普通高等教育“十二五”规划教材·经济管理类数学基础系列

# 概率论与数理统计

## （第二版）

李伯德　智　婕　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
经济管理类数学基础系列

# 概率论与数理统计

（第二版）

李伯德　智　婕　主编

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书是“普通高等教育‘十二五’规划教材·经济管理类数学基础系列”之一.全书包括八章内容:随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验及回归分析.

本书体系完整,逻辑清晰,深入浅出,便于自学,既可作为高等学校经济类、管理类专业和其他相关专业概率论与数理统计课程的教材或教学参考书,也可供考研者参考使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/李伯德,智婕主编.—2版.—北京:科学出版社,2015
普通高等教育“十二五”规划教材.经济管理类数学基础系列
ISBN 978-7-03-044457-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李…②智… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 114493 号

责任编辑:相 凌 孙翠勤/责任校对:李 影
责任印制:赵 博/封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
文林印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2015 年 6 月第 二 版 印张:15 1/2
2015 年 6 月第九次印刷 字数:320 000

**定价:28.00 元**
(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 第二版前言

2010年本书第一版出版以来，按照全国高等学校教学研究中心研究项目“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的要求，进行了五年的教学实践．五年中，读者和使用本书的同行们提出了许多宝贵的修改意见和建议，这些意见和建议除了在平时的教学实践中不断吸纳外，借这次修订机会，对本书的部分内容也作了相应调整与修订，使其更符合先易后难、循序渐进的教学规律．本书是兰州财经大学“质量工程”——“经济数学基础系列课程教学团队(2013年度)”教材建设的阶段性成果．

本书习题配置合理，难易适度，适当融入了一些研究生入学考试内容，选用了近年全国硕士研究生入学统一考试中的部分优秀试题，如1998考研真题用(1998)表示，2009考研真题用(2009)表示．教材每章后的习题均为(A)(B)两组，其中(A)组习题反映了本科经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题综合性较强，可供学有余力或有志报考硕士研究生的学生练习．

各章中标有“*”的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或供读者自学使用．

本书由李伯德、智婕主编．第1章由张再玲编写，第2章由智婕编写，第3、4章由李伯德编写，第5、6章由刘转玲编写，第7、8章由张力远编写，全书由主编统稿定稿．

尽管这次修订编者希望本书更符合现代教育教学规律，更符合大学数学教学的实际，更容易被读者所接纳，但仍可能存在不妥之处，恳请读者和同行继续批评指正．

编　者

2015年3月

# 第一版前言

本书是“中国科学院‘十一五’规划教材·经济管理类数学基础系列”教材之一，是全国高等学校教学研究中心“科学思维、科学方法在高校数学课程教学创新中的应用与实践”的研究成果.本书由多年从事数学教学实践的教师，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类数学基础课程教学基本要求”和最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学(三)》考试大纲的要求，按照继承与改革的精神编写而成.

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象统计规律性的数学课程，在工程技术、军事、经济、管理乃至社会科学诸多领域有着广泛的应用，是经济管理类专业学生必修的基础课程.

同时，它还是一门基础理论与应用方法并重的课程.对基础理论部分，本书从实例出发，逐步归纳分析，最终给出一般性的概念和结论，并注重其实际意义的解释说明，力求通俗易懂，如概率的公理化定义、中心极限定理等.这样由浅入深学习，可以培养学生的抽象思维能力.在实际应用方面，本书对应用型例题进行了精心编排，力求具有针对性、实用性，注重对学生解决问题能力的训练，有利于激发学生的学习兴趣，提高学习效率.

本书的大多数例题和习题都体现了经济管理的特色，学生可以更多地接触用数学方法解决经济管理问题的实例，以提高分析问题、解决问题的能力.

本书由李伯德教授、张再玲副教授主编.第1章由张再玲编写，第2章由智婕编写，第3、5章由樊馨蔓编写，第4章由李伯德编写，第6、7章由刘转玲编写，第8、9章由王媛媛编写，全书由主编统稿定稿.

由于编者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者及专家学者批评指正.

编　者

2010年3月

# 目　　录

**第 1 章　随机事件与概率** ………… 1
1.1　随机事件 ………… 1
一、随机现象 ………… 1
二、随机试验与样本空间 ………… 2
三、随机事件 ………… 2
四、随机事件的集合表示 ………… 3
五、事件的关系与运算 ………… 3
六、事件的运算性质 ………… 5
1.2　随机事件的概率 ………… 6
一、用频率估计概率 ………… 6
二、概率的公理化定义 ………… 8
三、概率的性质 ………… 8
1.3　古典概型和几何概型 ………… 10
一、古典概型 ………… 10
二、几何概型 ………… 14
1.4　条件概率与概率的三个基本公式 ………… 15
一、条件概率 ………… 15
二、乘法公式 ………… 17
三、全概率公式 ………… 18
四、贝叶斯公式 ………… 19
1.5　事件的独立性与独立重复试验 ………… 21
一、两个事件的独立性 ………… 21
二、有限个事件的独立性 ………… 22
三、$n$ 重伯努利试验 ………… 23
习题 1 ………… 25
**第 2 章　随机变量及其分布** ………… 30
2.1　随机变量及其概率分布 ………… 30
一、随机变量的概念 ………… 30
二、随机变量的分布函数 ………… 31
2.2　离散型随机变量 ………… 32

一、离散型随机变量的概率分布 …… 32
二、离散型随机变量的分布函数 …… 35
2.3 连续型随机变量 …… 36
一、连续型随机变量的概率密度 …… 37
二、连续型随机变量的分布函数 …… 38
2.4 随机变量函数的分布 …… 40
一、离散型随机变量函数的分布 …… 41
二、连续型随机变量函数的分布 …… 42
2.5 随机变量的数学期望与方差 …… 44
一、随机变量的数学期望 …… 44
二、随机变量的方差 …… 48
2.6 常用分布及其数字特征 …… 50
一、常用的离散型分布及其数字特征 …… 50
二、常用的连续型分布及其数字特征 …… 58
2.7 随机变量的矩和切比雪夫不等式 …… 66
一、矩的概念 …… 66
二、切比雪夫不等式 …… 67
习题 2 …… 69
**第 3 章 多维随机变量及其分布** …… 75
3.1 多维随机变量及其联合分布函数 …… 75
一、多维随机变量的概念 …… 75
二、联合分布函数 …… 75
三、联合分布函数的性质 …… 76
四、边缘分布函数 …… 77
3.2 二维离散型随机变量 …… 78
一、联合概率分布 …… 78
二、边缘概率分布 …… 81
三、条件概率分布 …… 82
3.3 二维连续型随机变量 …… 83
一、联合概率密度 …… 83
二、边缘概率密度 …… 85
三、条件概率密度 …… 85
四、两种重要的二维连续型分布 …… 86
3.4 随机变量间的独立性 …… 89
一、两个随机变量相互独立的概念 …… 89

二、离散型随机变量独自的充要条件 …… 89
三、连续型随机变量独立的充要条件 …… 90
四、二维正态随机变量的两个分量独立的充要条件 …… 91
*五、$n(n>2)$个随机变量相互独立的结论 …… 92
3.5 二维随机变量函数的分布 …… 92
一、二维离散型随机变量函数的分布 …… 92
二、二维连续型随机变量函数的分布 …… 94
*三、两个连续型随机变量之差、积与商的概率密度 …… 98
3.6 二维随机变量的数字特征 …… 99
一、两个随机变量的函数的期望公式 …… 99
二、数学期望与方差的运算性质 …… 100
三、协方差 …… 102
四、相关系数 …… 105
习题 3 …… 108
**第 4 章 大数定律与中心极限定理** …… 114
4.1 大数定律 …… 114
一、依概率收敛 …… 114
二、大数定律 …… 114
4.2 中心极限定理 …… 116
一、独立同分布下的中心极限定理 …… 117
二、二项分布的极限分布是正态分布 …… 117
三、中心极限定理用于统计推断(近似计算) …… 118
习题 4 …… 121
**第 5 章 数理统计的基础知识** …… 123
5.1 数理统计的基本概念 …… 123
一、总体和个体 …… 123
二、样本与样本分布 …… 124
三、统计量 …… 125
四、常用的统计量 …… 126
5.2 常用的统计分布 …… 127
一、分位数 …… 127
二、$\chi^2$ 分布 …… 128
三、$t$ 分布 …… 130
四、$F$ 分布 …… 132
5.3 抽样分布 …… 134

一、抽样分布概述 …… 134
二、正态总体的抽样分布 …… 134
三、非正态总体的抽样分布 …… 139
习题 5 …… 139
**第 6 章 参数估计** …… 142
6.1 点估计概述 …… 142
一、点估计的概念 …… 142
二、评价估计量的标准 …… 143
6.2 最大似然估计与矩估计 …… 146
一、最大似然估计 …… 146
二、矩估计 …… 151
6.3 区间估计 …… 153
一、单个正态总体参数的置信区间 …… 154
二、双正态总体参数的区间估计 …… 159
习题 6 …… 163
**第 7 章 假设检验** …… 167
7.1 假设检验的基本概念 …… 167
一、假设检验问题的提出 …… 167
二、假设检验的基本思想 …… 168
三、显著性水平与拒绝域 …… 169
四、假设检验的两类错误 …… 170
五、假设检验的基本步骤 …… 170
7.2 一个正态总体参数的假设检验 …… 171
一、均值的假设检验 …… 171
二、方差的假设检验 …… 174
7.3 两个正态总体参数的假设检验 …… 175
一、两均值差异性的假设检验 …… 175
二、两均值未知时,两方差差异性的假设检验 …… 178
*7.4 比率的假设检验 …… 179
一、单总体比率的假设检验 …… 179
二、两总体比率的差异性比较 …… 180
*7.5 参数的假设检验与区间估计的关系 …… 181
*7.6 非参数的假设检验 …… 182
一、频率直方图 …… 183
二、皮尔逊 $\chi^2$ 拟合检验法 …… 184

习题 7 …… 186
**第 8 章　回归分析** …… 189
8.1　回归分析概述 …… 189
8.2　一元线性回归分析 …… 190
一、一元线性回归模型 …… 190
二、参数 $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ 的最小二乘估计 …… 191
三、一元线性回归模型的显著性检验 …… 195
四、预测和控制 …… 198
*8.3　一元非线性回归模型的线性化 …… 201
*8.4　多元线性回归 …… 204
一、多元线性回归模型 …… 204
二、回归系数的最小二乘估计 …… 205
三、回归模型的显著性检验 …… 206
四、多元线性回归模型的预测 …… 208
习题 8 …… 209
**部分习题参考答案** …… 211
**参考文献** …… 226
**附表** …… 227
附表 1　泊松分布表 …… 227
附表 2　标准正态分布函数 $\Phi(x)$ …… 229
附表 3　$\chi^2$ 分布上侧分位数 $\chi^2_{\alpha,n}(1 \leqslant n \leqslant 45)$ …… 230
附表 4　$F$ 分布上侧分位数 $F_\alpha(n_1, n_2)$ …… 232
附表 5　$t$ 分布上侧分位数表 …… 237
附表 6　检验相关系数的临界值表 …… 238

# 第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门应用性学科. 它的理论与方法广泛应用于工业、国防、经济与工程技术等领域. 本章主要内容有：随机事件、频率与概率、概率的公理化定义、古典概型和几何概型、条件概率、概率的三个基本公式(乘法公式、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式)及事件的独立性与独立重复试验等.

## 1.1 随机事件

### 一、随机现象

在自然界和人类社会生活中出现的现象，大致可分为两类：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**. 例如：向上抛一石子必然下落，同性电荷必然排斥，“旭日东升”“夕阳西下”等. 而另一类则是在一定条件下无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**.

例如：

(1) 抛掷一枚质地均匀的硬币，有可能正面朝上，也有可能反面朝上；

(2) 掷一颗质地均匀的骰子，出现的点数；

(3) 将来某日某种股票的价格；

(4) 某型号电池的寿命；

(5) 未来某天进入某超市的顾客数.

随机现象到处可见. 由于随机现象的结果事先不能预知，初看起来似乎毫无规律. 然而人们发现同一随机现象在大量重复出现时，其每种可能的结果的频率却具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的量的规律性，人们把随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**. 例如，一名优秀的射手，一两次射击不足以反映其真正水平，只有多次重复射击才能反映其真正水平. 再例如，抛掷一枚质地均匀的硬币，尽管掷一次时，有可能正面朝上，也有可能反面朝上，但是重复掷多次时，将会发现正面与反面朝上的次数大致相等，各占总次数的 1/2.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门学科.

## 二、随机试验与样本空间

### 1. 随机试验

为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行大量的重复观察，对随机现象的观察称为**随机试验**，简称**试验**，记为 $E$.

**例 1**　抛掷一枚硬币，观察朝上的是哪个面.

**例 2**　同时抛掷两枚硬币，观察两枚分别朝上的是哪个面.

**例 3**　掷一颗骰子，观察出现的点数.

**例 4**　观察某高速公路上一段时间内发生的交通事故数.

**例 5**　考察某地 12 月份的最低气温(设范围为 $t_1 \sim t_2$).

**例 6**　从一批灯泡中，任取一只，测定灯泡的寿命.

以上都是随机试验的例子. 一般地，随机试验具有如下三个特点：

(1) **可重复性**　试验在相同的条件下可重复进行；

(2) **随机性**　每次试验的结果是不确定的，事先无法准确预知；

(3) **可观察性**　试验结果是可观察的，所有可能的结果是明确的.

### 2. 样本空间

随机试验 $E$ 的每一个可能的结果称为一个样本点，记为 $\omega$. 由全体样本点组成的集合称为**样本空间**，记为 $\Omega$，即 $\Omega=\{\omega\}$.

例 1 的样本空间 $\Omega_1=\{$正，反$\}$.

例 2 的样本空间 $\Omega_2=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$.

例 3 的样本空间 $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 4 的样本空间 $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 5 的样本空间 $\Omega_5=\{t \mid t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$.

例 6 的样本空间 $\Omega_6=\{t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}$.

**注**　样本空间的元素可以是数也可以不是数；样本空间中至少有两个样本点；从样本空间所含元素的个数来区分，样本空间可分为有限与无限两类.

## 三、随机事件

在概率论中，把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为事件. 事件可分为以下三类.

### 1. 随机事件

在试验中可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，随机事件通常用字母 $A,B,C$ 等表示.

在例 3 中,用 $A$ 表示"点数是 3",用 $B$ 表示"点数小于 4",用 $C$ 表示"点数小于 5 的偶数".

2. 必然事件

在每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**,用字母 $\Omega$ 表示.

在例 3 中,"点数小于 7"是一个必然事件.

3. 不可能事件

在任何一次试验中都不可能发生的事件称为不可能事件,用字母$\varnothing$表示.

在例 3 中,"点数是 10" 是一个不可能事件.

虽然必然事件与不可能事件是完全对立的,但它们的共同特点是在试验之前我们能够准确预知其是否发生,因而均不是随机事件,通常称之为**确定性事件**,概率论研究的是随机事件,但为方便起见,常常将必然事件与不可能事件视为特殊的随机事件,即随机事件的极端情形.

## 四、随机事件的集合表示

前面我们用直观语言描述了随机事件,事实上随机事件还可以用集合的形式来表示.

在实际中,进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合. 若规定某种灯泡的寿命 $t$(单位:h)小于 500 为次品,则在例 6 中人们关心灯泡的寿命是否满足 $t\geqslant 500$,满足这一条件的样本点组成 $\Omega_6$ 的一个子集:$A=\{t\mid t\geqslant 500\}$,$A$ 显然是一个随机事件.

一般地,在一个随机试验中,称样本空间 $\Omega$ 的子集为**随机事件**,简称**事件**. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的某一样本点出现时,称这一**事件发生**.

例 2 的样本空间 $\Omega_2=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

事件 $A$ 为"两枚都出现正面",$A=\{$(正,正)$\}$;

事件 $B$ 为"恰有一枚出现正面",$B=\{$(正,反),(反,正)$\}$;

事件 $C$ 为"至少有一枚出现正面",$C=\{$(正,正),(正,反),(反,正)$\}$.

恰由一个样本点组成的事件称为**基本事件**,由两个或两个以上的样本点组成的事件称为**复杂事件**. 以上事件 $A$ 为基本事件;事件 $B$,$C$ 为复杂事件.

样本空间 $\Omega$ 是**必然事件**,空集$\varnothing$是**不可能事件**.

## 五、事件的关系与运算

在一个随机试验中,一般有很多个事件,为了通过对简单事件的研究来掌握复杂事件,需要研究事件之间的关系与运算. 因为事件是样本空间的一个子集,所以

事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理.

1. 包含关系

如果属于 $A$ 的样本点必属于 $B$,则称**事件 $A$ 包含于事件 $B$**,或称**事件 $B$ 包含事件 $A$**,记为 $A\subset B$. 其含义是:事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生.

例 3 中,事件 $A$"点数是 3"的发生必然导致事件 $B$"点数小于 4"的发生,故$A\subset B$.

2. 相等关系

如果属于 $A$ 的样本点必属于 $B$,同时属于 $B$ 的样本点必属于 $A$,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 $A$ 与事件 $B$ 相等**,记为 $A=B$. 显然相等的两个事件总是同时发生或同时不发生.

3. 和(并)

由事件 $A$ 与 $B$ 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的和(并)**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 其含义是:事件 $A$ 与事件 $B$ 中至少有一个发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

4. 积(交)

由事件 $A$ 与 $B$ 中公共的样本点组成的新事件称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的积(交)**,记为 $A\cap B$ 或 $AB$. 其含义是:事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

5. 差

由事件 $A$ 中而不在事件 $B$ 中的样本点组成的新事件称为**事件 $A$ 与事件 $B$ 的差**,记为 $A-B$. 其含义是:事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生.

例 3 中,事件 $A$ 为"点数是 3",事件 $B$ 为"点数小于 4",则 $B-A=\{1,2\}$.

6. 互不相容事件

如果 $A$ 与 $B$ 没有共同的样本点,则称**事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容**,或称为**互斥的**,记为 $AB=\varnothing$. 其含义是:事件 $A$ 与事件 $B$ 不可能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

7. 对立事件

由在 $\Omega$ 中而不在 $A$ 中的样本点组成的新事件称为**事件 $A$ 的对立事件**,或称为 **$A$ 的逆事件**,记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\Omega-A$. 其含义是:事件 $A$ 不发生. 显然 $A$ 也是 $\overline{A}$ 的对立事件. 两个相互对立的事件 $A$ 与 $\overline{A}$,在每次试验中有且仅有一个发生.

**注** 两个相互对立的事件一定是互不相容事件,但是两个互不相容的事件一般未必是对立事件.

例 1 中"正"与"反"两个事件是互不相容事件,也是对立事件.

例 3 中"点数是 3"与"点数大于 3"两个事件是互不相容事件,但不是对立事件.

8. 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是有限或可数个事件,如果其满足

(1) $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$;

(2) 且 $\bigcup\limits_i A_i=\Omega$,

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一个完备事件组.

图 1-1 是事件的关系与运算的维恩图,以助于直观上的理解.

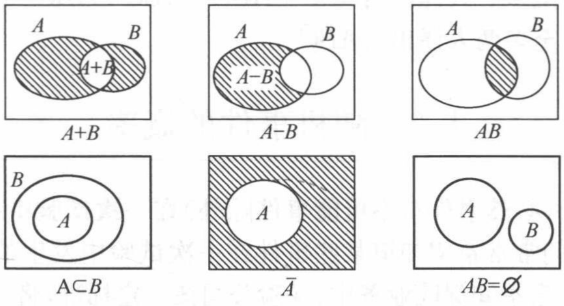


图 1-1 维恩图

## 六、事件的运算性质

由集合的运算性质,容易得出事件的运算性质. 设 $A,B,C$ 是同一随机试验中的事件,则有

(1) **交换律** $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) **分配律** $(A\cup B)\cap C=A\cap C\cup B\cap C,(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) **对偶律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

**注**　上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形.

**例 7**　在例 3 中，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 设事件 $A$ 为“奇数点”，事件 $B$ 为“被 3 整除的点”，事件 $C$ 为“点数小于 2”，事件 $D$ 为“偶数点”，事件 $F$ 为“点数不超过 5”，写出各事件间的关系.

**解**　$A=\{1,3,5\},B=\{3,6\},C=\{1\},D=\{2,4,6\},F=\{1,2,3,4,5\};A\supset C,F\supset C$，$B$ 与 $C$，$D$ 与 $C$，$A$ 与 $D$ 都是不相容事件，其中 $A$ 与 $D$ 为对立事件.

**例 8**　甲、乙、丙三人同时各译一份密码，记事件 $A$ 为“甲译出”，事件 $B$ 为“乙译出”，事件 $C$ 为“丙译出”，则可用上述三个事件的运算表示下列事件.

(1) “甲未译出”：$\overline{A}$.

(2) “甲译出而乙未译出”：$A\overline{B}$.

(3) “三人中只有乙未译出”：$A\overline{B}C$.

(4) “三人中恰好有一人译出”：$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(5) “三人中至少有一人译出”：$A+B+C$；

(6) “三人中至少有一人未译出”：$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

(7) “三人中恰有两人译出”：$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

(8) “三人中至少有两人译出”：$AB+AC+BC$.

(9) “三人均未译出”：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(10) “三人中至多一人译出”：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(11) “三人中至多两人译出”：$\overline{ABC}$.

## 1.2　随机事件的概率

每个随机事件(必然事件与不可能事件除外)在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 人们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如，在开办学生平安保险业务中，保险公司按一定标准，将一个学生的平安情况分为平安、轻度意外伤害、严重意外伤害以及意外事故死亡等多种结果. 由于这些结果都是随机事件，因此重要的是知道各个事件发生的可能性的大小. 于是希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

### 一、用频率估计概率

**定义 1.1**　若在相同的条件下进行了 $n$ 次试验，在这 $n$ 次试验中，事件 $A$ 发生

的次数$\mu_n(A)$称为事件$A$发生的**频数**,比值$\dfrac{\mu_n(A)}{n}$称为事件$A$发生的**频率**,记为

$$f_n(A)=\frac{\mu_n(A)}{n}. \tag{1.1}$$

由定义,可直接得出频率的基本性质:

(1) **非负性** 对每一事件$A$,都有$f_n(A)\geqslant 0$;

(2) **正则性** $f_n(\Omega)=1$;

(3) **有限可加性** 设$A_1,A_2,\cdots,A_k$是两两不相容的事件,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

由于事件$A$发生的频率是它发生的次数与试验总次数之比,其大小表示事件$A$发生的频繁程度. 频率越大,就意味着事件$A$在一次试验中发生的可能性越大. 因而,直观的想法是用频率来表示$A$在一次试验中发生的可能性的大小,但这是否可行呢?

历史上有不少人做过抛硬币试验,结果见表1-1.

**表1-1 抛硬币试验表**

| 实验者 | 抛硬币次数 | 出现正面次数 | 频率 |
|---|---|---|---|
| 德摩根(De Morgan) | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| 蒲丰(Buffon) | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 费勒(Feller) | 10000 | 4979 | 0.4979 |
| 皮尔逊(Pearson) | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |

由表1-1中的试验数据可以看出,频率稳定在0.5附近,并且试验次数越多,频率越接近0.5.

大量长期的实践表明,随着试验重复次数$n$的增大,事件$A$发生的频率$f_n(A)$会稳定地在某一常数$p$的附近摆动,$n$越大摆动幅度越小,称这个常数$p$为**频率的稳定值**(这个性质就是**频率的稳定性**). 将频率的这个稳定值称为事件$A$发生的**概率**,记为$P(A)$,即

$$P(A)=p.$$

这个定义为概率的统计定义. 用这种方法求事件的概率就是用频率估计概率. 用"频率"估计概率,就好比用"尺子"度量长度、用"天平"度量物质的质量. 形象地说,频率是测定事件概率的"尺子",试验次数越大,测定越准确.

但是,在实际中,不可能对每一个事件都做大量的重复试验,从中得出频率的稳定值. 同时,为了理论研究的需要,从频率的稳定性和频率的性质得到启发,下面