

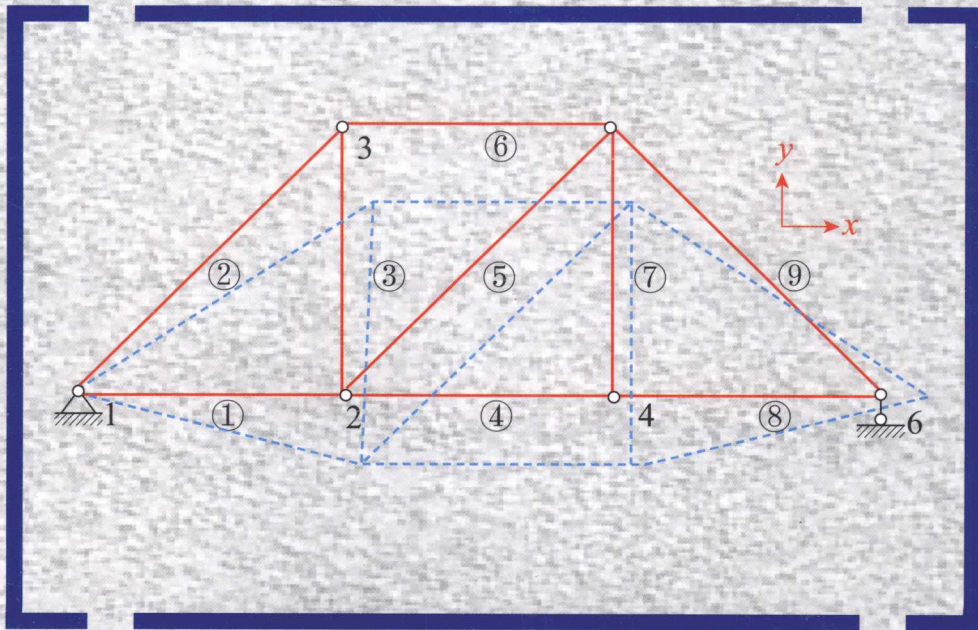
普通高等学校规划教材

Mechanics of Materials

材料力学

(下冊)

李银山◎编著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

普通高等学校规划教材

Mechanics of Materials

材料力学

(下册)

李银山 编著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本教材是根据教育部高等院校工科本科“材料力学”课程教学基本(多学时)要求编写的。是作者继《Maple 材料力学》出版后,将材料力学和计算机技术结合起来的又一部新型教材,首次讲解了李银山提出的一种解决材料力学和结构力学问题的快速解析法——连续分段独立一体化积分法。

本书由《材料力学》上、下册组成,共计 28 章。基本上涵盖了经典材料力学所涉及的所有问题,即强度、刚度、稳定性、动载荷、能量法和优化设计,内容完整、结构紧凑、叙述严谨、逻辑性强,并配备手算和电算(Maple 软件)两类例题,思考题和 A、B、C 三类习题。

下册内容主要包括:压杆稳定、动载荷、材料的疲劳与断裂、能量方法、超静定结构、杆件的塑性变形、有限单元法、加权残值法、结构可靠性设计和优化设计、实验应力分析和利用计算机求解刚架弯曲变形的快速解析法等共计 13 章。

本书适用于工科本科生材料力学教学使用,也可供研究生和工程技术人员进行材料力学专题的学习研究。

为便于教师讲授本教材,本书配备了多媒体课件,可通过加入力学课程教学研讨 QQ 群(242976740)索取。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学. 下册 / 李银山编著. --北京:人民交通出版社股份有限公司, 2015.6
ISBN 978-7-114-12213-2

I. ①材… II. ①李… III. ①材料力学-高等学校-教材 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 088299 号

普通高等学校规划教材

书 名:材料力学(下册)

著 作 者:李银山

责任编辑:王文华 牛家鸣

出版发行:人民交通出版社股份有限公司

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址:<http://www.ccpres.com.cn>

销售电话:(010)59757973

总 经 销:人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销:各地新华书店

印 刷:北京鑫正大印刷有限公司

开 本:787×1092 1/16

印 张:25.75

字 数:608 千

版 次:2015 年 6 月 第 1 版

印 次:2015 年 6 月 第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-12213-2

定 价:45.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

序

由李银山教授编写的《材料力学》是将材料力学和计算机技术结合起来的新型教材,分上、下册,共计 28 章,包括了材料力学教学大纲要求的全部内容。由于材料力学中许多问题的计算都比较烦琐,本书引入了由李银山提出的快速求解结构弯曲变形问题的连续分段独立一体化积分法,因而有利于系统地培养学生建模编程和计算分析、解决工程实际问题的能力。

连续分段独立一体化积分法首先将梁进行连续分段,建立具有四阶导数的挠曲线近似微分方程,然后分段独立积分四次,得到挠度的通解。根据边界条件和连续性条件,确定积分常数,得到剪力、弯矩、转角和挠度的解析函数,利用计算机绘出剪力图、弯矩图、转角图和挠度图。工程实例表明,连续分段独立一体化积分法建立方程简单,计算编程程式化,求解速度快,与有限元法相比,其优点是可以得到精确的解析解。

在工程结构中,索是除杆件之外的另一种典型的构件,例如海洋工程中的缆绳、支撑电缆车与索道的钢绳、输电线及光缆等,特别是近年来大型索支撑结构,例如悬索桥、斜拉桥等的迅速发展,索已成为其重要构件,因此本书增加了无弹性索和有弹性索力学计算的基本理论。

李银山教授在撰写本书的过程中,查阅了大量的有关资料,编写了许多富有特色的例题和分类习题,其理论体系系统完整,循序渐进,学生易于掌握。本书的初稿曾在太原理工大学和河北工业大学有关专业使用,效果良好。

本书的出版,为材料力学教学的改进提供了一条可供选择的途径。我们衷心地期望本书的出版能在材料力学教学改革和培养高水平工程技术人才方面发挥一定的作用。

中国工程院院士

陈予恕

2014 年 5 月

前 言

本教材是根据教育部高等院校工科本科“材料力学”课程教学基本要求(多学时)、教育部工科“力学”课程教学指导委员会面向 21 世纪工科“力学”课程教学改革要求编写的。本书是将材料力学和计算机技术结合起来新型教材,由《材料力学》(上册)和《材料力学》(下册)两部分组成。

随着科学技术日新月异的发展,作为基础学科的材料力学,其体系和内容也必须相应地进行调整。从这个愿望出发,在编写本教材时力图在已有材料力学的基础上,从以下几个方面作进一步的改进:

(1)提出了一种解决材料力学和结构力学的快速解析新算法——连续分段独立一体化积分法。该法首先将梁进行连续分段,独立建立具有四阶导数的挠曲线近似微分方程,然后分段独立积分四次,得到挠度的通解。根据边界条件,确定积分常数,得到挠度的解析函数。

连续分段独立一体化积分法与通常求解弯曲变形问题的积分法不同,不用列平衡方程求解支座约束力,不用建立弯矩方程,就可得到剪力函数、弯矩函数、转角函数和挠度函数,反过来,还可以求出支座约束力。

本教材中的讲解传统算法和现代算法并重,学习传统算法便于理解材料力学基本原理,采用现代算法可以快速、准确地解决工程问题,提高效率。

(2)吸收了《力学与实践》“教学研究”栏目的最新成果,以及第 1~7 届全国高等学校力学课程报告论坛的最新成果,使全书内容完整、结构紧凑、叙述严谨、逻辑性强。

(3)注意使用矢量、张量、矩阵等数学工具,以适应计算机的使用要求。增加了有限差分法和有限单元法等数值方法的内容,以利于理解有限单元法原理,达到尽快正确使用有限单元法大型软件求解的目的,并提高数值计算编程能力。

(4)引入了结构优化设计思想。本教材注意从被动分析设计到主动优化设计教学思想的转变。

社会生产的需求和设计经验的积累反映了发展结构优化的客观要求;结构分析理论与方法的日益成熟(特别是有限单元法的发展)、数学理论的发展(特别是现代数学规划论的发展)、电子计算机的发展(特别是 MATLAB 优化库的出现),是发展结构优化的基础和后盾。本书期望使学生尽快掌握结构优化设计的思想和方法,以真正解决工程设计问题。

(5)过去由于手工无法求解而只限于等截面杆问题的分析,本教材引入了直接对变截面杆分析求解。

21 世纪人类步入信息时代,计算机技术无论从硬件还是软件上都在日新月异地发展,信息化、数字化、网络化渗透在很多学科当中,也为很多学科提供了新的发展机遇。个人计算机的空前普及、计算机语言的更新换代、计算技术的不断发展,使面向计算机的材料力学不再满足于等截面杆的分析,而是开始尝试系统地建立面向计算机的变截面杆的问题,并建立计算机分析求解的精确模型,作精确的符号运算和数值分析计算,而不受求解问题规模的限制。

(6)引入了结构可靠性设计思想。本教材注意了从容许应力设计法到可靠性设计法的教学思想的转变与衔接。

(7)增加了杆、轴、梁、索连续振动方程的建立,通过对本书的学习,使学生不仅可以掌握静态的材料力学设计,而且可以尽早接触动态的材料力学设计。

(8)增加了索的材料力学计算基本理论。在工程结构中,索是除杆件之外的另一种典型的构件,例如海洋工程中的缆绳、支撑电缆车与索道的钢绳、输电线及光缆等,特别是近年来大型索支撑结构,例如悬索桥、斜拉桥等的迅速发展,索已成为其重要构件。因此,有必要在材料力学课程中引入索的基本理论,其内容也是进一步学习薄膜理论的基础。

(9)子曰:“学而不思则罔,思而不学则殆。”现有一些材料力学教科书所给出的思考题,似乎可以分为两大类:一类主要是复习性的,例如“材料力学的任务是什么?”“材料力学的研究对象是什么?”等;另一类则不单纯是复习,而且带有一定的思考性。收入本书的思考题,基本上属于后一类。思考题中带“*”表示属于较难的问题。有的思考题虽然归入某一章,但由于材料力学知识的连贯性,可能需要全面思考。

(10)子曰:“学而时习之,不亦说乎?”本书希望构建“教、学、习、用”四维一体的现代化、立体化教材。本书例题分为常规的手算例题和计算机电算例题,供教师“教”和学生“学”选用。收入本书的习题分为三类:A类习题比较简单、容易,供同学们写课后作业,期中或期末考试练习选用;B类习题有一定难度,供考研和参加力学竞赛的同学练习选用;C类习题与工程实际结合比较紧密,供同学们写大作业和工程技术人员学习时参考应用。

作为面向21世纪的新教材,本书就想尝试为材料力学建立一种具有现代计算方法的强大功能,但又不失去传统解析方法之精确性的新体系。

华东理工大学李彤编写了第2~5章,并制作了本书的多媒体课件;河北工业大学李银山编写了其他所有章节,并统稿。

在编写本书过程中,我的研究生罗利军、董青田、曹俊灵、潘文波、吴艳艳、官云龙、韦炳维和其他许多博士生、硕士生及本科生提出了宝贵的修改建议,给予了很多帮助,在此一并致谢。

感谢清华大学徐秉业教授、中国科学院自然科学史研究所戴念祖研究员、军械工程学院付光甫教授、太原理工大学蔡中民教授、太原科技大学李茂刚教授和我的同学郭晓辉博士对本书编写长期给予的关心、支持和鼓励。

感谢我的导师太原理工大学杨桂通教授、太原科技大学徐克晋教授和军械工程学院张识教授多年来的指导、帮助和支持。

也深深地感谢我的夫人杨秀兰女士,她帮助我录入了全部书稿。

陈予恕院士热情为本书作序,并担任主审,河北工业大学李欣业教授、焦永树教授对书稿作了极为认真细致的审阅,提出了许多宝贵的改进意见,在此致以衷心的感谢!

限于作者水平,难免有错误与不妥之处,望读者不吝指正。

李银山

2014年5月于天津

主要符号表

A 面积	k 弹簧刚度系数
a 加速度	k_M 弯曲梁弹簧刚度系数
a, b, c 尺寸, 距离, 常数	k_N 拉压杆弹簧刚度系数
c 波的传播速度	k_n 扭簧刚度系数
c_1 无限介质中纵波传播速度	k_T 扭转轴弹簧刚度系数
c_t 无限介质中横波传播速度	l 长度
C 积分常数、形心	L 杆件的长度, 跨度
D 直径(外径)	M 弯矩
d 直径(内径)	M_e 外力偶
E 材料弹性模量	M_p 塑性弯矩(或极限弯矩)
e 偏心距	M_s 屈服弯矩
F 集中力	m 分布力偶, 质量
F_{bs} 挤压力	max 极大
F_{cr} 柱的临界荷载	min 极小
F_N 轴力	N 应力循环次数, 疲劳寿命
F_S 剪力	n 安全因数, 每分钟的转数
F_{Sy}, F_{Sz} 剪力分量	n_{st} 稳定安全因数
F_T 绳索张力	O 坐标原点
F_u 极限荷载	P 功率
$[F]$ 容许荷载	p 压力
f_s 梁的剪切刚度因数	q 分布载荷(单位距离上的荷载)
G 切变模量	q_p 极限分布载荷
g 重力加速度	q_s 屈服分布载荷
h 高度、尺寸	r 半径, 距离
I_y, I_z 面积惯性矩	S 静矩
I_p 圆截面的极惯性矩	s 弧长
I_t 任意截面的极惯性矩	T 扭矩, 温度, 周期, 动能
I_{yz} 面积惯性积	T_p 塑性扭矩(或极限扭矩)
I_1, I_2 主惯性矩	T_s 屈服扭矩
i 惯性半径	T_u 极限扭矩
i_y, i_z 对 y, z 轴的惯性半径	t 厚度, 时间
J 质量惯性矩	U_e 应变能
K 体积弹性模量	U_e^* 余应变能
K_d 动荷因数	$U_{e,d}$ 动应变能

$U_{e, st}$ 静应变能	Δ 位移, 伸长量
u 轴向位移, x 方向的位移	Δ_d 动位移
u_e 单位体积的应变能	Δ_{st} 静位移
u_e^* 单位体积的余应变能	ΔT 温差
u_d 形状改变比能	Π 变形势能
u_v 体积改变比能	Π^* 余变形势能
v 速度	θ 弯曲转角, 体积应变
v, w 梁的挠度分量, y, z 方向的位移	θ_b 弯曲转角
v_b 弯曲挠度	θ_s 剪切转角
v_s 剪切挠度	ϑ 单位长度扭转角
V 体积, 外力的势能	λ 压杆的柔度, 拉梅常数, 剪切变形
W 抗弯截面模量, 功	μ 泊松比, 长度因数
W^* 余功	ρ 物质密度, 曲率半径
W_e 外力功	σ 法向应力
W_i 内力功	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 主应力
W_p 圆截面抗扭截面模量	σ_b 强度极限应力
W_t 非圆截面抗扭截面模量	σ_{cr} 柱的临界应力
x, y, z 直角坐标、距离	σ_d 动应力
x_C, y_C, z_C 形心坐标	σ_e 弹性极限应力
α 角加速度	σ_m 平均应力
α 热膨胀系数, 角, 圆内外直径之比	σ_p 比例极限应力
α_K 冲击韧度	σ_s 屈服极限应力
α_s 梁的剪切强度因数	σ_{st} 静应力
β 表面加工系数, 可靠度因数	$[\sigma]$ 容许应力
γ 切应变	τ 剪应力
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ xy, yz 和 zx 平面内的剪切应变	$[\tau]$ 容许剪应力
δ 伸长率, 广义位移, 过盈量, 厚度	ω 角速度
ε 应变	ω 角频率(或圆频率)
ε^p 塑性应变	ω_0 固有角频率
ε^e 弹性应变	ω_d 阻尼自由振动角频率
ε_s 屈服应变	Ω 激励角频率
δU_e 虚变形能	φ 扭转角
δU_e^* 余虚变形能	ζ 阻尼比
δW 虚功	EA 抗拉(压)刚度
δW^* 余虚功	EI 抗弯刚度
δW_e 外力虚功	GA/f_s 抗剪刚度
δW_i 内力虚功	GI_p 圆截面抗扭刚度
$\delta \Pi$ 虚变形势能	GI_t 非圆截面抗扭刚度
$\delta \Pi^*$ 余虚变形势能	$j = \frac{EI}{L}$ 等截面直杆线刚度系数

目 录

第 16 章 压杆稳定	1
16.1 中心受压细长直杆临界力的欧拉公式	1
16.2 欧拉公式的使用范围及临界应力总图	7
16.3 压杆的稳定条件与合理设计	9
16.4 Maple 编程示例	12
思考题	14
习题	16
第 17 章 动载荷	23
17.1 构件变速运动时的强度、刚度和稳定性	23
17.2 冲击载荷作用下构件的应力与变形	26
17.3 强迫振动时的应力计算	33
17.4 Maple 编程示例	37
思考题	38
习题	44
第 18 章 材料的疲劳与断裂	49
18.1 材料的疲劳破坏特征与机理	49
18.2 S-N 曲线及疲劳极限的测定	51
18.3 构件的疲劳极限	52
18.4 基于疲劳极限的无限寿命设计法	54
18.5 固体材料的理想断裂强度和应力判据	58
18.6 应力强度因子与断裂韧度	59
18.7 损伤容限设计	62
18.8 Maple 编程示例	63
思考题	65
习题	66
第 19 章 能量方法	69
19.1 梁的横向剪切变形	69
19.2 线弹性体的虚功原理	71
19.3 马克斯威尔—莫尔法	76
19.4 外力功与应变能	84
19.5 互等定理	88
19.6 卡氏定理	89
19.7 Maple 编程示例	94
思考题	95

习题	99
第 20 章 能量方法的进一步研究	106
20.1 虚功原理	106
20.2 虚余功原理	115
20.3 最小势能原理	117
20.4 最小余势能原理	119
20.5 用能量法求压杆的临界载荷	120
20.6 用能量法求弹性结构体的固有角频率	122
20.7 Maple 编程示例	124
思考题	125
习题	126
第 21 章 超静定结构	132
21.1 超静定结构的概念	132
21.2 用力法解超静定结构	133
21.3 对称及反对称性质的利用	137
21.4 超静定刚架空间受力分析	141
21.5 连续梁与三弯矩方程	143
21.6 位移法解超静定结构	146
21.7 Maple 编程示例	150
思考题	152
习题	157
第 22 章 利用计算机求解刚架弯曲变形的快速解析法	163
22.1 连续分段独立一体化积分法求解刚架问题	163
22.2 静定刚架的快速解析法	164
22.3 超静定刚架的快速解析法	168
22.4 考虑轴力变形刚架的快速解析法	173
22.5 考虑剪力变形刚架的快速解析法	175
22.6 Maple 编程示例	177
思考题	180
习题	182
第 23 章 压杆稳定的进一步研究	185
23.1 杆件稳定临界力应用分类计算	185
23.2 纵横弯曲	191
23.3 压杆设计的直接法	195
23.4 压杆临界力计算的循序渐进积分法	197
23.5 压杆稳定问题的有限差分法	199
23.6 弹性压杆的大变形分析	202
23.7 Maple 编程示例	208
思考题	210
习题	212

第 24 章 杆件的塑性变形	215
24.1 金属材料的应力—应变关系	215
24.2 拉压杆的塑性分析	219
24.3 圆轴的塑性分析	221
24.4 梁的塑性分析	222
24.5 用虚功原理进行结构变形的塑性分析	226
24.6 静力法	228
24.7 机动法	229
24.8 Maple 编程示例	231
思考题	232
习题	235
第 25 章 有限单元法	240
25.1 轴向受拉压杆件的刚度方程	240
25.2 受拉压杆件的坐标变换	243
25.3 受扭杆件的刚度方程	246
25.4 受弯杆件的刚度方程	247
25.5 梁单元的中间载荷	249
25.6 Maple 编程示例	250
思考题	254
习题	256
第 26 章 加权残值法	258
26.1 加权残值法的基本概念	258
26.2 加权残值法的基本方法	259
26.3 加权残值法的试函数	262
26.4 变分的直接法之一——瑞利—里茨方法	263
26.5 变分的直接法之二——伽辽金法	267
26.6 加权残值法解梁弯曲问题	267
26.7 加权残值法解压杆的临界力	271
26.8 加权残值法解梁的固有角频率	271
26.9 Maple 编程示例	274
思考题	275
习题	277
第 27 章 结构可靠性设计和优化设计	279
27.1 可靠性设计	279
27.2 结构优化设计	283
27.3 按可靠性标准的结构优化设计	286
27.4 Maple 编程示例	288
思考题	292
习题	295

第 28 章 实验应力分析	298
28.1 概述	298
28.2 量纲分析	298
28.3 电测法的基本原理	301
28.4 电阻应变仪	304
28.5 应变测量与应力计算	305
28.6 光弹性仪与偏振光场	308
28.7 光弹性法的基本原理	309
28.8 实验应力分析的其他方法	312
28.9 Maple 编程示例	314
思考题	317
习题	318
附录 C 超静定结构解法对比	322
附录 D 部分思考题和习题参考答案	331
参考文献	394

第 16 章 压杆稳定

与刚体的平衡位形存在着稳定平衡与不稳定平衡一样,弹性体的平衡形态也存在着稳定平衡与不稳定平衡问题。当压杆所受的外力达到或超过临界力时,就要丧失原有直线形态下的平衡而发生失稳失效。可见,研究压杆稳定问题的关键是寻求其临界力。本章主要介绍计算压杆临界力的静力法、超过比例极限时压杆的临界力以及压杆的稳定性计算等。

16.1 中心受压细长直杆临界力的欧拉公式

如图 16-1a) 所示下端固定、上端自由的中心受压直杆,当压力 F 较小时,杆件的直线平衡形式是稳定的。即此时杆件若受到某种微小干扰,它将偏离直线平衡位置,产生微弯 [图 16-1b)],但当干扰撤除后,杆件还能够回到原来的直线平衡位置 [图 16-1c)]。可是当压力 F 较大时,杆件原有的直线平衡形式就是不稳定的。即此时杆件若受到某种微小干扰产生微弯,撤除干扰后,杆件将不能回到原来的直线平衡位置,而在弯曲形式下保持平衡 [图 16-1d)],受压杆在由稳定平衡过渡为不稳定平衡的过程中,保持直线状态平衡的最大轴向压力或保持微弯状态平衡的最小轴向压力,称为临界载荷,或简称为临界力,用 F_{cr} 表示。受压杆丧失其直线平衡状态过渡为曲线平衡的现象统称为失稳或屈曲。

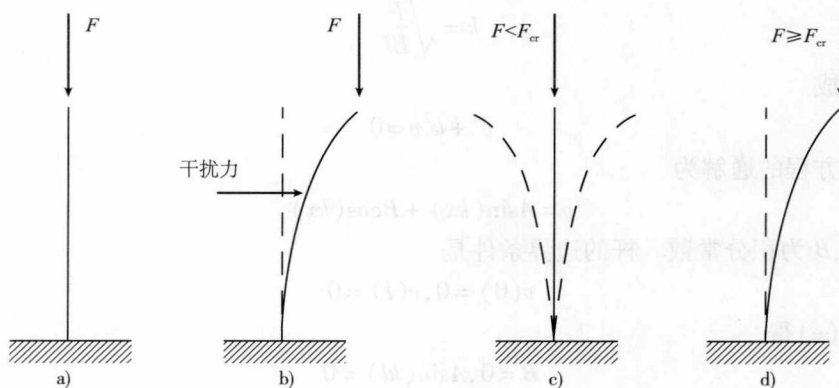


图 16-1 中心受压直杆的稳定分析

工程实际中承受轴向压缩的压杆是很常见的,例如自卸载重车的液压活塞杆,螺旋千斤顶的螺柱等。为了保证机构安全可靠的工作,必须使压杆处于直线平衡状态。如果将压杆的工作压力控制在临界载荷的许允范围之内,则压杆就不会失稳。可见,临界载荷的确定是非常重要的。

16.1.1 两端铰支压杆的临界力

设细长压杆的两端为铰支,轴线为直线,压力 F 与轴线重合。压力达到临界时,压杆将由直线平衡状态转变成微弯平衡状态,可以认为,使压杆保持微弯平衡的最小压力即为临界压力。

选取坐标系如图 16-2 所示,距原点为 x 的截面的挠度为 v ,该截面的弯矩为

$$M(x) = -Fv \quad (a)$$

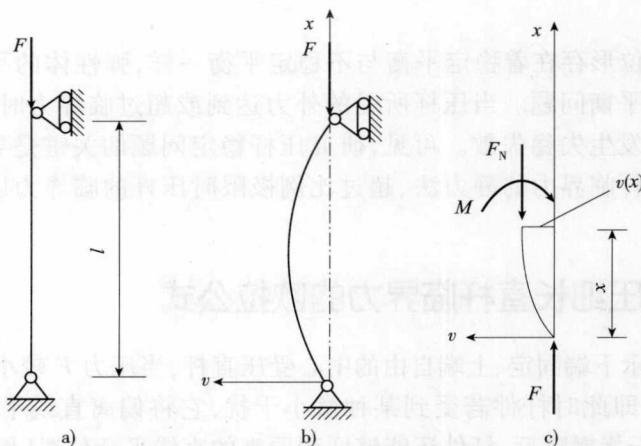


图 16-2 两端铰支细长压杆的临界力

对微小弯曲变形,可使用挠度曲线近似微分方程式 $v'' = \frac{M}{EI}$,得

$$v'' = -\frac{F}{EI}v \quad (b)$$

引用记号

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (c)$$

上式变成

$$v'' + k^2 v = 0 \quad (d)$$

该微分方程的通解为

$$v = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad (e)$$

式中 A, B 为积分常数。杆的边界条件是

$$v(0) = 0, v(l) = 0 \quad (f)$$

代入式(e)得

$$B = 0, A\sin(kl) = 0 \quad (g)$$

式(f)的第二式要求: $A = 0$ 或者 $\sin(kl) = 0$ 。然而,如果 $A = 0$,则压杆各截面的挠度均为零,即受压杆轴线仍为直线,这与压杆处于微弯状态不符,因此只能是

$$\sin(kl) = 0 \quad (h)$$

满足这一条件的 kl 值为

$$kl = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (i)$$

由此得

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (j)$$

使压杆在微弯状态下保持平衡的最小压力为临界力。所以取 $n=1$, 即得两端铰支细长压杆的临界力为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (16-1)$$

上式称为两端铰支细长压杆的欧拉公式。

导出欧拉公式时,用变形以后的位置计算弯矩,如式(a)所示。这里不再使用原始尺寸原理,是稳定问题在处理方法上与以往不同之处。

两端铰支细长压杆是实际工程中最常见的情况。例如,内燃机配气机构中的挺杆,磨床液压装置中的活塞杆,桁架结构中的受压杆等,一般都简化成两端铰支杆。

例题 16-1 柴油机的挺杆是钢制空心圆管,外径和内径分别为 12mm 和 10mm,杆长 383mm,钢材的 $E=210\text{GPa}$ 。根据动力计算,挺杆承受的最大压力 $F=2\,290\text{N}$ 。规定的稳定安全因数为 $n_{st}=3\sim 5$ 。试校核挺杆的稳定性。

解: ①计算挺杆横截面的惯性矩。

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{3.142}{64} \times (12^4 - 10^4) \times 10^{-12} = 5.272 \times 10^{-10} \text{m}^4$$

②计算挺杆的临界压力。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{3.142^2 \times 210 \times 10^9 \times 5.272 \times 10^{-10}}{383^2 \times 10^{-6}} = 7\,541\text{N}$$

③计算挺杆的工作安全因数。

临界压力与实际最大压力之比为压杆的工作安全因数,即

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{7\,541}{2\,290} = 3.254$$

规定的稳定安全因数 $n_{st}=3\sim 5$,挺杆满足稳定性要求。



讨论与练习

(1) 两端铰支压杆欧拉公式适用范围是什么?

(2) 请用 Maple 编程计算本题。

16.1.2 欧拉公式的普遍形式

下面推导欧拉公式的普遍形式。对式(d)中的 v 再微分两次得

$$v^{(4)} + k^2 v'' = 0 \quad (16-2)$$

可以证明,式(16-2)的微分方程适用于不同的约束形式下的压杆。该微分方程的通解为

$$v = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + C_3 x + C_4 \quad (16-3a)$$

$$v' = kC_1 \cos(kx) - kC_2 \sin(kx) + C_3 \quad (16-3b)$$

$$v'' = -k^2 C_1 \sin(kx) - k^2 C_2 \cos(kx) \quad (16-3c)$$

$$v''' = -k^3 C_1 \cos(kx) + k^3 C_2 \sin(kx) \quad (16-3d)$$

注意到 $v' = \theta(x)$ 为转角方程, $EIv'' = M(x)$ 为弯矩方程, $EIv''' = F_s(x)$ 为剪力方程, 将压杆特定截面的位移和静力边界条件代入式(16-3), 可求出压杆稳定的特征方程, 从而求出压杆的临界力。

16.1.3 其他约束情况下大柔度压杆的临界载荷

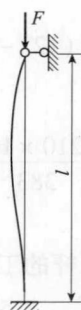
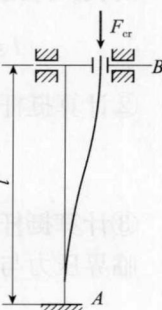
对于其他边界条件的临界力可以写成统一形式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (16-4)$$

这是欧拉公式的普遍形式。式中, μl 表示把压杆折算成与临界力相当的两端铰支压杆的长度, 称为相当长度, μ 称为长度因数, 它反映了约束情况对临界载荷的影响。为方便理解, 将几种常见大柔度压杆的长度因数与两端约束的关系列于表 16-1。

几种常见大柔度压杆的长度因数

表 16-1

杆端 支承情况	两端铰支	一端自由 一端固定	一端铰支 一端固定	两端固定	一端固定, 一端可 移动, 但不能转动
挠曲线 图形					
长度因数	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.5$	$\mu = 1$

应该指出, 以上结果是在理想的杆端约束下得到的, 工程实际问题要复杂得多, 需根据具体情况进行分析。例如杆端与其他弹性构件固接的压杆, 由于弹性构件也将发生变形, 所以压杆的端截面就介于固定端和铰支座之间的弹性支座。此外, 压杆上载荷也有多种形式, 例如压力可能沿轴线分布, 又如在弹性介质中的压杆, 还将受到介质的阻抗力。上述各种情况, 也可用不同的长度因数 μ 来反映, 这些因数的值可从有关的设计手册中查到。

例题 16-2 试由压杆挠曲线的微分方程, 导出两端固定杆欧拉公式。

解: ①建立挠曲线微分方程。

两端固定的压杆失稳后, 计算简图如图 16-3 所示。变形对点对称, 上、下两端的约束力偶矩同为 M_e , 水平约束力皆等于零。挠曲线微分方程是

$$v'' = -\frac{F}{EI}v + \frac{M_e}{EI} \quad (1)$$

引用记号式(c), 上式可以写成

$$v'' + k^2 v = \frac{M_e}{EI} \quad (2)$$

②求微分方程的通解。

方程式(2)的通解为

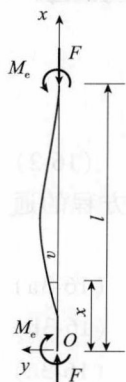


图 16-3

$$v = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_e}{F} \quad (3)$$

v 的一阶导数为

$$v' = Ak \cos kx - Bk \sin kx \quad (4)$$

③由边界条件确定特征方程。

两端固定杆件的边界条件是

$$v(0) = 0, v'(0) = 0, v(l) = 0, v'(l) = 0 \quad (5)$$

将边界条件式(5)代入式(3)和式(4),得

$$B + \frac{M_e}{F} = 0 \quad (6a)$$

$$Ak = 0 \quad (6b)$$

$$A \sin kl + B \cos kl + \frac{M_e}{F} = 0 \quad (6c)$$

$$Ak \cos kl - Bk \sin kl = 0 \quad (6d)$$

由式(6a)、式(6b)、式(6c)、式(6d)得出

$$\cos kl - 1 = 0 \quad (7a)$$

$$\sin kl = 0 \quad (7b)$$

④由非平凡解最小根条件,确定临界压力。

满足特征方程式(7)的最小正根为

$$k = \frac{2\pi}{l} \quad (8)$$

$$F_{cr} = k^2 EI = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (9)$$

⑤确定弯矩。

$$M = EI v'' = -EI k^2 (A \sin kx + B \cos kx) \quad (10)$$

$$A = 0, B = -\frac{M_e}{F} \quad (11)$$

将式(8)和式(11)代入式(10)得

$$M = M_e \cos \frac{2\pi x}{l} \quad (12)$$

显然,当 $x = \frac{l}{4}$ 或 $x = \frac{3l}{4}$ 时, $M = 0$ 。



讨论与练习

(1) **类比法**: 根据两端铰支压杆欧拉公式采用类比法可以确定其他支承压杆的欧拉公式。其要点是对所研究的压杆(或相应延长)寻找一相当于两端铰支(弯矩为零或挠曲轴拐点),可以由解析或实验的方法确定。

(2) 请用类比法确定本题的欧拉公式。