

高等学校教材

高等数学教程

第二版 上册

主 编 蔡光程
副主编 戴 琳 李庶民 杨凤藻

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学教程

Gaodeng Shuxue Jiaocheng

第二版 上册

主 编 蔡光程

副主编 戴 琳 李庶民 杨凤藻

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新颁布的《大学数学课程教学基本要求(2014年版)》中的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,结合新世纪人才培养的需要和教学改革的新形势,在第一版的基础上修订而成的。第二版对部分内容进行了重新改写和编排,使知识结构更合理,内容体系更完善。修订时渗入现代数学的观点,简化数学技巧,有机地引入一些应用性的例题和习题,增加数学实验的内容和程序实践。

全书分为上、下两册。上册包括函数、极限与连续性、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程、无穷级数等六章,书末附有积分表、常用平面曲线及其图形、初等数学中的常用公式、MATLAB 概要、部分习题答案;下册包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分等四章,书末附有数学建模实践和部分习题解答。

本书可作为高等学校理工科各专业高等数学课程的教材,也可作为相关专业工程技术人员或自学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程.上册 / 蔡光程主编. -- 2版. -- 北京:高等教育出版社,2015.9
ISBN 978-7-04-043500-9

I. ①高… II. ①蔡… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 163629 号

策划编辑 张长虹	责任编辑 张长虹	封面设计 张志	版式设计 马敬茹
插图绘制 尹文军	责任校对 窦丽娜	责任印制 刘思涵	

出版发行 高等教育出版社	网 址 http://www.hep.edu.cn
社 址 北京市西城区德外大街 4 号	http://www.hep.com.cn
邮政编码 100120	网上订购 http://www.landraco.com
印 刷 北京明月印务有限责任公司	http://www.landraco.com.cn
开 本 787mm × 960mm 1/16	
印 张 27.25	版 次 2009 年 9 月第 1 版
字 数 490 千字	2015 年 9 月第 2 版
购书热线 010-58581118	印 次 2015 年 9 月第 1 次印刷
咨询电话 400-810-0598	定 价 42.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 43500-00



云南省普通高等学校“十二五”规划教材

《工程类数学系列教材》编委会

总顾问 李继彬

主 编 蔡光程

副主编 戴 琳 李庶民 杨凤藻

参编人员(以拼音为序)

蔡光程 陈 陶 陈秀华 戴 琳 李怀远

李庶民 孙红兵 杨凤藻 杨林美

第二版前言

本书是在我校 1998 年所编《高等数学教程》“教育部 2001 年度高等教育国家级教学成果二等奖”的成果之一和 2009 年本书第一版的基础上,根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会 2014 年颁布的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和近五年的教学实践中积累的经验,同时结合新形势下大学数学教育教学理念和教学方法的发展,进行重新修订而成的。本次修订保留了原教材的风格,继续保持工科类高等数学固有的系统性、逻辑性,对基础内容仔细推敲,做到基本概念的叙述深入浅出、基本定理的证明简明易懂、基本方法的介绍充实到位,对难度较大的部分基础理论,不作严密证明,注重基本概念和运算的训练,加强与实际应用联系较多的基础知识和方法,对例题的选择结合实际并具有典型性。

与第一版相比,本书主要作了以下修订工作:

1. 在内容的次序上作了一些调整,力图使知识结构更合理完善。将微分方程作为一元微积分的应用与拓展而调整至一元积分学后,便于读者学习一元积分学后能尽快了解其应用;将空间解析几何作为多元微积分学的先导基础知识而置于多元微分学前;对不定积分和定积分的计算方法分开介绍,以免读者在学习时混淆;取消了原第十章(积分学的应用),将内容分散到第四章、第九章和第十章,使读者学习完相应的积分知识后即可尽快应用,等等。

2. 对习题配置作了大幅改革。为使读者能更好地掌握、巩固所学的内容并进一步拓展思路,全书适当增加了课后习题的题量,书中每节都配有 A、B 两类习题,其中 A 类为基础题,建议读者全部完成,B 类为扩展提高题,供读者有选择地完成,以更好地满足不同层次的读者学习微积分的不同需求。

书中部分内容加“*”以供不同专业选择使用。

本书第一章由杨凤藻编写,第二、三章由李怀远编写,第四章由杨林美编写,第五章由陈陶编写,第六章由李庶民编写,第七章由蔡光程编写,第八章由孙红兵编写,第九章由陈秀华编写,第十章由戴琳编写,附录由蔡光程和李庶民共同编写,并由蔡光程、戴琳、李庶民、杨凤藻共同对全书进行了系统的统稿和定稿。稿中的所有图形由何维刚绘制完成。

本书于 2013 年荣获云南省普通高等学校“十二五”规划教材,本次修订获

得云南省教育厅项目资助,同时还获得昆明理工大学教务处、高等教育出版社的大力支持,在此表示感谢!

编者

2014 年 11 月

第一版序言

高等数学作为高等工科院校的一门重要的基础课,不仅应向学生传授必需的数学基础知识,而且还应加强数学素质的培养,让学生通过知识载体,学习对事物进行洞察、抽象及研究的思想和方法;培养必要的思维逻辑性和严密性;提高应用数学的意识、兴趣和能力。为学生今后根据工作需要进一步学习和应用现代数学的知识奠定基础,提高可能性。

李继彬、蔡光程、戴琳、李庶民等编写的《高等数学教程》一书,从上述基本观点出发,根据前国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会《关于工科数学系列课程教学改革的建议》精神,结合作者们多年的教学经验,就渗入现代数学观点,促使分析、代数和几何的相互联系,加强数学建模和数值计算等方面进行了有益的探索 and 改革,力图使本书既能适当反映科学技术现代化的要求又能切合当前教学的实际。这是值得倡导的一种改革方向。

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点与难点,应当鼓励不同层次、不同模式的改革试点;鼓励不同要求、不同风格的教材百花齐放。相信本书的出版将以其具有的特色为工科数学课程教材改革的百花园增添一枝鲜花,对提高工科数学教学质量、培养学生的数学素质产生积极作用。

马知恩

2008年11月于西安交大

第一版前言

本书是在我校获“教育部 2001 年度高等教育国家级教学成果二等奖”的成果之一《高等数学教程》的基础上,适应本世纪创新性人才培养和全面素质教育的需要而重新编写的。本版的初稿经昆明理工大学印刷成册,已经在本科教学中试用多年,我们结合教学实践,反复推敲、经多次修改而定稿。

面对我国改革开放、教育和科学发展的新形势,高等学校工科基础数学的教学如何改革?教材如何更新?这是一个十分值得研究和实践的重要问题。

我们在本版高等数学新教材的整体设计思想上作了以下的考虑:

1. 对“高等数学教学大纲”规定的基础内容部分着力下工夫。对基本概念的叙述尽量深入浅出,对基本定理的证明力求简明易懂,对基本方法的介绍力求充实到位,对例题的选择力求典型和富有应用性。

2. 在内容组织上,根据学生的认识发展规律和心理特点精心安排,便于学生自学。学习过程一般为感知、理解、巩固和应用四个阶段,而“理解”是学习和获取知识的最重要阶段。在教材编写中精心安排有关练习和内容,在便于学生“理解”上下工夫。

3. 更新教学内容,适应当代计算机和数学软件(如 MATLAB, Mathematica 和 Maple 等)发展和普及的新形势,增加了数学试验的内容,并编写数值计算和数学建模初步等,使教材更加直观化和现代化。

4. 正确处理好高等数学教学中的逻辑推导、概念抽象和计算与应用的关系。我们强调数学教育的意义不仅是要使学生学会有关的数学知识,更重要的是培养学生数学思维的习惯,增加数学文化的修养,以备将来工作中具备较严密的逻辑思维能力和对具体问题的抽象能力。换言之,在教材的编写中注意素质教育和创新精神的培养。

每一门科学和技术都有自己的产生和发展的历史,都记录着人们个别的活生生的劳动痕迹。因此,为了打破数学学科的神秘性,激发学生们的创造精神,点燃初学者的探索之火,高等数学课程的讲授,不是一堆定义、定理、公式等组织得天衣无缝的僵死的数学事实。讲授者应该自始至终从历史唯物论的观点出发,把数学科学的发展看作是学者们提出问题、解决问题的能动的创造过程。编者提倡在讲授过程中,把揭露问题摆到比叙述事实更高的地位。用具体的例子说明,在学科发展的过程中,学者们是怎样在“山穷水尽疑无路”的条件下,通过

克服困难,达到“柳暗花明又一村”境界的。

数学和哲学一样,是自然科学,工程科学和社会科学共有的基础和工具,是人们应当掌握的思维方法和文化精神。数学为我们提供了诸如建立模型、符号化、抽象化、公理化、最优化、逻辑推理和数据分析等独具特色的思想方法,并蕴含着严谨求实和一丝不苟的科学精神。学习数学,学好数学,不仅可以提高自身认识世界,改造世界和服务社会的能力,也可培养自己勤奋踏实,求真务实的品质。谨此,用这些文字与学习本书的同学们共勉。

本书分上、下两册出版。第一章由蔡光程编写,第二章由杨凤藻编写,第三、四章由李怀远编写,第五章由冯彬和董艳梅编写,第六章由董艳梅编写,第七章由于晓蓉编写,第八、十章由陈秀华编写,第九章由戴琳编写,第十一章由李庶民编写,第十二章由蔡光程和李庶民共同编写。初稿完成后由李继彬、蔡光程、戴琳、李庶民对全书进行了系统的统稿、定稿和加工工作。稿中的所有作图由李建飞、何维刚完成。姜麟和石剑平协助编者做了大量计算机编辑工作。

本书承蒙原国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、高校教学名师奖获奖者、西安交通大学马知思教授撰写序言,在此向马知思教授表示诚挚的感谢。

本书的出版得到昆明理工大学教务处和校领导的大力支持,高等教育出版社为本书的出版做了大量工作,在此一并表示感谢。

限于编者的水平,本书不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

李继彬

2009年7月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第一章 函数、极限与连续性	1
第一节 函数	1
一、区间与邻域(1) 二、函数及其表示方法(2) 三、建立函数关系 举例(6) 四、某些函数具有的一些特性(7) 五、初等函数(9) 六、极坐标和参数方程(15) 七、双曲函数与反双曲函数(18) 习题 1-1(20)	
第二节 极限的概念	24
一、数列的极限(24) 二、函数的极限(29) 三、无穷大(35) 习题 1-2(36)	
第三节 极限运算	38
一、无穷小及其运算(38) 二、极限的运算法则(41) 习题 1-3(45)	
第四节 极限存在准则 两个重要极限	46
一、极限存在准则(46) 二、两个重要极限(47) 习题 1-4(50)	
第五节 无穷小的比较	51
习题 1-5(54)	
第六节 函数的连续性	55
一、连续函数的概念(55) 二、连续函数的基本性质(57) 三、闭区间上连续函数的性质(60) 四、函数的间断点及其分类(61) 习题 1-6(63)	
数学实验一	65
第二章 导数与微分	69
第一节 导数的概念	69
一、瞬时速度 切线的斜率(69) 二、导数的定义(70) 三、可导与连续的关系(73) 习题 2-1(74)	
第二节 导数的计算方法	76
一、几个基本初等函数的导数公式(77) 二、导数的四则运算法则(79) 三、反函数的导数(81) 四、复合函数的导数(83) 习题 2-2(87)	
第三节 高阶导数	89
习题 2-3(92)	
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	93

一、隐函数的导数(93)	二、由参数方程所确定的函数的导数(96)
* 三、相关变化率(99)	习题 2-4(101)
第五节	微分及其在近似计算中的运用 103
一、微分的概念(103)	二、基本初等函数的微分公式与微分运算
法则(106)	三、微分在近似计算中的运用(107) 习题 2-5(109)
数学实验二	 111
第三章	导数的应用 114
第一节	中值定理 114
一、罗尔定理(114)	二、拉格朗日中值定理(116)
三、柯西中值定理(118)	习题 3-1(120)
第二节	洛必达法则 121
一、 $\frac{0}{0}$ -型及 $\frac{\infty}{\infty}$ -型未定式极限求法:洛必达法则(121)	
二、 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式极限的求法(124)	习题 3-2(127)
第三节	泰勒公式 128
一、问题的提出(128)	二、泰勒中值定理(130)
三、应用举例(131)	习题 3-3(133)
第四节	函数的单调性与凹凸性 133
一、单调性的判别法(134)	二、单调区间的求法(135)
三、曲线凹凸性的定义(136)	四、曲线凹凸性的判定(137)
五、曲线的拐点及其求法(138)	习题 3-4(141)
第五节	函数的极值与最值 142
一、函数极值的定义(142)	二、函数极值的求法(143)
三、函数最值的求法(146)	四、应用举例(147) 习题 3-5(149)
第六节	函数图形的描绘 150
一、渐近线(150)	二、函数图形描绘的步骤(152)
三、作图举例(152)	习题 3-6(155)
第七节	曲率 155
一、弧微分(155)	二、曲率及其计算公式(156)
三、曲率圆与曲率半径(159)	习题 3-7(160)
数学实验三	 160
第四章	一元函数积分学及其应用 163
第一节	定积分的概念与性质 163
一、定积分产生的源问题(163)	二、定积分的定义(165)
三、定积分的性质(167)	习题 4-1(170)
第二节	微积分基本定理 172

一、原函数的概念(172)	
二、变速直线运动中位移函数与速度函数之间的联系(173)	
三、积分上限函数及其导数(173)	
四、牛顿-莱布尼茨公式(177)	
习题 4-2(179)	
第三节 不定积分的概念和性质	180
一、不定积分的概念(181)	
二、基本积分表(183)	
三、不定积分的性质(184)	
习题 4-3(185)	
第四节 不定积分的计算方法	186
一、换元积分法(187)	
二、分部积分法(196)	
三、几类特殊函数的积分法(200)	
习题 4-4(205)	
第五节 定积分的计算方法	208
一、定积分的换元法(208)	
二、定积分的分部积分法(212)	
习题 4-5(214)	
第六节 反常积分	216
一、无穷区间上的反常积分(216)	
二、无界函数的反常积分(218)	
习题 4-6(221)	
第七节 定积分的几何应用	221
一、定积分的元素法(221)	
二、平面图形的面积(223)	
三、两类特殊立体的体积(229)	
四、平面曲线的弧长(232)	
习题 4-7(234)	
第八节 定积分的物理应用	236
一、液体的压力(236)	
二、变力沿直线所作的功(237)	
三、引力(238)	
习题 4-8(240)	
数学实验四	241
第五章 常微分方程	243
第一节 微分方程的基本概念	243
一、引例(243)	
二、基本概念(244)	
习题 5-1(248)	
第二节 一阶微分方程	249
一、可分离变量的微分方程(249)	
二、齐次方程(251)	
三、可化为齐次方程的微分方程(252)	
四、一阶线性微分方程(254)	
习题 5-2(259)	
第三节 可降阶的高阶微分方程	262
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程(262)	
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程(263)	
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程(265)	
习题 5-3(266)	
第四节 高阶线性微分方程	267
一、高阶线性微分方程的概念及例子(267)	

二、二阶线性微分方程通解的结构(268)	
* 三、常数变易法(272) 习题 5-4(273)	
第五节 常系数线性微分方程	274
一、二阶常系数齐次线性微分方程(275)	
二、二阶常系数非齐次线性微分方程(278) 习题 5-5(284)	
数学实验五	286
第六章 无穷级数	289
第一节 无穷级数的概念及其性质	289
一、无穷级数的概念(289) 二、无穷级数的基本性质(294)	
* 三、柯西收敛原理(296) 习题 6-1(297)	
第二节 常数项级数的审敛法	298
一、正项级数及其审敛法(299)	
二、交错级数 任意项级数 绝对收敛 条件收敛(308) 习题 6-2(312)	
第三节 函数项级数与幂级数	314
一、函数项级数(314) 二、幂级数及其收敛性(315)	
三、幂级数的运算(320) 习题 6-3(324)	
第四节 函数展开成幂级数	325
一、泰勒级数(325) 二、函数展开成幂级数(327) 习题 6-4(335)	
第五节 幂级数的应用	336
一、函数值的近似计算(336) 二、在积分计算中的应用(339)	
三、求极限(340) 四、证明欧拉公式(340) 习题 6-5(341)	
*第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	341
一、一致收敛性的概念(341) 二、一致收敛级数的基本性质(345)	
三、幂级数的一致收敛性(348) 习题 6-6(350)	
第七节 傅里叶级数	350
一、三角级数 三角函数系的正交性(350)	
二、周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数(352)	
三、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数(359)	
四、定义在 $[-l, l]$ 或 $[0, l]$ 上的函数的傅里叶级数(362) 习题 6-7(365)	
数学实验六	367
附录 I 积分表	369
附录 II 常用平面曲线及其图形	380
附录 III 初等数学中的常用公式	384
附录 IV MATLAB 概要	387
部分习题答案	399

第一章 函数、极限与连续性

函数反映的是客观世界中各种变量之间的相互依赖关系,微积分的研究对象主要是函数关系,极限方法是研究函数的一种基本方法,本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、区间与邻域

1. 区间

设 a, b 是两个实数,且 $a < b$, 介于 a, b 之间的一切实数所构成的集合称为区间, a 与 b 称为区间端点,按照是否包含区间端点,可分为

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$

半开区间 $(a, b] = \{a < x \leq b\}, [a, b) = \{a \leq x < b\}.$

以上这些区间都称为有限区间.数 $b - a$ 称为这些区间的区间长度.这些区间可用数轴上的有限线段来表示.此外还有所谓的无限区间

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它是一个无限区间.这里 $+\infty$ (正无穷大), $-\infty$ (负无穷大) 只是一个记号,不是一个数.

以后在不区分区间类型时,就简单称之为“区间”,并常用 I 表示.

2. 邻域

邻域也是一个经常用到的实数集.设 a 与 δ 是两个实数.且 $\delta > 0$, 称实数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$.即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

点 a 的 δ 邻域在数轴上是以 a 为中心, 2δ 为长度的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$.点 a

的 δ 邻域去掉中心点 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\dot{U}(a, \delta)$,即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta).$$

以后在不强调邻域半径时,上述两种表示邻域的符号可以简单地记为 $U(a)$ 和 $\dot{U}(a)$.

二、函数及其表示方法

1. 函数的概念

客观世界的同一事物往往有几个不同的变化量,而且这几个量的变化不是孤立的,而是遵循着一定的变化规律而相互联系、相互依赖的.例如,若不考虑空气阻力,在自由落体运动过程中,物体所落下的位移 s 与时间 t 是两个变量,它们之间存在着依赖关系

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,如果在时刻 T 物体落到地面,则当 t 在 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定 s 相应的数值.

又如,圆的面积 A 与半径 r 之间存在着如下关系

$$A = \pi r^2,$$

当 r 在 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式就可以确定 A 相应的数值.

上面例子中两个变量之间的这种相依关系,就是数学上所谓的函数关系.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D_f 是一个非空数集.如果对每个 $x \in D_f$, 变量 y 按照一定的规则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y = f(x)$. 并称 x 为自变量, y 为因变量, x 的变化范围 D_f 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域.

当 x 取 $x_0 \in D_f$ 时,与 x_0 相对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值.当 x 遍取 D_f 内的所有值时, x 所对应的函数值的整体的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

函数记号 $y = f(x)$ 中的字母 f 反映自变量与因变量的对应法则,即函数关系.对应法则也常常用 φ, g, h, F 等字母来表示,而函数关系也可以记为 $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, $y = F(x)$ 等.有时也可以简记作 $y = y(x)$, 此时等号左边的 y 表示函数值,右边的 y 表示对应法则.

如果对每个 $x \in D_f$, 变量 y 只有一个确定的值与之对应,那么这种函数称为单值函数;如果对每个 $x \in D_f$, 总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,这种函数称为多值函数,对多值函数,可以将其拆成若干个单值函数进行讨论,以后如无特别说明,所研究的函数都是单值函数.

在数学中,若不考虑函数关系的实际意义,只是抽象地研究用数学表达式表达的函数,这时若无特别强调,函数的定义域就是使这个函数的数学表达式有意义的实数的集合.

如果 x_0 是定义域内的点,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义.

例 1 求函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{5} + \sqrt{25-x^2}$ 的定义域,并求 $f(0)$ 与 $f(1)$.

解 要使函数表达式有意义,必须

$$\left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1 \quad \text{且} \quad 25-x^2 \geq 0,$$

解得 $-4 \leq x \leq 5$, 于是函数的定义域为 $[-4, 5]$.

因为 $0 \in [-4, 5]$, $1 \in [-4, 5]$, 所以 $f(0) = -\arcsin \frac{1}{5} + 5$, $f(1) = 2\sqrt{6}$.

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素,当且仅当两个函数的定义域和对应法则都相同时(此时值域也一定相同),才能认为它们是同一个函数.

例 2 $y = \arccos(2+x^2)$.

对任何实数 x , 该函数都没有按给定的法则与之对应的 y 值, 而函数的定义域不能为空集, 故此表达式不定义任何函数关系.

例 3 研究函数 $y = \lg x$ 与函数 $y = \frac{1}{2} \lg x^2$ 是不是相同的函数.

函数 $y = \lg x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 而 $y = \frac{1}{2} \lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 它们的图像分别如图 1-1 与图 1-2 所示.

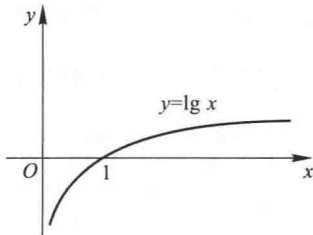


图 1-1

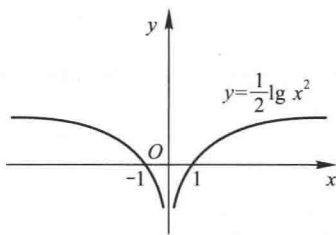


图 1-2

所以 $y = \lg x$ 与 $y = \frac{1}{2} \lg x^2$ 是定义在不同区间上的两个不同的函数.

例 4 研究函数 $y = x$ 与函数 $y = \sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数.

函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 但是当 $x \in (-\infty,$