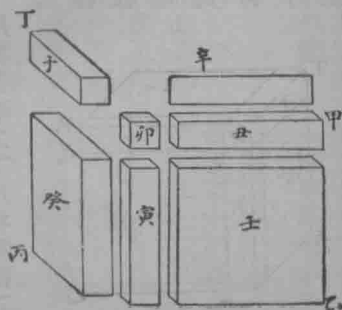
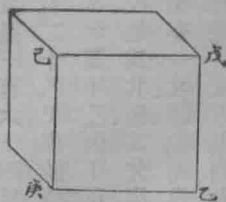
之數。別無廉隅。故不用次商。如有餘實。則自

成廉隅而用次商矣。



五	五
一	二
一	二
〇	〇

商數其闊其厚皆二尺亦卽次商數方廉有三故三倍初商之自乘爲廉法以定次商其卯形一小正方體爲隅其長與闊與厚皆同爲二尺亦卽次商數故以次商爲隅法合辛壬癸三方廉子丑寅三長廉卯一方隅而成一聲折體形附於初商自乘再乘之方體三面而成一甲乙丙丁之總正方體積此立方廉隅之法所由生也三商以後皆倣此遞析開之



又法列積一丈七百二十八尺自末位起算作記定位同前乃截一丈爲初商積與一丈自乘再乘之數相合則定初商爲一丈書於方積一丈之上而以一丈自乘再乘之一丈書於初商積之下相減恰盡乃以方邊末位餘積七百二十八尺續書於下爲次商廉隅之共積而以初商之一丈作一十尺自乘得一百尺三因之得三百尺爲次商三方廉面積卽以三方廉面積三百尺除方積七百二十八尺足二尺則定次商爲二尺書於方積八尺之上合初商共一丈二尺自乘再乘得一丈七

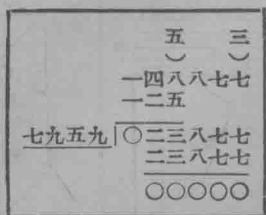
二	八				
一	七	二	八		
一	一	一	一		
三	〇	〇	〇	〇	〇
一	七	二	八		
一	一	一	一		
三	〇	〇	〇	〇	〇

百二十八尺與原積符合相減恰盡卽定立方邊爲一丈二尺也此法止用三方廉面積除立方體積得

次商數。卽併初商數自乘再乘。得數與原積相減。雖爲省去長廉小隅一層。然方邊位數少者。還爲簡易。至於方邊位數過四位以上。則累次自乘再乘。反比遞析之理爲煩矣。

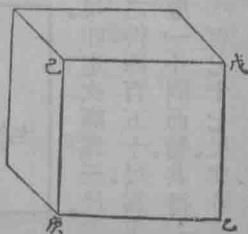
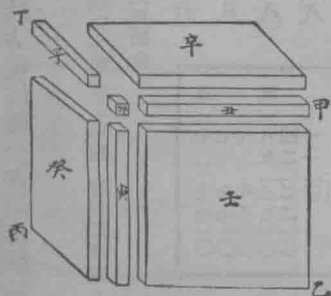
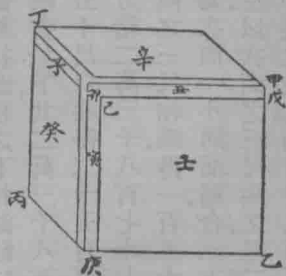
設如正方體積一十四萬八千八百七十七尺。開立方。問每一邊數幾何。此題正方體積之六位。皆以尺命位。似與前題分丈尺者不同。然其取方積三位。續書於下。其末位卽命爲單位。立算則與丈尺同也。

法列正方體積一十四萬八千八百七十七尺。自末位起算。每方積三位定方邊一位。故隔二位作記。乃於七尺上定單位。八千尺上定十位。其一十四萬八千尺爲初商積。以初商本位計之。則八千尺爲初商積之單位。而一十四萬八千尺爲一百四十八。止與五自乘再乘之數相準。卽定初商爲五。書於方積八千尺之上。而以五自乘再乘之一百二十五。書於初商積之下。相減餘二萬三千尺。爰以方邊第二位餘積八百七十七尺。續書於下。共二萬三千八百七十七尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之五作五十尺。自乘得二千五百尺。三因之得七千五百尺。爲次商三方廉面積。以除方積二萬三千八百七十七尺。足三尺。卽定次商爲三尺。書於方積七尺之上。而以初商之五十尺與次商之三尺相乘。得一百五十尺。三因之得四百五十尺。爲次商三長廉面積。復以次商三尺自乘得九尺。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得七千九百五十九尺。爲廉隅共法。書於餘積之左。以次商之三尺乘之。得二萬三千八百七十七尺。與餘積相減恰盡。是開得五十三尺。爲正方體積每一邊之數也。如圖甲乙丙丁正方體形。每邊五十三尺。其中



函積一十四萬八千八百七十七尺。是爲共積。其從一角所分戊乙庚己方體。每邊五十尺。卽初商邊數。其中函積一十二萬五千尺。卽初商自乘再乘之數。所餘辛形壬形癸形三方體爲三方廉。其每邊五十尺。卽初商數。其厚三尺。卽次商數。而子形丑形寅形三長方體爲三長廉。其每邊五十尺。亦卽初商數。其闊其厚皆三尺。亦卽次商數。方廉有三。故三倍初商之自乘爲廉法。以定次商。其卯形一小正方體爲隅。其長與闊與厚皆同爲三尺。亦卽次商數。故以次商爲隅法。合辛壬癸三方廉。子丑寅三長廉。卯一方隅。而成一磬折體形。附於初商自乘再乘之方體三面。而成一甲乙丙丁之總正方體積也。

又法。列積一十四萬八千八百七十七尺。自末位起算作記。定位同前。乃截一十四萬八千尺爲初商積。與五十自乘再乘之數相準。則定初商五十尺。書於方積八千尺之上。而以五十自乘再乘



之一十二萬五千尺。書於原積一十四萬八千之下。相減餘二萬三千尺。乃合
 第二位積八百七十七尺。共二萬三千八百七十七尺。爲次商廉隅之共積。而
 以初商五十尺自乘得二千五百尺。三因之得七千五百尺。爲次商三方廉面
 積。卽以三方廉面積除方積二萬三千八百七十七尺。足三尺。卽定次商爲三
 尺。書於方積七尺之上。合初商共得五十三尺。自乘再乘得一十四萬八千八
 百七十七尺。與原積符合。相減恰盡。卽定立方邊爲五十三尺也。此法亦止用
 三方廉面積除立方體積得次商數。卽併初商數自乘再乘以減原積也。
 設如正方體積一丈八百六十尺八百六十七寸。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積一丈八百六十尺八百六十七寸。自末位起算。每方積三
 位。定方邊一位。故隔二位作記。卽於七寸上定寸位。空尺上定尺位。一丈
 上定丈位。其一丈爲初商積。與一丈自乘再乘之數相合。卽定初商爲一
 丈。書於方積一丈之上。而以一丈自乘再乘之一丈。書於初商積之下。相
 減恰盡。爰以方邊第二位餘積八百六十尺續書於下。爲次商廉隅之共
 積。乃以初商之一丈作一十尺。自乘得一百尺。三因之得三百尺。爲次商
 三方廉面積。以除八百六十尺。足二尺。卽定次商爲二尺。書於方積空尺
 之上。而以初商之一十尺與次商之二尺相乘得二十尺。三因之得六十尺。爲次商三長廉面積。復以次

(一)	(二)	(三)	
一	一八六〇	八六七	
三六四	〇八六〇		
	七二八		
四四二八九	一三二八六七		
	一三二八六七		
	〇〇〇〇〇〇		

	(五)	(三)	
	一四八八七七	一四五	
七五〇〇	〇二三八七七		
	一四八八七七		
	〇〇〇〇〇〇		

商之二尺自乘得四尺。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得三百六十四尺。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之二尺乘之。得七百二十八尺。與次商廉隅共積相減。餘一百三十二尺。卽一十三萬二千寸。復以方邊第三位餘積八百六十七寸續書於下。共一十三萬二千八百六十七寸。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之一丈二尺作一百二十寸。自乘得一萬四千四百寸。三因之得四萬三千二百寸。爲三商三方廉面積。以除一十三萬二千八百六十七寸。足三寸。卽定三商爲三寸。書於方積七寸之上。而以初商次商之一百二十寸。與三商之三寸相乘。得三百六十寸。三因之得一千零八寸。爲三商三長廉面積。復以三商之三寸自乘得九寸。爲三商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得四萬四千二百八十九寸。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之三寸乘之。得一十三萬二千八百六十七寸。與三商廉隅共積相減。恰盡。是開得一丈二尺三寸。爲正方體積每一邊之數也。設如正方體積九千四百八十一萬八千八百一十六尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積九千四百八十一萬八千八百一十六尺。自末位起算。每方積三位。定方邊一位。故隔二位作記。乃於六尺上定單位。八千尺上定十位。四百萬尺上定百位。其九千四百萬尺爲初商積。以初商本位計之。則四百萬尺爲初商積之單位。而九千四百萬尺爲九十四。止與四自乘再乘之數相準。卽定初商爲四。書於方積四百萬尺之上。而以四自乘再乘之六十四。書於初商積之下。相減餘三千萬尺。爰以方邊第二位餘積八十一萬八千尺。續書於下。共三千零八十一萬八千尺。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則八千尺爲次商積之單位。而三千零八十一萬八千尺。爲三萬零八百一十八。而初商之

四。卽爲四十。乃以初商之四十自乘。得一千六百。三因之得四千八百。爲次商。三方廉面積。以除三萬零八百一十八。足五倍。卽定次商爲五。書於方積八千尺之上。而以初商之四十與次商之五相乘。得二百。三因之得六百。爲次商三長廉面積。復以次商之五自乘。得二十五。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得五千四百二十五。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之五乘之。得二萬七千一百二十五。與次商廉隅共積相減。餘三百六十九萬三千尺。復以方邊末位餘積八百一十六尺續書於下。共三百六十九萬三千八百一十六尺。爲三商廉隅之共積。以三商本位計之。則積與邊皆仍爲本位。乃以初商次商之四百五十尺自乘。得二十萬零二千五百。三因之得六十萬零七千五百。爲三商三方廉面積。以除三百六十九萬三千八百一十六尺。足六倍。卽定三商爲六。書於方積六尺之上。而以初商次商之四百五十與三商之六相乘。得二千七百。三因之得八千一百。爲三商三長廉面積。復以三商之六自乘。得三十六。爲三商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得六十一萬五千六百三十六。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之六乘之。得三百六十九萬三千八百一十六。與三商廉隅共積相減。恰盡。是開得四百五十六尺。爲正方體積每一邊之數也。

設如正方體積三百四十七丈四百二十八尺九百二十七寸。開立方。問每一邊數幾何。

	四	五	六
	九四八	八一八	八一六
	六四		
五四二五	三〇八一八		
	二七一二五		
六一五六三六	〇三六九三	八一六	
	三六九三	八一六	
	〇〇〇〇〇〇		

法列正方體積三百四十七丈四百二十八尺九百二十七寸。自末位起算。每隔二位作記。即於七寸上定寸位。八尺上定尺位。七丈上定丈位。其三百四十七丈爲初商積。與七丈自乘再乘之數相準。即定初商爲七丈。書於方積七丈之上。而以七丈自乘再乘之三百四十三丈。書於初商積之下。相減餘四丈。即四千尺。爰以方邊第二位餘積四百二十八尺續書於下。共四千四百二十八尺。爲次商廉隅之共積。乃以初商之七丈作七十尺。自乘得四千九百尺。三因之得一萬四千七百尺。爲次商三方廉面積。以除方積四千四百二十八尺。其數不足。是次商爲空位也。乃書一空於方積八尺之上。以存次商之位。復以方邊末位餘積九百二十七寸續書於下。共四千四百二十八尺九百二十七寸。即四百四十二萬八千九百二十七寸。爲三商廉隅之共積。仍以次商三方廉面積一萬四千七百尺作一百四十七萬寸爲廉法。以除四百四十二萬八千九百二十七寸。足三寸。即定三商爲三寸。書於方積七寸之上。又以初商之七丈爲七百寸。與三商之三寸相乘。得二千一百寸。三因之得六千三百寸。爲三商三長廉面積。復以三商之三寸自乘得九寸。爲三商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得一百四十七萬六千三百零九寸。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之三寸乘之。得四百四十二萬八千九百二十七寸。與三商廉隅共積相減恰盡。是開得七丈零三寸爲正

七	〇	三
三四七四二八九二七		
三四三		
一四七六三〇九	〇〇四四二八九二七	
	四四二八九二七	
	〇〇〇〇〇〇〇	

方體積每一邊之數也。此法商出之方邊有空位。凡廉法除餘積而數不足者。皆依此例推之。

設如正方體積三千九百三十萬四千尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積三千九百三十萬四千尺。補三空位以足其分。自末空位起算。每隔二位作記。乃於空尺上定單位。四千尺上定十位。九百萬尺上定百位。其三千九百萬尺爲初商積。以初商本位計之。則九百萬尺爲初商積之單位。而三千九百爲三十九。止與三自乘再乘之數相準。卽定初商爲三。書於方積九百萬尺之上。而以三自乘再乘之二十七。書於初商積之下。相減餘一千二百萬尺。爰以方邊第二位餘積三十萬四千尺續書於下。共一千二百三十萬四千尺。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則四千尺爲次商積之單位。而一千二百三十萬四千尺。爲一萬二千三百零四。而初商之三卽爲三十。乃以初商之三十自乘得九百三。因之得二千七百。爲次商三方廉面積。以除餘積一萬二千三百零四。足四倍。卽定次商爲四。書於方積四千尺之上。又以初商之三十與次商之四相乘。得一百二十三。因之得三百六十。爲次商三長廉面積。復以次商之四自乘。得一十六。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得三千零七十六。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之四乘之。得一萬二千三百零四。與餘積相減恰盡。是開得三百四十尺。爲正方體積每一邊之數也。此法方積之末有三空位。故所得方邊之末亦補一空位。凡設數未至單位者。皆依此例補足位分。然後開之。

設如正方體積一丈八百七十九尺零八寸九百零四分。開立方。問每一邊數幾何。

三	四	〇	〇	〇	〇
三	九	三	〇	四	〇
二	七	〇	〇	〇	〇
三	〇	七	六	〇	〇
一	二	三	〇	四	〇
一	二	三	〇	四	〇
〇	〇	〇	〇	〇	〇

法列正方體積一丈八百七十九尺零八十寸九百零四分。自末位起算。每隔二位作記。於四分上定分位。空寸上定寸位。九尺上定尺位。一丈上定丈位。其一丈爲初商積。與一丈自乘再乘之數相合。卽定初商爲一丈。書於方積一丈之上。而以一丈自乘再乘之一丈。書於初商積之下。相減恰盡。爰以方邊第二位餘積八百七十九尺續書於下。爲次商廉隅之共積。乃以初商之一丈作一十尺。自乘得一百尺。三因之得三百尺。爲次商三方廉面積。以除八百七十九尺。足二尺。卽定次商爲二尺。書於方積九尺之上。而以初商之一十尺與次商之二尺相乘得二十尺。三因之得六十尺。爲次商三長廉面積。復以次商之二尺自乘得四尺。爲次商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得三百六十四尺。爲次商廉隅共法。書於餘積之左。以次商之二尺乘之。得七百二十八尺。與餘積相減。仍餘一百五十一尺。卽一十五萬一千寸。又以方邊第三位餘積八十寸續書於下。共一十五萬一千零八十寸。爲三商廉隅之共積。乃以初商次商之一丈二尺作一百二十寸。自乘得一萬四千四百寸。三因之得四萬三千二百寸。爲三商三方廉面積。以除一十五萬一千零八十寸。足三寸。卽定三商爲三寸。書於方積空寸之上。而以初商次商之一百二十寸與三商之三寸相乘。得三百六十寸。三因之得一千零八十寸。爲三商三長廉面積。復以三商之三寸自乘得九寸。爲三商一小隅面積。合三

一	二	三	四
一	二	三	四
一八七九〇八〇九〇四			
二			
三六四	一〇八七九		
	七二八		
四四二八九	一五一〇八〇		
	一三二八六七		
四五五三四七六	一〇一八二一三九〇四		
	一八二一三九〇四		
	〇〇〇〇〇〇〇〇		

方廉三長廉一小隅面積。共得四萬四千二百八十九寸。爲三商廉隅共法。書於餘積之左。以三商之三寸乘之。得一十三萬二千八百六十七寸。與餘積相減。仍餘一萬八千二百一十三寸。卽一千八百二十一萬三千分。又以方邊第四位餘積九百零四分續書於下。共一千八百二十一萬三千九百零四分。爲四商廉隅之共積。乃以初商次商三商之一百二十三寸。作一千二百三十分。自乘得一百五十一萬二千九百零四分。三因之。得四百五十三萬八千七百零四分。爲四商三方廉面積。以除一千八百二十一萬三千九百零四分。足四分。卽定四商爲四分。書於方積四分之上。而以初商次商三商之一千二百三十分。與四商之四分相乘。得四千九百二十分。三因之。得一萬四千七百六十分。爲四商三長廉面積。復以四商之四分自乘。得一十六分。爲四商一小隅面積。合三方廉三長廉一小隅面積。共得四百五十五萬三千四百七十六分。爲四商廉隅共法。書於餘積之左。以四商之四分乘之。得一千八百二十一萬三千九百零四分。與餘積相減。恰盡。是開得一丈二尺三寸四分。爲正方體積每一邊之數也。

設如正方體積八十億六千零一十五萬零一百二十五尺。開立方。問每一邊數幾何。

法列正方體積八十億六千零一十五萬零一百二十五尺。自末位起算。每隔二位作記。於五尺上定單位。空千尺上定十位。空百萬尺上定百位。八十億尺上定千位。其八十億尺爲初商積。以初商本位計之。則八十億尺爲初商積之單位。而八十億尺爲八。止與二自乘再乘之數相合。卽定初商爲二。書於方積八十億尺之上。而以二自乘再乘之八。書於初商積之下。相減恰盡。爰以方邊第二位餘積六千萬尺續書於下。爲次商廉隅之共積。以次商本位計之。則空百萬尺爲次商之單位。而六千萬尺爲六十。而初商

